Prismatika: Jurnal Pendidikan dan Riset Matematika Vol. 4 No. 2 (2022)
p-ISSN: 2654-6140, e-ISSN: 2656-4181
http://ejurnal.budiutomomalang.ac.id/index.php/prismatika

MODUL WEYL SEBAGAI REPRESENTASI GRUP SIMETRI DARI PEWARNAAN SUATU GRAF

Intan Nisfulaila
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
i.nisfulaila@uin-malang.ac.id

Abstrak

Penelitian ini mengidentifikasi sifat-sifat modul Weyl yang memiliki kemiripan sifat dengan objek matematika yang telah dikaji sebelumnya, yakni modul Specht. Modul Specht S^{α} yang merupakan representasi tak tereduksi dari modul permutasi M^{α} untuk suatu □ partisi dari □, berkontribusi dalam menentukan polinom kromatik graf gelang (*bracelet graph*) yang melibatkan □ warna. Berdasarkan kemiripan sifat tersebut, telah diidentifikasi aplikasi penggunaan sifat-sifat modul Weyl sebagai representasi grup simetri dari □ warna dalam pewarnaan graf gelang (*bracelet graph*) sehingga dapat digunakan dalam penentuan polinom kromatiknya. Hasil identifikasi menunjukkan bahwa meskipun penentuan dimensi modul Weyl mirip dengan penentuan dimensi modul Specht, namun hasil penentuan dimensi tersebut belum tentu berperan dalam menentukan banyaknya pewarnaan suatu graf.
Kata Kunci : modul Weyl, representasi grup simetri, pewarnaan graf

Abstract

This research identifies the properties of Weyl module which had some similar properties with Specht module. Specht module S^{α} as an irreducible representation of permutation module M^{α} for some partition α of n has some contribution to determine the chromatic polynomial of bracelet graph with n colors. Due to the similarity, we had identify the application of the Weyl module properties as a representation of symmetric group of n colors in coloring bracelet graph so it can be used to determine the chromatic polynomial. The identification results show that although the determination of the dimensions of the Weyl module was similar to the determination of the dimensions of the Specht module, the results of the determination of these dimensions did not necessarily play a role in determining the number of coloring some graph.

Keywords: Weyl module, representation of symmetric group, graph coloring

Dikirim : 23 Februari 2022, **Diterima** :22 April 2022, **Diterbitkan** : 29 April 2022

PENDAHULUAN

Grup simetri S_n atau Sym_n dapat ditentukan representasi tak tereduksinya melalui beberapa tahapan (Mcnamara, 2013). Representasi grup simetri dapat juga ditentukan dengan memanfaatkan suatu tablo yang dikenal dengan nama Tablo Young (Zhao, 2008). Dalam kedua pembahasan tersebut dihasilkan subrepresentasi tak tereduksi yang diberi nama Modul Specht. Aplikasi dari Modul Specht itu sendiri dapat digunakan untuk menentukan polinom kromatik graf gelang (*bracelet graph*) yang melibatkan konsep matriks kompatibilitas dalam penghitungannya (Nisfulaila, 2014). Sedangkan dalam kehidupan sehari-hari, penerapan modul Specht dan Weyl itu sendiri secara tidak langsung dapat memberikan wawasan tambahan dalam mengasah ketelitian seseorang ketika menentukan polinom kromatik suatu graf.

Penentuan polinom kromatik suatu graf melibatkan proses pewarnaan graf yang menggunakan n warna. Dengan demikian telah dibahas modul Specht sebagai representasi grup simetri dari pewarnaan graf gelang. Dalam kaitannya dengan grup simetri dari n unsur, suatu partisi α dari n digunakan untuk mempelajari modul Weyl W^{α} dan modul Specht S^{α} dengan menggunakan pendekatan subruang dari ruang tensor (Carter dan Lusztig, 1974). Hasil pendekatan menunjukkan bahwa informasi tentang modul Weyl memberikan pandangan yang lebih jauh pada teori modul Specht.

Beberapa sifat dari modul Weyl mempunyai kemiripan dengan sifat-sifat modul Specht yang menyangkut karakteristik (1) pembangun, (2) modul induk, (3) dimensi, dan (4) faktor komposisi. Peran modul Specht dalam penentuan kromatik suatu graf, yang dalam penelitian ini dibatasi untuk graf gelang (*bracelet graph*), terjadi saat penentuan ukuran matriks kompatibilitas yang bergantung kepada dimensi dari modul Specht yang bersesuaian. Adanya kemiripan sifat modul Weyl dengan modul Specht (James dan Kerber, 1981) menginspirasi peneliti untuk menghasilkan formula dan sifat-sifat baru dalam menentukan polinom kromatik graf gelang.

Urgensi dari penggunaan modul Weyl dan pemilihan graf gelang (*bracelet graph*) dalam penelitian ini adalah (1) sebagai salah satu sarana dalam mempelajari aplikasi *tensor product* dikarenakan "bentuk" dari modul Weyl itu sendiri yang merupakan submodul dari modul permutasi $L^{(n)} = W^{(1)} \otimes \cdots \otimes W^{(1)}$ sebanyak n kali, (2) untuk graf sederhana dan berhingga, polinom kromatiknya dapat ditentukan dengan menggunakan struktur grafnya. Akan tetapi untuk struktur graf yang lebih kompleks seperti graf gelang, penentuan polinom kromatiknya dirasa sulit jika menggunakan struktur graf.

Penerapan modul Specht dalam penentuan polinom kromatik yang mempunyai kemiripan dengan modul Weyl pada dasarnya secara teori didahului oleh metode *deletion* dan *contraction* yang memberikan cara dalam menentukan polinom kromatik untuk sebarang graf berhingga. Namun metode ini dinilai tidak elegan dan memerlukan cukup banyak cara (Reinfeld, 2003). Oleh karena itu, penemuan suatu cara yang lebih efektif (Biggs, 2004) perlu dianalisis sehingga dapat memberikan motivasi dalam mencari polinom kromatik untuk graf yang lebih kompleks strukturnya seperti graf gelang, terlebih lagi untuk graf yang lebih kompleks yang lain sebagai harapan ke depannya.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka (*library research*). Pengkajian teori-teori yang relevan tidak terlepas dari kajian pustaka atau studi pustaka karena teori secara nyata dapat diperoleh melalui studi atau kajian kepustakaan. Teori-teori yang relevan utamanya dikaji dari tulisan Biggs (2004) dan Zhao (2008). Dalam studi kepustakaan atau studi literatur, selain mencari sumber data sekunder yang akan mendukung penelitian, juga diperlukan konsep pendukung untuk mengetahui sampai ke mana konsep yang berhubungan dengan penelitian telah berkembang, sehingga diperoleh kesimpulan dan generalisasi yang disesuaikan dengan tujuan penelitian. Hal ini diperoleh dari rujukan yang sudah dikaji oleh Carter dan Lusztig (1974) mengenai modul Weyl.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Terdapat tiga kegiatan utama yang telah dilakukan oleh peneliti, yaitu sebagai berikut. Mendefinisikan Modul Weyl, mengidentifikasi "jembatan penghubung" kemiripan antara Modul Specht dan Modul Weyl, dan mengidentifikasi sifat-sifat Modul Weyl yang mirip dengan Modul Specht.

Berikut adalah penjelasan dari masing-masing kegiatan yang telah dilakukan oleh peneliti.

1) Modul Weyl

p-ISSN: 2654-6140, e-ISSN: 2656-4181
http://ejurnal.budiutomomalang.ac.id/index.php/prismatika

a) Pengenalan Modul Specht

Pembahasan mengenai Modul Specht yang menggunakan lapangan (*field*) himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ sebelumnya telah dilakukan oleh peneliti. Namun dalam penelitian kali ini, akan digunakan sebarang lapangan (*field*) F. Hal ini dilakukan sebagai pendekatan baru dalam teori representasi dari S_n dengan tidak lagi menggunakan teori karakter. Permasalahan pertama yang muncul adalah mengkonstruksi S_n −modul yang mempunyai definisi yang sama untuk sebarang lapangan (*field*). Nyatanya, modul permutasi yang memenuhi sifat yang diinginkan tersebut.

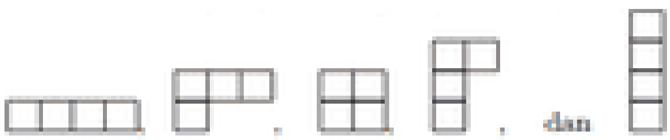
Modul Specht yang akan dilihat bersumber kepada representasi tak tereduksi yang biasa dari S_n dengan melihat modul permutasi dari S_n pada subgrup-subgrup Young, yakni dari hasil pengamatan tablo Young. Modul Specht itu sendiri merupakan submodule dari modul permutasi yang bersesuaian dengan suatu partisi α dari n. Submodule yang dimaksudkan merupakan suatu generalisasi dari representasi tak tereduksi yang biasa yang muncul dari suatu partisi α.

Definisi 1. Suatu partisi α dari bilangan bulat positif n adalah suatu barisan dari bilangan-bilangan bulat positif $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ yang memenuhi $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_l$ dan $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l = n$.

Definisi 2. Misalkan α adalah suatu partisi dari n. Diagram Young dari α adalah koleksi berhingga dari kotak-kotak yang disusun dalam baris-baris yang rata kiri dengan banyaknya kotak dari baris teratas ke baris terbawah menurun dengan catatan banyak kotak di dua baris yang berurutan boleh sama banyak.

Berdasarkan Definisi 2, diagram Young yang berkorespondensi dengan suatu partisi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ mempunyai l baris dan α_i kotak pada baris ke-i.

Contoh 1. Diagram Young yang berkorespondensi dengan partisi bilangan 4, secara berturut-turut berkorespondensi dengan partisi $(4), (3\ 1), (2\ 2), (2\ 1\ 1)$, dan $(1\ 1\ 1\ 1)$ adalah:



Definisi 3. Misalkan α adalah suatu partisi dari n. Suatu tablo Young t dari α diperoleh dengan mengisi tiap kotak pada diagram Young dari α dengan bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, n$ dimana setiap bilangan diisikan tepat satu kali. Bilangan-bilangan $1, 2, \ldots, n$ disebut sebagai entri tablo. Tablo Young t yang berkorespondensi dengan partisi α ditulis sebagai α −tablo.

Definisi 4. Misalkan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ adalah partisi dari n. Dua α −tablo s dan t dikatakan ekivalen baris, dinotasikan sebagai $s \sim t$, jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, himpunan entri pada baris ke-i dari s dan t adalah sama.

Definisi 5. Suatu α −tabloid adalah suatu kelas ekivalen baris dari $t: \alpha -$ tablo yang dinotasikan sebagai $\{t\}$, yaitu $\{t_1 | t_1 \sim t\}$.

Definisi 6. Misalkan F adalah sebarang lapangan (*field*) dan perhatikan suatu ruang vektor M^α atas F yang dibangun oleh α −tabloid. Misalkan pula grup S_n beraksi pada himpunan dari α −tabloid yang didefinisikan sebagai $\pi\{t\} \coloneqq \{\pi t\}$, untuk $\pi \in S_n$. Maka dapat dibuktikan bahwa aksi tersebut terdefinisi dengan baik. Jika aksi tersebut diperluas menjadi F −linier maka M^α (modul permutasi) merupakan FS_n −modul.

Definisi 7. Suatu α −politabloid adalah suatu anggota dari M^α yang berbentuk $e_t \coloneqq \mathcal{V}^t\{t\}$ dengan $\mathcal{V}^t$ adalah jumlahan kolom bertanda untuk α −tablo t dengan tanda didasarkan kepada jenis permutasi (permutasi genap atau ganjil) dari sikel-sikel yang menyusun grup kolom dari masing-masing tablo t.

Definisi 8. Modul Specht S^α adalah submodul dari M^α yang dibangun oleh semua α −politabloid e_t dimana t diambil atas semua α −tablo.

b) Definisi Modul Weyl

Definisi 9. Aksi grup himpunan semua matriks nonsingular berukuran $m \times m$ atas lapangan (*field*) F pada himpunan $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ didefinisikan sebagai $(g_{ij})w_i \coloneqq \sum_j g_{ji} w_j$. Himpunan $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ merupakan basis dari $W^{(1)}$ yang merupakan suatu ruang vektor atas F berdimensi m.

Selanjutnya kita mengambil n −fold hasil kali tensor $W^{(1)} \otimes \ldots \otimes W^{(1)}$ yang kemudian dinotasikan sebagai $L^{(n)}$.Ruang vektor $L^{(n)}$ mempunyai basis berupa semua unsur yang berbentuk $w_{i_1} \otimes \dots \otimes w_{i_m}$ dengan $1 \leq i_j \leq m$. Ruang vektor $L^{(n)}$ kita katakan sebagai ruang tensor.

Definisi 10. Misalkan α suatu partisi dari n dan $L^{\alpha} := \mathcal{V}^{\alpha} L^{(n)}$. Berikut adalah dua definisi Modul Weyl W^{α} yang bergantung kepada karakter lapangannya. Jika $char\ F = 2$, maka didefinisikan

$$W^{\alpha} := \{w | w \in L^{(n)} \text{ dan } sw = 0 \text{ untuk semua } s \in FS_n \text{ sehingga } s\mathcal{V}^{\alpha} w^{\alpha} = 0\} \cap L^{\alpha}$$

Namun untuk kasus lainnya, Modul Weyl W^{α} didefinisikan sebagai

$$W^{\alpha} := \{w | w \in L^{(n)} \text{ dan } sw = 0 \text{ untuk semua } s \in FS_n \text{ sehingga } s\mathcal{V}^{\alpha} w^{\alpha} = 0\}$$

2) "Jembatan Penghubung" Kemiripan Antara Modul Specht dengan Modul Weyl

"Jembatan penghubung" yang menyebabkan kemiripan beberapa sifat antara Modul Specht dengan Modul Weyl adalah Salinan/*copy* $FS_n \mathcal{V}^{\alpha} w^{\alpha}$ dari Modul Specht S^{α} yang berada di dalam $L^{(n)}$. Hal ini merupakan pendekatan yang dilakukan Carter dan Lusztig yang mempelajari Modul Specht dan Modul Weyl sebagai subruang dari ruang tensor $L^{(n)}$.

Suatu teoremamenyatakan bahwa himpunan $\mathcal{V}^{\alpha} w^{\alpha}$ membangun W^{α} sebagai $\overline{U_F}$ −modul dengan $\overline{U_F}$ merupakan suatu aljabar atas F (James dan Kerber, 1981). Selain itu, himpunan $\mathcal{V}^{\alpha} w^{\alpha}$ juga membangun S^{α} sebagai FS_n −modul. Dengan memandang Modul Specht S^{α} sebagai FS_n −modul yang dibangun oleh $\mathcal{V}^{\alpha} w^{\alpha}$, maka modul permutasi M^{α} yang bersesuaian didefinisikan sebagai:

$$M^{\alpha} := \left\{ w \middle| w \in L^{(n)} \text{ dan } \binom{h_i - \alpha_i}{c} w = 0 \text{ untuk semua } i \text{ dan } c \geq 1 \right\}$$

Di sini $\binom{h_i - \alpha_i}{c}$ merupakan anggota dari $\overline{U_F}$. Dan telah terbukti bahwa :

$$S^{\alpha} := M^{\alpha} \cap \left\{ w \middle| w \in L^{(n)} \text{ dan } \frac{e_{i,i+1}^{a}}{a!} w = 0 \text{ untuk setiap } i \text{ dan } a \text{ dengan } 0 < a \leq \alpha_{i+1} \right\}$$

dengan $e^{\alpha}_{i,i+1}$ adalah unsur idempotent yang muncul dari tablo standar t^{α}_{i}, yakni tablo standar ke-i (James dan Kerber, 1981).

3) Rangkuman Kemiripan Sifat Antara Modul Specht dengan Modul Weyl

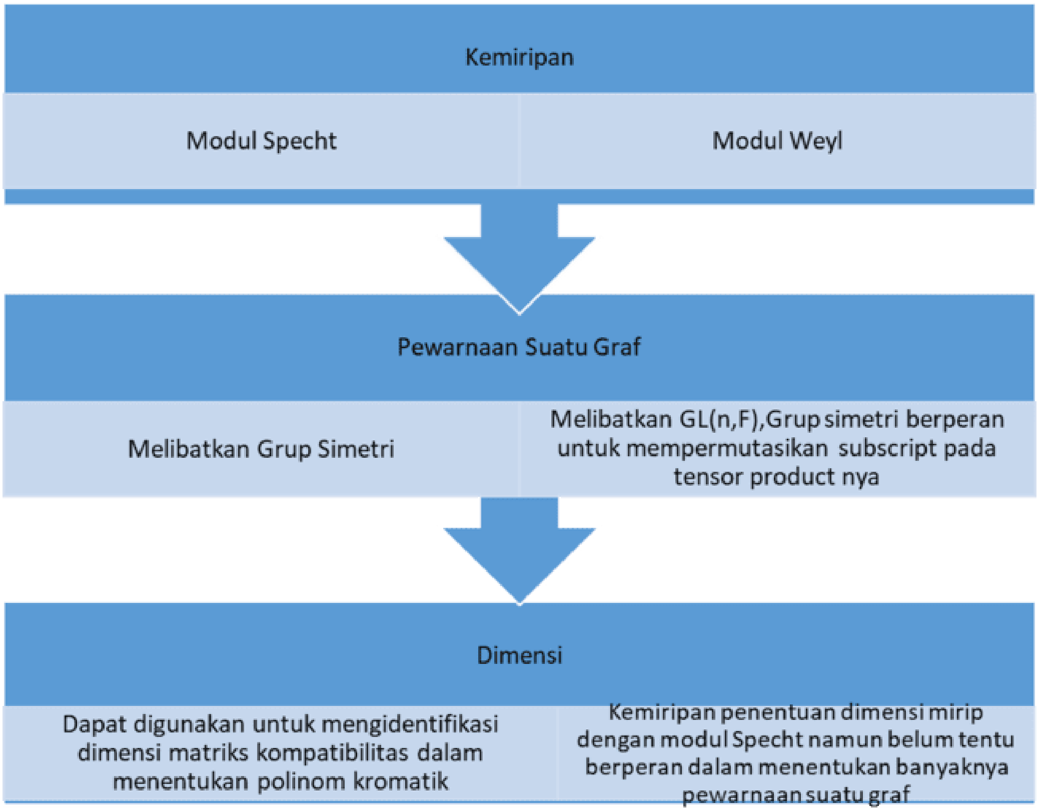
Tabel berikut menyajikan lima kemiripan antara Modul Specht dengan Modul Weyl yang sengaja hanya diambil lima diantara 10 sifat karena untuk kepentingan pembahasan selanjutnya.

Tabel 1. Beberapa Kemiripan Sifat Modul Specht dan Modul Weyl

No.	Modul Specht	Modul Weyl
1.	Himpunan $\mathcal{V}^{\alpha}w^{\alpha}$ membangun Modul Specht S^{α} sebagai FS_n −modul	Himpunan $\mathcal{V}^{\alpha}w^{\alpha}$ membangun Modul Weyl W^{α} sebagai $\overline{U_F}$ −modul
2.	Modul permutasi M^{α} adalah himpunan bagian dari $L^{(n)}$ dengan membuang $\left\{\binom{h_i - \alpha_i}{c} \middle\| i \geq 1, c \geq 1\right\}$	Modul permutasi L^{α} adalah himpunan bagian dari $L^{(n)}$ dengan membuang $\{1-(sgn\,\pi)\pi \mid \pi \in \mathcal{V}^{\alpha}\}$ (jika $char\ F \neq 2$)
3.	Modul Specht S^{α} merupakan himpunan bagian dari $L^{(n)}$ dengan membuang $u \in \overline{U_F}$ yang menghilangkan $\mathcal{V}^{\alpha}w^{\alpha}$	Modul Weyl W^{α} merupakan himpunan bagian dari $L^{(n)}$ dengan membuang $s \in FS_n$ yang menghilangkan $\mathcal{V}^{\alpha}w^{\alpha}$ (kecuali jika $char\ F = 2$)
4.	$S^{\alpha} :=$ $M^{\alpha} \cap \left\{ w \middle\| \begin{array}{c} w \in L^{(n)} \text{ dan } w \text{ dihilang} \\ \text{oleh } \frac{e^{\alpha}_{i,i+1}}{a!} \\ \text{untuk setiap } i \text{ dan } c \\ \text{dengan } 0 < a \leq \alpha_{i+} \\ \text{dan } i \geq 1 \end{array} \right\}$ dengan $e^{\alpha}_{i,i+1}$ adalah unsur idempotent yang muncul dari tablo standar t^{α}_{i}, yakni tablo standar ke-i	$W^{\alpha} :=$ $L^{\alpha} \cap \left\{ w \middle\| \begin{array}{c} w \in L^{(n)} \text{ dan } w \\ \text{dihilangkan oleh unsur} - \\ \text{unsur Garnir untuk} \\ \alpha - \text{tablo standar} \\ \text{yang pertama} \end{array} \right\}$ Catatan: Unsur Garnir $G_{X,Y}$ adalah jumlahan bertanda dari perwakilan koset yang didapatkan dari permutasi entri-entri tablo yang berada

		pada himpunan $X \cup Y$
5.	Dimensi dari Modul Specht S^{α} adalah banyaknya α −tablo standar	Dimensi dari Modul Weyl W^{α} adalah banyaknya α −tablo semistandar

4) Identifikasi penggunaan sifat modul Weyl sebagai representasi grup simetri dari n warna.



Gambar 1. Bagan Identifikasi Kemiripan Sifat

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian, terdapat dua hal yang dapat ditarik sebagai kesimpulan, yaitu:

1) Terdapat lima kemiripan dalam penurunan sifat Modul Specht dan Modul Weyl,

2) Kemiripan penentuan dimensi Modul Weyl yang mirip dengan penentuan dimensi modul Specht namun belum tentu berperan dalam menentukan banyaknya pewarnaan suatu graf.

Berdasarakan kesimpulan tersebut, diberikan saran berikut. Meskipun Modul Weyl dikatakan mirip dengan Modul Specht yang dapat digunakan dalam menentukan banyaknya pewarnaan suatu graf, namun hal tersebut tidak serta merta berlaku kepada Modul Weyl dikarenakan grup yang dikenai aksi adalah berbeda. Kata "mirip" sebagai penghubung dua benda bisa membuat pembaca terbuai untuk memutuskan suatu hal. Kata "mirip" barangkali dapat ditelusuri lebih lanjut dalam penelitian-penelitian selanjutnya terkait dengan benda atau cara penurunan sifat-sifat pada kedua benda tersebut. Jika tidak demikian, maka bisa jadi kedua benda tersebut sebenarnya "berwujud" berbeda.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LP2M) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah men-support penelitian ini lewat pendanaan penelitian untuk kluster pembinaan kapasitas.

DAFTAR RUJUKAN

Biggs, N. (2004). *Specht Modules and Chromatic Polynomials*, Journal of Combinatorial Theory Series B, 92, 359 – 377.

Carter, R. W dan Lusztig, G. (1974). *On the Modular Representations of the General Linear and Symmetric Groups*, Math. Z. 136, 193 - 242.

Fouts, C. (2009). *The Chromatic Polynomial*, Senior Project Archive, Whitman College Department of Mathematics.

W. Fulton, W dan Harris, J. (1991). *Representation Theory : A First Course*, SpringerVerlag, New York.

Hubai, T. (2009). *The Chromatic Polynomial*, Master Thesis, Eotvos Lorand University, Faculty of Science.

Isaacs, I. M. (1993). *Algebra : A Graduate Course*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacic Grove, California.

Jacob, B. (1990). *Linear Algebra*, W. H. Freeman and Company, New York.

James, G dan Kerber, A. (1981). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications: The Representation Theory of the Symmetric Group*, Volume 16, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

James, G dan Liebeck, M. (2001). *Representations and Characters of Groups Second Edition*, Cambridge University Press, New York.

Mcnamara, R. (2013). *Irreducible Representations of the Symmetric Group*, Research Experience for Undergraduates 2013 Participant Paper-Apprentice Program, Universityof Chicago, United States.

Muchtadi, I. (2012). *Diktat Kuliah Pengantar Teori Representasi*, ITB, Bandung.

Nisfulaila, I. (2014). *Representasi Grup Simetri Via Tablo Young dan Analisa Penggunaannya dalam Menentukan Polinom Kromatik Graf Gelang* (*Bracelet Graph*), Tesis Tidak Diterbitkan, ITB, Bandung.

Reinfeld, P. A. (2003). *Algebraic Methods for Chromatic Polynomials*, Ph.D Thesis. The London School of Economics and political Sciences.

Rislow, M. (2011). *Irreducible Representations of The Symmetric Group*, Senior Seminar Proposal, University of Minnesota, Morris.

Sagan, B. E. (2001). *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithm, and Symmetric Functions,* Second Edition, Springer-Verlag, New York.

Wildon, M. (2011). *Notes and Problem Sheets for A Postgraduate Course on the Representation Theory of the Symmetric Group*, Royal Holloway University of London, United Kingdom.

Zhao, Y. (2008). *Young Tableaux and Representations of Symmetric Group*, The Harvard College Mathematics Review (2), 33 - 45.