

# PENYELESAIAN MASALAH DIFUSI PANAS PADA SUATU KABEL PANJANG

Moh. Alex Maghfur<sup>1)</sup>, Ari Kusumastuti<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim  
Jalan Gajayana No. 50, Kota Malang

<sup>2)</sup>Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim  
Jalan Gajayana No. 50, Kota Malang

<sup>1)</sup>13610028@student.uin-malang.ac.id

<sup>2)</sup>arikusumastuti@gmail.com

**Abstrak**—Permasalahan perambatan panas umumnya digambarkan dalam suatu domain material batang yang memiliki panjang berhingga, namun permasalahan akan menjadi lebih sulit jika daerah tersebut berukuran sangat panjang. Permasalahan tersebut akan lebih mudah diselesaikan dengan mengasumsikan panjang kabel tersebut mendekati tak hingga. Transformasi Fourier digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi panas pada kasus domain tak hingga. Persamaan difusi panas ditransformasikan sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa. Selanjutnya, persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian transformasi. Penyelesaian persamaan diferensial parsial diperoleh dengan melakukan invers transformasi. Selanjutnya, diterapkan prinsip konvolusi sehingga menghasilkan penyelesaian dalam bentuk integral tunggal yang selanjutnya bisa diperiksa keabsahan penyelesaiannya. Setelah diperoleh penyelesaian persamaan, dilakukan simulasi dengan menggunakan fungsi error pada software Matlab. Berdasarkan hasil simulasi, panas berdistribusi dari temperatur tinggi ke temperatur rendah sepanjang kabel. Untuk waktu yang semakin besar, maka panas akan semakin menyebar ke seluruh kabel sedemikian sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang kabel. Konstanta difusifitas termal mempengaruhi kecepatan perambatan panas. Simulasi pada kabel berhingga menunjukkan temperatur kedua ujung kabel yang selalu bernilai nol, tetapi karena tidak memungkinkan simulasi keseluruhan kabel maka simulasi pada kabel panjang hanya dilakukan pada bagian yang diberikan panas, sehingga kedua ujung temperaturnya tidak nol.

**Kata kunci**— Domain tak hingga, persamaan difusi panas, transformasi Fourier.

## I. PENDAHULUAN

Persamaan difusi merupakan salah satu contoh persamaan diferensial parsial yang sangat aplikatif karena mampu menjelaskan permasalahan fisika berupa perambatan partikel maupun energi. Salah satu contoh permasalahan difusi adalah masalah perambatan panas (*heat transfer*) pada suatu batang yang dinyatakan dalam persamaan difusi panas satu dimensi. Banyak

metode yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi panas pada domain berhingga, seperti metode pemisahan variabel (Zauderer, 2006:211) dan metode numerik seperti metode beda hingga (Yang, 2005:406). Akan tetapi, permasalahan menjadi lebih sulit apabila domain yang digunakan sangat besar, sebagai contoh masalah perambatan panas pada suatu kabel yang sangat panjang.

Permasalahan tersebut akan lebih mudah diselesaikan dengan menganggap panjang kabel mendekati tak hingga, sehingga menjadi permasalahan pada domain tak hingga (Humi, 1991:214). Karena domain yang sangat besar, analisis penyebaran panas juga tidak mungkin dilakukan sepanjang domain, sehingga umumnya simulasi hanya dilakukan di sekitar sumber panas. Meskipun domain yang digunakan tak hingga, permasalahan tersebut tetap memiliki kondisi batas, yaitu dengan mengasumsikan suhu untuk ujung kabel yang mendekati tak hingga sebesar nol. Jadi, penggunaan domain tak hingga hanya merupakan pendekatan untuk mempermudah penyelesaian masalah jika domain yang digunakan sangat besar. Untuk menyelesaikan persamaan difusi panas pada domain tak-hingga tersebut, dapat dilakukan dengan menggunakan metode transformasi dalam bentuk integral. Terdapat beberapa macam metode transformasi, salah satunya adalah metode transformasi Fourier. Negero (2014) meneliti mengenai metode transformasi Fourier untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan penyelesaian berupa  $u(x, t)$ .

Berdasarkan latar belakang permasalahan tersebut, maka fokus penelitian ini adalah pembahasan mengenai penyelesaian persamaan difusi panas dengan menggunakan transformasi Fourier pada domain tak-hingga, dalam hal ini berupa suatu kabel panjang. Penelitian ini bermanfaat untuk menyelesaikan permasalahan perambatan panas pada suatu domain yang sangat besar, yang kemudian didekati dengan domain tak hingga, sehingga memudahkan untuk menentukan penyelesaiannya. Selain itu, karena domain yang digunakan sangat besar, maka simulasi tidak perlu

dilakukan untuk keseluruhan domain, tetapi cukup dilakukan di sekitar domain yang terdapat sumber panas, sehingga akan memudahkan analisis simulasi.

## II. TINJAUAN PUSTAKA

### A. Persamaan Difusi Panas Satu Dimensi

Diberikan suatu batang dengan massa jenis material batang  $\rho$  konstan yang memiliki bagian-bagian melintang seragam dengan luas  $A$ . Permukaan samping batang mengisolasi batang, sehingga diasumsikan tidak ada panas yang menghilang melalui permukaan batang. Tempatkan sumbu- $x$  sepanjang batang yang memiliki panjang  $L$ , asumsikan bahwa pada suatu waktu yang diberikan, suhu sepanjang sebarang bagian melintang pada batang adalah sama, meskipun mungkin suhunya bervariasi antara setiap bagian. Akan diturunkan suatu persamaan untuk  $u(x, t)$  yang menyatakan temperatur batang di titik  $x$  pada waktu  $t$ . Pada konteks masalah difusi,  $u(x, t)$  disebut fungsi distribusi kepadatan (*density distribution function*). (O'Neil, 2014:1).

Diberikan suatu segmen pada batang. Misalkan  $c$  adalah konstanta panas jenis pada material batang tertentu, atau dapat diartikan sebagai banyak energi panas yang harus diberikan kepada suatu unit massa dari material untuk menaikkan suhu sebesar satu derajat. Segmen pada batang di antara  $x$  dan  $x + \Delta x$  memiliki massa  $\rho V = \rho A \Delta x$ , dan segmen ini akan mengambil energi panas kurang lebih sebesar  $\rho c A u(x, t) \Delta x$  satuan untuk mengubah suhu segmen dari nol ke  $u(x, t)$ . Energi panas total pada segmen pada sebarang waktu  $t > 0$  adalah

$$E(x + \Delta x, t) = \int_x^{x+\Delta x} \rho c A u(\xi, t) d\xi. \quad (1)$$

Sedangkan laju perubahan energi di dalam segmen terhadap waktu adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \text{fluks} + \text{sumber atau gaya luar} \\ &= \int_x^{x+\Delta x} \rho c A \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) d\xi \end{aligned} \quad (2)$$

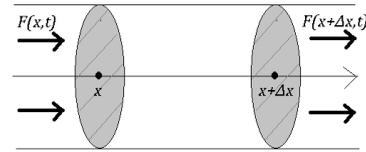
Asumsikan bahwa tidak ada sumber atau energi yang hilang di dalam batang, maka

$$\text{fluks} = \int_x^{x+\Delta x} \rho c A \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) d\xi \quad (3)$$

(O'Neil, 2014:3)

Sekarang misalkan  $F(x, t)$  adalah banyaknya energi panas per satuan luas yang mengalir melalui bagian melintang di titik  $x$  pada waktu  $t$  dan searah dengan peningkatan nilai  $x$ . Maka fluks energi pada segmen di antara  $x$  dan  $x + \Delta x$  pada waktu  $t$  adalah laju aliran energi masuk segmen yang melalui  $x$  dikurangi dengan

laju aliran energi keluar segmen yang melalui  $x + \Delta x$  (Gambar 1)



Gambar 1 Fluks energi pada segmen sama dengan laju aliran energi masuk dikurangi laju aliran energi keluar. (O'Neil, 2014:3)

maka

$$\begin{aligned} \text{fluks} &= AF(x, t) - AF(x + \Delta x, t) \\ \text{fluks} &= -A(F(x + \Delta x, t) - F(x, t)) \end{aligned} \quad (4)$$

Ingat kembali hukum pendinginan Newton, maka

$$\begin{aligned} \text{fluks} &= -A \left( -K \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) + K \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \\ &= KA \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \end{aligned}$$

atau

$$\text{fluks} = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left( KA \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t) \right) d\xi \quad (5)$$

Dari persamaan (3) dan persamaan (5) diperoleh

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} \rho c A \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t) d\xi &= \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left( KA \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t) \right) d\xi \\ \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ u_t &= k u_{xx} \end{aligned} \quad (6)$$

di mana

$$k = \frac{K}{\rho c} \quad (7)$$

adalah difusifitas dari material batang. Persamaan (6) disebut persamaan difusi panas atau persamaan difusi satu dimensi. (O'Neil, 2014:3)

Kondisi awal secara khusus memiliki bentuk

$$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L, \quad (8)$$

di mana  $f(x)$  adalah fungsi yang diberikan. Sedangkan kondisi batas menentukan kondisi pada kedua titik ujung batang pada variabel ruang.

$$u(0, t) = \alpha(t), u(L, t) = \beta(t), 0 < x < L, \quad (9)$$

di mana  $\alpha(t)$  dan  $\beta(t)$  adalah fungsi yang diberikan. (O'Neil, 2014:4)

Pada beberapa kondisi, solusi dari persamaan diferensial parsial diperoleh dari suatu himpunan masalah nilai batas pada suatu daerah di mana dimensinya mungkin tak hingga. Sebagai contoh, diberikan masalah dalam menentukan besar medan listrik yang dihasilkan dari antena kutub horizontal ketika tegangan listrik diberikan sepanjang antena. Tegangan listrik muncul pada antena, tetapi juga memancar ke segala arah secara tak terhingga. Terdapat juga masalah nilai

batas pada daerah yang memiliki dimensi berhingga tetapi sangat besar. Artinya, dimensi yang sangat besar tersebut dapat dianggap sebagai suatu interval yang tak terhingga. Sebagai contoh, misalkan akan dicari tegangan pada suatu kabel transatlantik. Meskipun panjang kabel tersebut berhingga, misalkan sepanjang 4000 kilometer, tetapi akan lebih mudah untuk menganggapnya sebagai suatu masalah nilai batas yang sama di mana panjang kabelnya tak berhingga. Sehingga untuk permasalahan domain tak hingga akan ditentukan solusi dari masalah nilai batas yang melalui dua jenis interval, yaitu interval semi-berhingga (*semi-infinite interval*) dan interval tak-berhingga (*infinite interval*). Interval semi-berhingga dimulai pada suatu titik  $c$  dan merentang menuju tak terhingga. Sedangkan interval tak-berhingga merentang dari  $-\infty$  sampai  $+\infty$ . (Humi, 1992:214)

### B. Transformasi Fourier

Ingat kembali formula DeMoivre yang menyatakan sinus dan cosinus ke dalam bentuk eksponensial kompleks. Dari deret Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10)$$

Diperoleh bentuk kompleks dari deret Fourier yaitu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad (11)$$

di mana

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx \quad (12)$$

(Strauss, 2008:115-116)

Integral Fourier diperoleh dengan memisalkan  $L \rightarrow \infty$ . Jika dimisalkan  $\omega = n\pi/L$  (artinya,  $\Delta\omega = \pi/L$ ), dan substitusikan  $c_n$  ke dalam barisan, diperoleh integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-L}^L f(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{-i\omega x} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{i\omega x} d\omega \quad (13)$$

Sehingga dihasilkan transformasi Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (14)$$

di mana

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega y} dx \quad (15)$$

### C. Konvolusi dan Fungsi Error

**Definisi 1.** Jika  $f$  dan  $g$  adalah sebarang fungsi di  $\mathbb{R}$ , konvolusi dari keduanya adalah fungsi  $f * g$  yang didefinisikan sebagai berikut

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy \quad (16)$$

asalkan integralnya ada (Folland, 1992:206)

**Teorema 2.** Konvolusi memenuhi hukum-hukum aljabar yang sama dengan perkalian biasa

1.  $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$  untuk sebarang konstanta  $a, b$
  2.  $f * g = g * f$
  3.  $f * (g * h) = (f * g) * h$
- (Folland, 1992:206-207)

Berikut ini akan didefinisikan fungsi error

**Definisi 3.** Fungsi error  $\text{erf}(x)$  didefinisikan sebagai berikut

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (17)$$

(Zill, 2009:489)

### D. Penelitian Sebelumnya Mengenai Penyelesaian Persamaan Difusi Panas dan Transformasi Fourier

Pembahasan awal mengenai penyelesaian persamaan difusi panas telah dilakukan oleh Zauderer (2006:211) yang membahas mengenai penyelesaian persamaan konduksi panas pada batang berhingga, yang menghasilkan solusi eksak persamaan difusi panas. Selain itu, Yang (2005:406) membahas mengenai penyelesaian persamaan difusi panas satu dimensi pada batang berhingga dengan menggunakan metode numerik skema implisit. Di sisi lain, metode pemisahan variabel hanya bisa digunakan untuk domain berhingga. Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada domain tak-berhingga adalah metode faktorisasi operator diferensial, seperti yang telah dilakukan Zauderer (2006:64) pada persamaan gelombang. Tetapi, tidak semua persamaan dapat dilakukan faktorisasi. Selain itu, terdapat juga metode karakteristik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial orde satu. Strauss (2008:46-48) membahas mengenai penyelesaian untuk domain tak-berhingga. Negero (2014:52) meneliti mengenai metode transformasi Fourier untuk penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan solusi berupa  $u(x, t)$ . Langkah-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan transformasi Fourier adalah

1. Mentransformasikan persamaan diferensial parsial sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa dengan variabel  $U(\omega, t)$
2. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa sehingga diperoleh solusi  $U(\omega, t)$
3. Menentukan solusi  $u(x, t)$  dengan melakukan invers transformasi Fourier  $U(\omega, t)$

Dengan menggunakan teknik yang sama, Surur (2013:37-39) menggunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan gelombang, yang merupakan kondisi khusus untuk  $\alpha = \beta^2$  pada persamaan telegraf. Di sisi lain, Oktavia (2013:14) menggunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan Korteweg de Vries (KdV) pada kasus linier dispersif yang selanjutnya penyelesaiannya disimulasikan secara numerik.

### III. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi kepustakaan (*library research*) dengan mengkaji literatur-literatur mengenai persamaan difusi panas dan transformasi Fourier. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menyelesaikan persamaan difusi panas dengan menggunakan transformasi Fourier.
2. Menerapkan prinsip konvolusi sehingga menghasilkan penyelesaian akhir  $u(x, t)$  dalam bentuk integral tunggal.
3. Memeriksa keabsahan solusi  $u(x, t)$  sehingga memenuhi persamaan awal dan kondisi awal.
4. Menerapkan kondisi awal  $f(x)$  ke dalam penyelesaian  $u(x, t)$  dan menyatakan penyelesaian  $u(x, t)$  ke dalam bentuk kombinasi fungsi error.
5. Menyimulasikan penyelesaian  $u(x, t)$  dengan kondisi awal  $f(x)$  ke dalam Matlab.
6. Menginterpretasikan hasil simulasi penyelesaian  $u(x, t)$  untuk kondisi awal  $f(x)$  dengan menganalisis distribusi panas.
7. Menginterpretasikan hasil simulasi penyelesaian  $u(x, t)$  dengan menganalisis pengaruh difusifitas termal  $k$  yang berbeda-beda terhadap laju penyebaran panas pada batang.
8. Membandingkan simulasi penyelesaian persamaan difusi panas pada domain tak hingga dengan domain berhingga.
9. Menyimpulkan hasil penelitian serta memberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

### IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### A. Penyelesaian Persamaan Difusi Panas

Diberikan persamaan difusi panas

$$u_t = ku_{xx}, -\infty < x < \infty \quad (18)$$

yang memiliki kondisi awal

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

dan kondisi batas

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0. \quad (20)$$

Permasalahan ini tidak bisa diselesaikan dengan pendekatan domain berhingga karena kedua ujung domain menuju ke tak hingga, sehingga digunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan permasalahan ini.

#### 1. Penyelesaian Persamaan Difusi Panas dengan menggunakan Transformasi Fourier

Transformasi Fourier (14) diterapkan pada persamaan difusi panas (18). Transformasi Fourier dari  $u(x, t)$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x, t)] &= U(\omega, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx, \end{aligned} \quad (21)$$

Transformasi dari turunan pertama  $u(x, t)$  terhadap variabel  $t$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) \end{aligned}$$

Transformasi dari turunan pertama  $u(x, t)$  terhadap variabel  $x$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} du(x, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) (-i\omega) e^{-i\omega x} dx = -i\omega U(\omega, t) \end{aligned}$$

Transformasi dari turunan kedua  $u(x, t)$  terhadap variabel  $x$  adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right) e^{-i\omega x} dx \\ &= (-i\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\right) e^{-i\omega x} dx \\ &= -\omega^2 U(\omega, t) \end{aligned}$$

Sehingga transformasi Fourier dari kedua ruas persamaan difusi panas (18) menghasilkan penyelesaian  $U(\omega, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \\ \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\right] &= \mathcal{F}\left[k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)\right] \\ \frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) &= -k\omega^2 U(\omega, t) \\ U(\omega, t) &= C e^{-k\omega^2 t}. \end{aligned} \quad (22)$$

Diketahui  $u(x, 0) = f(x)$ , maka

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-k\omega^2 t}.$$

Untuk menentukan penyelesaian  $u(x, t)$  maka akan dilakukan invers transformasi terhadap  $U(\omega, t)$ . Jadi, penyelesaian dari persamaan difusi panas (18) dengan kondisi awal  $f(x)$  adalah

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U(\omega, t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \quad (23)$$

## 2. Penerapan Konvolusi pada Penyelesaian

Penyelesaian persamaan difusi panas (18) masih memuat integral ganda, sehingga perlu dilakukan penyederhanaan ke dalam bentuk persamaan integral tunggal. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan prinsip konvolusi. Perhatikan bahwa

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right] = e^{-k\omega^2 t} \quad (24)$$

Misalkan

$$G(\omega) = \mathcal{F} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \right] = e^{-k\omega^2 t}$$

maka

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (F * G)(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= (f * g)(x) = (g * f)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x - y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy \end{aligned}$$

Jadi, setelah konvolusi diperoleh penyelesaian

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \quad (25)$$

## 3. Analisis Keabsahan Penyelesaian Persamaan Difusi Panas

Untuk memeriksa keabsahan dari penyelesaian (24) maka akan dilakukan analisis keabsahan penyelesaian sehingga memenuhi persamaan difusi panas (18), kondisi awal (19), dan kondisi batas (20). Diketahui penyelesaian persamaan difusi panas

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

Turunan pertama terhadap  $t$  adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \\ &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( 1 - \frac{(x-y)^2}{2kt} \right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \end{aligned}$$

Turunan kedua  $u(x, t)$  terhadap  $x$  dan dikali  $k$  adalah

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \\ &= -\frac{1}{4t\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( 1 - \frac{(x-y)^2}{2kt} \right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \end{aligned}$$

Karena  $u_t = k u_{xx}$ , maka penyelesaian memenuhi persamaan awal.

Selanjutnya, untuk menghindari pembagian terhadap nol, maka penyelesaian sebelum konvolusi digunakan untuk menganalisis keabsahan penyelesaian terhadap kondisi awal (19). Diketahui

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

Substitusikan  $t = 0$  sehingga

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) e^{i\omega x} d\omega = f(x)$$

Jadi, penyelesaian memenuhi kondisi awal.

Terakhir, untuk  $x \rightarrow \infty$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan untuk  $x \rightarrow -\infty$ , maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian memenuhi kondisi batas.

## B. Analisis Simulasi dan Interpretasi Penyelesaian Persamaan Difusi Panas

Diberikan penyelesaian

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

Simulasi dilakukan dengan menyatakan penyelesaian (24) ke dalam fungsi error. Karena  $(x - y)^2 = (y - x)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ , misalkan

$$\theta = \frac{y - x}{\sqrt{4kt}}$$

maka penyelesaiannya menjadi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\theta^2} d\theta \quad (26)$$

Diberikan suatu kondisi awal fungsi tangga

$$f(y) = \begin{cases} h, & a \leq y \leq b \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (27)$$

Artinya, untuk bagian domain di antara  $a$  dan  $b$  temperturnya sebesar  $h$  dan untuk bagian lainnya bernilai nol. Jika  $y$  diganti dengan  $x - \theta\sqrt{4kt}$  maka

$$f(x - \theta\sqrt{4kt}) = \begin{cases} h, & a \leq x - \theta\sqrt{4kt} \leq b \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} h, & \frac{x-b}{\sqrt{4kt}} \leq \theta \leq \frac{x-a}{\sqrt{4kt}} \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

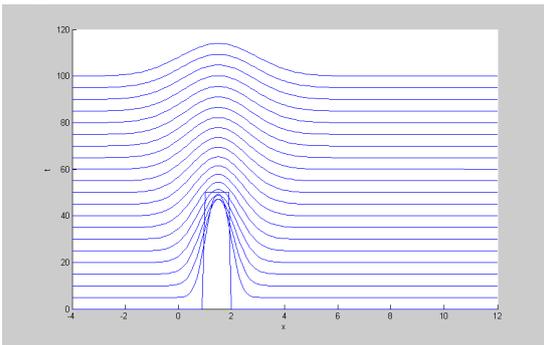
Sehingga penyelesaiannya menjadi

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} h e^{-\theta^2} d\theta$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} e^{-\theta^2} d\theta - \int_0^{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}} e^{-\theta^2} d\theta \right)$$

$$u(x, t) = \frac{h}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x-a}{\sqrt{4kt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-b}{\sqrt{4kt}} \right) \right) \quad (28)$$

Berikut ini adalah simulasi dari penyelesaian (24) dengan menggunakan Matlab. Sumbu-x menyatakan ruang dan sumbu-y menyatakan waktu.



Gambar 2 Simulasi penyelesaian untuk  $a = 1$  dan  $b = 2$

Simulasi pertama (Gambar 2) menunjukkan bahwa mula-mula panas terjadi pada daerah  $1 \leq x \leq 2$ , sedangkan untuk daerah lainnya temperaturnya bernilai nol. Kemudian seiring dengan meningkatnya waktu, maka perlahan panas di sekitar titik  $a = 1$  dan  $b = 2$  mulai berkurang dan semakin menyebar sehingga temperatur di sekitar kedua titik tersebut mengalami perubahan. Daerah yang mula-mula temperaturnya nol perlahan mengalami kenaikan temperatur. Sebaliknya, daerah yang mula-mula terdapat panas perlahan temperaturnya menurun. Untuk  $t$  yang semakin besar, maka panas pada kabel akan semakin menyebar, sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang kabel.

Dengan cara yang sama, jika diberikan suatu kondisi awal fungsi tangga

$$f(y) = \begin{cases} h_1, & a \leq y \leq b \\ h_2, & c \leq y \leq d \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (29)$$

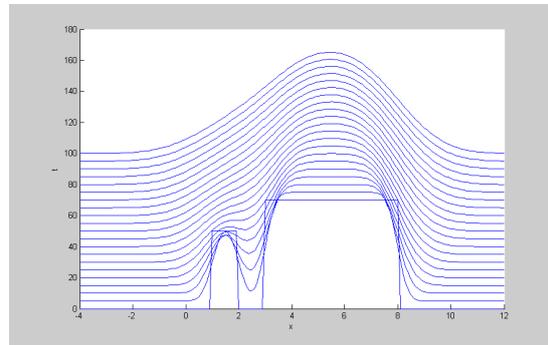
Maka penyelesaiannya adalah

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-b}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-a}{\sqrt{4kt}}} h_1 e^{-\theta^2} d\theta$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-d}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x-c}{\sqrt{4kt}}} h_2 e^{-\theta^2} d\theta$$

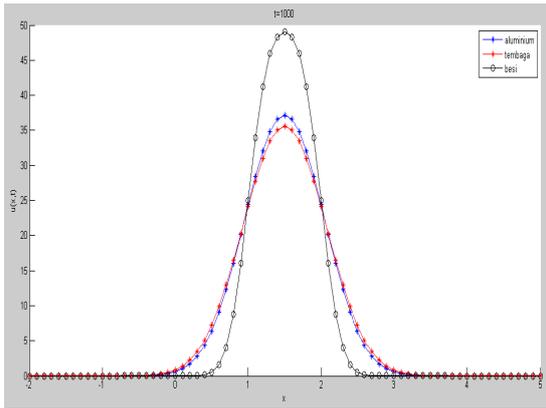
$$u(x, t) = \frac{h}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x-a}{\sqrt{4kt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-b}{\sqrt{4kt}} \right) \right) + \frac{h}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x-c}{\sqrt{4kt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-d}{\sqrt{4kt}} \right) \right) \quad (30)$$

Berikut ini adalah simulasi dari penyelesaian (24) dengan menggunakan Matlab. Sumbu-x menyatakan ruang dan sumbu-y menyatakan waktu.



Gambar 3 Simulasi penyelesaian untuk  $a = 1, b = 2, c = 3,$  dan  $d = 8$

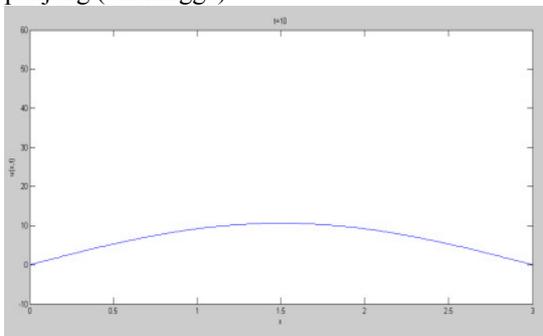
Simulasi kedua (Gambar 3) sama seperti menunjukkan bahwa mula-mula panas terjadi pada daerah  $1 \leq x \leq 2$  dan , sedangkan untuk daerah lainnya temperaturnya bernilai nol. Perbedaan dengan simulasi pertama adalah adanya daerah kedua yang diberikan panas. Distribusi panas hampir sama seperti simulasi pertama. Perbedaannya terletak pada perubahan temperatur di antara kedua daerah yang diberikan panas. Seperti pada daerah lain, mula-mula temperaturnya nol, tetapi karena diapit oleh kedua panas, maka distribusi panas mengalami perbedaan. Untuk daerah yang dekat dengan panas yang lebih tinggi tentunya memiliki temperatur yang lebih tinggi. Semakin meningkat  $t$ , maka distribusi panas pada daerah  $a \leq x \leq b$  akan semakin menyesuaikan dengan daerah  $c \leq x \leq d$  karena memiliki temperatur yang lebih kecil. Untuk  $t$  yang semakin besar, maka panas pada kabel akan semakin menyebar, sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang kabel.



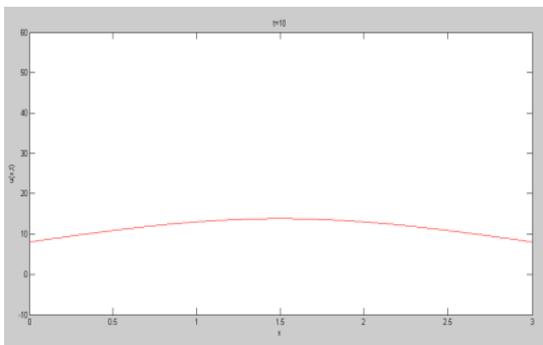
Gambar 4 Simulasi penyelesaian untuk difusifitas termal materi yang bervariasi, yaitu aluminium (biru, style -\*), tembaga (merah, style -\*), dan besi (hitam, style -o).

Selanjutnya simulasi pertama akan dilakukan untuk difusifitas termal kabel yang bervariasi. Diberikan difusifitas termal tiga logam, yaitu aluminium, tembaga, dan besi ( $k_{aluminium} = 9,7 \cdot 10^{-5} m^2/s$ ,  $k_{tembaga} = 1,11 \cdot 10^{-4} m^2/s$ ,  $k_{besi} = 2,3 \cdot 10^{-5} m^2/s$ ) Berdasarkan hasil simulasi diketahui bahwa panas pada kabel tembaga merambat lebih cepat, disusul dengan kabel aluminium dan kabel besi. Hal ini terjadi karena difusifitas termal tembaga paling besar. sehingga disimpulkan bahwa semakin besar difusifitas termal, maka semakin cepat panas menyebar.

Terakhir, dilakukan simulasi persamaan difusi panas pada kabel berhingga dan pada kabel panjang (tak hingga)



Gambar 5 Simulasi persamaan panas pada kabel berhingga



Gambar 6 Simulasi persamaan panas pada kabel panjang

Berdasarkan simulasi pada kabel berhingga (Gambar 5), tampak pada kedua ujung kabel temperturnya selalu bernilai nol, karena kondisi batas yang diterapkan adalah nol untuk kedua ujung kabel. Hal ini sebenarnya berlaku juga untuk simulasi pada kabel tak hingga (Gambar 6). hanya saja, karena kabel yang sangat panjang, maka simulasi tidak mungkin dilakukan sepanjang kabel. Sehingga yang dimunculkan pada simulasi hanya pada daerah yang diberikan panas saja. Seperti pada gambar 6, kedua ujung terlihat tidak sama dengan nol karena sebenarnya ujung tersebut bukan ujung kabel yang disimulasikan.

## V. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa permasalahan difusi panas pada kabel panjang dapat diselesaikan dengan menggunakan transformasi Fourier. Persamaan difusi panas ditransformasikan sehingga diperoleh persamaan diferensial biasa. Selanjutnya, persamaan diferensial biasa tersebut diselesaikan untuk menghasilkan penyelesaian transformasi. Penyelesaian persamaan diferensial parsial diperoleh dengan melakukan invers transformasi. Selanjutnya diterapkan prinsip konvolusi, sehingga menghasilkan penyelesaian dalam bentuk integral tunggal yang selanjutnya bisa diperiksa keabsahan penyelesaiannya. Setelah diperoleh penyelesaian persamaan, dilakukan simulasi dengan menggunakan fungsi error pada Matlab. Simulasi pertama menunjukkan bahwa panas menyebar dari temperatur tinggi ke temperatur rendah, begitu juga apabila diberikan dua daerah panas, seperti pada simulasi kedua. Untuk waktu yang semakin besar, maka panas akan semakin menyebar ke seluruh kabel sedemikian sehingga temperatur mendekati nol di sepanjang kabel. Simulasi ketiga untuk difusifitas termal yang berbeda menunjukkan bahwa semakin besar difusifitas termal, maka semakin cepat panas menyebar. Terakhir, simulasi pada kabel berhingga menunjukkan kedua ujung kabel yang selalu bernilai nol. Hal yang sama sebenarnya juga berlaku pada simulasi pada kabel panjang, hanya saja karena tidak memungkinkan simulasi keseluruhan kabel maka hanya dilakukan simulasi pada bagian yang diberikan panas.

## DAFTAR PUSTAKA

- Erich, Zauderer. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. Third Edition. 2006. Danvers: John Wiley & Sons, Inc.
- Folland, G. B. 1992. *Fourier Analysis and Its Applications*. California: Brooks/Cole Publishing Company
- Haberman, Richard. 2013. *Applied Partial Differential Equation with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Fifth Edition. New Jersey,

- Canada:
- Holman, J.P. (2002). *Heat Transfer* (9th ed.). McGraw-Hill.
- Humi, Mayer dan William B. Miller. 1992. *Boundary Value Problem and Partial Differential Equation*. Boston: PWS-KENT Publishing Company
- Nair, Sudhakar. 2011. *Advanced Topics in Applied Mathematics: for Engineering and the Physical Sciences*. New York: Cambridge University Press
- Negero, Naol Tufa. 2014. Fourier Transform Methods for Partial Differential Equation. *International Journal of Partial Differential Equation and Applications*, (Online), 2 (3). 44-57, (<http://pubs.sciepub.com/ijpdea/2/3/2>), diakses 6 Maret 2017.
- Oktavia, Aulia dan Mahdhivan Syafwan. 2013. Eksistensi Soliton pada Persamaan Korteweg-De Vries. *Jurnal Matematika Unand*, 3 (1). 9-16.
- O'Neil, Peter V. 2014. *Beginning Partial Differential Equation*. New Jersey: John Wiley & Sons
- Strauss, Walter A. 2008. *Partial Differential Equation: An Introduction*. Second Edition. Danvers: John Wiley & Sons
- Surur, Agus Miftakus, Yudi Ari Adi, dan Sugianto. 2013. Penyelesaian Persamaan Telegraph dan Simulasinya. *Jurnal Fourier*, (Online), 2 (1). 33-43, (<http://www.fourier.or.id>), diakses 9 Juni 2017
- Yang, Won-young. 2005. *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. New Jersey: John Wiley & Sons
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. Edisi Ketiga. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Zill, Dennis G. dan Michael R. Cullen. 2009. *Differential Equation with Boundary Value Problem*. Seventh Edition. Belmont: Cengage Learning