

**LAPORAN PENELITIAN
TAHUN ANGGARAN 2023**

**ANALISIS KESTABILAN GLOBAL MODEL EPIDEMI *SUSCEPTIBLE-EXPOSED-
INFECTED HOSPITALIZED-CRITICAL-RECOVERED-DEAD* (SEIHCRD)
PADA KASUS COVID-19 INDONESIA**

Nomor DIPA	DIPA BLU-DIPA 025.04.2.423812/2023
Tanggal	7 November 2022
Satker	(4238120) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Kode Kegiatan	(2132) Peningkatan Akses, Mutu, Relevansi dan Daya Saing Pendidikan Tinggi Keagamaan Islam
Kode Output Kegiatan	(050) PTKIN Penerima BOPTN
Sub Output Kegiatan	(514) Penelitian (BOPTN)
Kode Komponen	(004) Dukungan Operasional Penyelenggaraan Pendidikan
Kode Sub Komponen	Penelitian Dasar Pengembangan Program Studi

Oleh:

Juhari, M.Si (NIP. 19840209201608011055)



**KEMENTERIAN AGAMA
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT (LP2M)
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**

2023

HALAMAN PERSETUJUAN

Laporan penelitian dengan judul “Analisis Kestabilan Global Model Epidemi Susceptible-Exposed-Infected Hospitalized-Critical-Recovered-Dead (Seihcrd) Pada Kasus Covid-19 Indonesia”

Oleh:

Juhari, M.Si (NIP. 19840209201608011055)

Telah diperiksa dan disetujui *reviewer* dan komite penilai pada tanggal
14 November 2023

Malang, 14 November 2023

Reviewer 1,



Ahmad Lubab, M.Si.

Reviewer 2,

Moch. Irfan Hadi

Komite Penilai,

Dr. H. Syaiful Mustofa, M.Pd.

HALAMAN PENGESAHAN

Laporan Penelitian ini disahkan oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Pada tanggal 14 November 2023

Peneliti

Ketua : Nama : Juhari, M.Si
NIP : 19840209201608011055

Tanda Tangan

Anggota : Nama : Tamim Mulloh, M.Pd
NIP : 19830426201802011172

Tanda Tangan

Ketua LP2M
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Prof. Dr. H. Agus Maimun, M.Pd.
NIP. 19650817 199803 1 003

PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Juhari, M.Si
NIP : 19840209201608011055
Pangkat /Gol.Ruang : Penata Muda Tk.1/III-b
Fakultas/Program Studi : SAINTEK/Matematika
Jabatan dalam Penelitian : Ketua Peneliti

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa dalam penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis disebutkan dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila dikemudian hari ternyata dalam penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan dan pelanggaran etika akademik, maka kami bersedia mengembalikan dana penelitian yang telah kami terima dan diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Malang, 14 November 2023
Ketua Peneliti,

(Juhari, M.Si)
NIP. 19840209201608011055

ABSTRACT

This study discusses the dynamic analysis of the Susceptible–Exposed–Infected–Hospitalized–Critical–Recovered–Dead (SEIHCRD) model using the fourth order Runge-Kutta method. The data used in this study is original data on Infected, Hospitalized and Critical cases in Indonesia from August to October 2021. Dynamic analysis of the model is carried out by determining disease-free and endemic equilibrium points, local stability analysis of disease-free and endemic equilibrium points, and determine the basic reproduction number. The result of this analysis is that the number of new infection cases in Indonesia will decrease over time and the COVID-19 outbreak will end. Then a numerical simulation was carried out using the fourth order Runge-Kutta method in dealing with COVID-19 cases in Indonesia. The simulations and calculations show that the rate of contact of susceptible individuals with infected individuals is 0.06 per day, the rate of movement of individuals in the Exposed class to the Infected class is 0.14 per day, the probability of infected individuals being hospitalized with a value of 0.95, the probability that COVID-19 patients become critical and enter the Intensive Care Unit (ICU) with a value of 0.485, and the probability of a critical patient dying with a value of 0.25 affects the slope of Infected, Hospitalized and Critical cases in Indonesia. Where Infected cases will be sloping with an absolute error value of 28%, Hospitalized cases with an absolute error value of 20% and Critical cases with an absolute error value of 33%. This research provides information that it is estimated that the daily infection cases of COVID-19 will decrease and be close to zero. So that infected patients who must be hospitalized and admitted to the Intensive Care Unit (ICU) are also decreasing, it is hoped that the COVID-19 pandemic will not happen again.

Keywords: Dynamic Analysis; Fourth Order Runge-Kutta Method; SEIHCRD Model; COVID-19

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN.....	iv
ABSTRACT	v
DAFTAR ISI.....	vi
DAFTAR SIMBOL	viii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
BAB II KAJIAN TEORI	8
2.1 Teori Pendukung.....	8
2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial	8
2.1.2 Titik Kesetimbangan.....	9
2.1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	9
2.1.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0).....	10
2.1.5 Analisis Kestabilan	11
2.1.6 Kriteria Routh-Hurwitz.....	12
2.1.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat.....	14
2.1.8 Model SEIHCRD.....	15
2.3 Kajian Model SEIHCRD Pada COVID-19 dengan Teori Pendukung ..	28
BAB III METODE PENELITIAN	33
3.1 Jenis Penelitian.....	33
3.2 Data dan Sumber Data	33
3.3 Tahapan Penelitian.....	33
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1 Analisis Dinamik Model SEIHCRD.....	35
4.1.1 Identifikasi Nilai Awal dan Parameter yang Digunakan	35
4.1.2 Menentukan Titik Kesetimbangan.....	38
4.1.3 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0).....	43
4.1.4 Menentukan Analisis Kestabilan	45
4.2 Simulasi Numerik Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat ..	54
4.3 Interpretasi Hasil.....	66
4.3.1 Perbandingan Grafik Solusi I , H dan C dengan Grafik Data Asli	66
BAB V PENUTUP.....	70
5.1 Kesimpulan	70
5.2 Saran	71
DAFTAR PUSTAKA	72

LAMPIRAN.....	74
----------------------	-----------

DAFTAR SIMBOL

N	: Banyaknya total penduduk hidup di Indonesia
S	: Banyaknya individu yang rentan terhadap waktu
E	: Banyaknya individu yang terpapar terhadap waktu
I	: Banyaknya individu yang terinfeksi terhadap waktu
H	: Banyaknya individu terinfeksi yang dirawat inap terhadap waktu
C	: Banyaknya pasien terinfeksi yang kritis terhadap waktu
R	: Banyaknya individu terinfeksi yang sembuh terhadap waktu
D	: Banyaknya pasien kritis yang meninggal terhadap waktu
λ	: Laju kelahiran alami
τ	: Laju kematian alami
η	: Faktor <i>social distancing</i>
β	: Laju kontak individu rentan dengan individu terinfeksi
δ	: Laju perpindahan individu di kelas <i>Exposed</i> ke kelas <i>Infected</i>
ψ	: Rata-rata waktu perkembangan gejala COVID-19
α	: Probabilitas individu terinfeksi dirawat inap
γ	: Rata-rata waktu pemulihan pasien COVID-19 hingga sembuh
σ	: Rata-rata waktu dari rawat inap menjadi kritis dan masuk ICU
θ	: Probabilitas pasien COVID-19 menjadi kritis dan masuk ICU
φ	: Rata-rata waktu masuk ICU
ω	: Probabilitas pasien kritis menjadi meninggal
μ	: Rata-rata waktu pemulihan pasien dari kondisi kritis
χ	: Rata-rata waktu rawat inap

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai Awal Model SEIHCRD di Indonesia.....	38
Tabel 4.2	Nilai Parameter Model SEIHCRD di Indonesia	38

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SEIHCRD	17
Gambar 4.1	Grafik <i>Infected</i> pada Model dan Data Asli.....	66
Gambar 4.2	Grafik <i>Hospitalized</i> pada Model dan Data Asli	67
Gambar 4.3	Grafik <i>Critical</i> pada Model dan Data Asli	68

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Hasi Perhitungan Solusi I bulan Agustus-Oktober 2021	75
Lampiran 2	Hasi Perhitungan Solusi H bulan Agustus-Oktober 2021	77
Lampiran 3	Hasi Perhitungan Solusi C bulan Agustus-Oktober 2021	79
Lampiran 4	Hasil Perhitungan Solusi S, E, R, D bulan Agustus-Oktober	81

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejak awal tahun 2019, dunia sedang berjuang bersama melawan COVID-19 yang merupakan virus baru. Virus ini menyebar dengan sangat cepat sehingga mengakibatkan beberapa negara menderita karena kekurangan tempat tidur rawat inap dan tempat tidur ICU (Singh & Bajpai, 2020), salah satunya di Indonesia. Pada bulan Juni 2021 di Indonesia, setiap harinya jumlah pasien COVID-19 yang meninggal tanpa mendapatkan penanganan semakin bertambah. Hal ini disebabkan oleh melonjaknya kasus COVID-19 yang terus bertambah dan ketersediaan tempat tidur rumah sakit yang semakin berkurang. Sehingga untuk mengatasi kondisi tersebut, Menteri Kesehatan meminta pihak-pihak rumah sakit di berbagai daerah untuk menjadikan IGD sebagai tambahan ruang isolasi. Sedangkan layanan-layanan IGD dipindahkan pada tenda-tenda darurat yang didirikan di luar rumah sakit. Namun sayangnya solusi ini belum sepenuhnya mampu mengatasi lonjakan kasus COVID-19, akibatnya beberapa pasien dengan gejala sedang dan berat yang tidak mendapatkan tempat tidur rawat inap terpaksa harus ditempatkan di lorong-lorong rumah sakit, sedangkan beberapa pasien lainnya meninggal karena tidak mendapatkan penanganan.

Oleh karena itu dibutuhkan model matematika yang dapat membantu pemerintah dalam memahami skenario penyebaran COVID-19 di Indonesia dan mengetahui berapa banyak kebutuhan tempat tidur rawat inap dan tempat tidur ICU pada waktu tertentu. Dalam kasus ini, model matematika yang dapat diterapkan di Indonesia adalah model SEIHCRD.

Model SEIHCRD adalah modifikasi dari model *Susceptible-Exposed-Infected-Recovered* (SEIR) (Singh & Bajpai, 2020). Pada model ini ditambahkan beberapa kompartemen tambahan, antara lain: *Hospitalized* (H), *Critical* (C), dan *Dead* (D). Dimana *Hospitalized* (H) sendiri merupakan individu yang terinfeksi COVID-19 dengan gejala sedang dan berat atau yang memiliki penyakit bawaan maupun berusia lanjut yang dirawat di rumah sakit. Kemudian *Critical* (C) merupakan pasien COVID-19 yang dirawat di rumah sakit dan kemudian berada dalam kondisi kritis, sehingga berisiko tinggi mengalami komplikasi dan membutuhkan penanganan di ruang ICU. Sedangkan *Dead* (D) adalah pasien COVID-19 yang kritis dan sudah mendapatkan penanganan di ruang ICU, namun akhirnya meninggal. Adapun setiap kompartemen dalam model memiliki hubungan satu sama lain, yaitu individu rentan di kelas *Susceptible* (S) mengalami kontak dengan individu terinfeksi dengan laju sebesar β dan tidak menjaga jarak dengan laju sebesar η sehingga individu rentan ini berubah menjadi terpapar dan masuk ke kelas *Exposed* (E). Selanjutnya individu yang sudah terpapar akan berubah menjadi terinfeksi dengan laju perpindahan sebesar δ dan masuk ke kelas *Infected* (I). Kemudian individu terinfeksi akan mengalami perkembangan gejala COVID-19 dengan rata-rata waktu sebesar ψ , dimana jika gejala yang dialami berupa sedang atau berat maka individu terinfeksi tersebut akan masuk ke kelas *Hospitalized* (H). Sedangkan individu terinfeksi dengan gejala ringan akan melakukan isolasi mandiri hingga sembuh dengan rata-rata waktu pemulihan sebesar γ dan masuk ke kelas *Recovered* (R).

Berikutnya pasien COVID-19 di kelas *Hospitalized* (H), akan sembuh dan masuk ke kelas *Recovered* (R) setelah dirawat di rumah sakit dengan rata-rata

waktu rawat inap sebesar χ . Kemudian pasien COVID-19 di kelas *Hospitalized* (H) juga dapat mengalami kondisi kritis dengan probabilitas sebesar θ dan masuk ke kelas *Critical* (C). Dimana pasien kritis di kelas *Critical* (C) ini akan sembuh dan masuk ke kelas *Recovered* (R) dengan rata-rata waktu pemulihan dari kondisi kritis sebesar μ , pasien kritis juga dapat meninggal serta masuk ke kelas *Dead* (D) dengan probabilitas sebesar ω dan rata-rata waktu masuk ICU sebesar φ .

Pada tahun 2020, (Singh & Bajpai, 2020) melakukan suatu analisis model SEIHCRD menggunakan metode *Least-Square* dan *Levenberg Marquadt* dalam menentukan skenario penyebaran COVID-19. Dimana penelitian tersebut mempertimbangkan adanya Case Fatality Rate berdasarkan kategori usia dan komorbiditas yang akan berpengaruh pada skenario penyebaran. Di tahun berikutnya (Mbogo & Orwa, 2021) melakukan suatu analisis dinamik pada model SEIHCRD dalam populasi Kenya. Analisis tersebut dilakukan untuk mengetahui bagaimana sensitivitas analisis bilangan reproduksi dasar terhadap parameter jaga jarak dan pengujian massal, dengan mempertimbangkan adanya migrasi pada populasi yang dikaji. Kemudian, pada tahun berikutnya (Qur'ani, 2022) juga melakukan analisis dinamik model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia. Dimana penelitian tersebut bertujuan untuk mengetahui analisis sensitivitas parameter jaga jarak dan pengujian massal terhadap bilangan reproduksi dasar. Adapun alur penyebaran infeksi pada model tersebut antara lain, individu rentan di kelas *Susceptible* akan terpapar dan masuk ke kelas *Exposed*. Kemudian individu yang terpapar akan terinfeksi dan masuk ke kelas *Infectious* atau *Hospitalized*. Selanjutnya individu di kelas *Infectious* dan *Hospitalized* memiliki kemungkinan sembuh dan meninggal. Dimana individu di kelas

Hospitalized juga dapat mengalami kondisi kritis dan masuk ke kelas *Critical*. Kemudian yang terakhir, individu di kelas *Critical* ini akan meninggal dan masuk ke kelas *Dead*.

Berbeda halnya dengan penelitian-penelitian tersebut, pada penelitian ini model SEIHCRD yang diusulkan akan dimodifikasi dengan menambahkan parameter laju kelahiran alami dan laju kematian alami yang kemudian akan dianalisis menggunakan analisis dinamik. Setelah itu model akan didekati melalui suatu metode numerik yaitu metode Runge-Kutta orde empat untuk menampilkan hasil perhitungan numerik beserta simulasinya. Adapun data yang digunakan pada penelitian ini merupakan data asli di Indonesia dari kasus *Infected*, *Hospitalized*, *Critical*, *Recovered* dan *Dead* pada bulan Agustus hingga Oktober yang bersumber dari website kemenkes dan SATGAS COVID-19 Indonesia. Sedangkan untuk data asli dari kasus *Susceptible* dan *Exposed* tidak tersedia di Indonesia. Kemudian data ini nantinya akan digunakan untuk mengetahui apakah grafik solusi dari model dapat mendekati grafik solusi dari data asli. Sehingga berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, penulis ingin menerapkan model SEIHCRD dalam menyelesaikan skenario penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang didapatkan berdasarkan uraian latar belakang di atas adalah:

1. Bagaimana analisis dinamik dari model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia?

2. Bagaimana simulasi numerik dari model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat?
3. Bagaimana interpretasi hasil dari model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini berdasarkan rumusan masalah di atas adalah:

1. Untuk menjelaskan bagaimana analisis dinamik dari model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia.
2. Untuk menjelaskan hasil simulasi numerik dari model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
3. Untuk menjelaskan hasil interpretasi dari model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 di Indonesia.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang akan didapatkan dari penelitian ini berdasarkan tujuan di atas adalah:

1. Memberikan informasi terkait faktor yang paling berpengaruh terhadap penyebaran COVID-19.
2. Memberikan perkiraan kebutuhan tempat tidur rawat inap dan tempat tidur ICU yang harus disediakan pada waktu tertentu.

3. Memberikan pertimbangan bagi pemangku kebijakan dalam menentukan strategi terkait pencegahan dan pengendalian COVID-19 di Indonesia.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang ada pada penelitian ini yaitu:

1. Model matematika yang digunakan pada penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian (Singh & Bajpai, 2020) dengan menambahkan laju kelahiran alami dan laju kematian alami.
2. Model SEIHCRD yang merupakan hasil modifikasi dari penelitian (Singh & Bajpai, 2020) pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \xi N(t) - \frac{\eta \beta I(t) S(t)}{N(t)} - \tau S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\eta \beta I(t) S(t)}{N(t)} - \delta E(t) - \tau E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \psi \alpha I(t) - \gamma I(t) + \alpha \gamma I(t) - \tau I(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \psi \alpha I(t) - \sigma \theta H(t) - \chi H(t) + \chi \theta H(t) - \tau H(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \sigma \theta H(t) - \varphi \omega C(t) - \mu C(t) + \mu \omega C(t) - \tau C(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \alpha \gamma I(t) + \mu C(t) - \mu \omega C + \chi H(t) - \chi \theta H(t) - \tau R(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \varphi \omega C(t)$$

3. *Hospitalized* (H) merupakan pasien COVID-19 dengan gejala sedang dan berat, atau yang memiliki penyakit bawaan maupun berusia lanjut yang dirawat inap di rumah sakit. Dimana gejala sedang pada pasien COVID-19 antara lain: batuk, demam, sesak napas, berkurangnya nafsu makan, lemas

dan letih. Sedangkan gejala berat pada pasien COVID-19 antara lain: kesulitan bernapas, merasakan nyeri atau tidak nyaman di dada, bibir, kuku dan kulit tampak pucat dan kebiruan, kesulitan berkonsentrasi, kesulitan makan dan minum serta membutuhkan bantuan oksigen (saturasi oksigen < 93).

4. *Critical* (C) merupakan pasien COVID-19 yang dirawat di rumah sakit dan kemudian berada dalam kondisi kritis seperti: koma, sangat lemas, tidak dapat bernapas sama sekali, tekanan darah menurun secara drastis dan kejang yang berisiko tinggi mengalami komplikasi seperti henti jantung atau gagal napas. Sehingga jika tidak segera mendapatkan penanganan, kondisi tersebut dapat menyebabkan kematian. Oleh karena itu dibutuhkan penanganan dan perawatan di ruang ICU sampai kondisi pasien membaik. Umumnya pasien kritis juga membutuhkan alat bantu pernapasan menggunakan mesin ventilator.
5. *Dead* (D) adalah pasien COVID-19 yang kritis dan sudah mendapatkan penanganan di ruang ICU, namun akhirnya meninggal. Dimana jenazah dari pasien tersebut harus dimandikan dan dimakamkan sesuai dengan prosedur COVID-19 agar virus pada jenazah tidak menyebar.

BAB II KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah gabungan dari beberapa persamaan diferensial. Dimana suatu persamaan disebut sebagai persamaan diferensial apabila terdapat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebasnya. Secara umum persamaan diferensial terbagi menjadi dua bagian, antara lain:

1. Persamaan diferensial biasa

Suatu persamaan diferensial disebut biasa ketika persamaan tersebut hanya memiliki satu variabel bebas. Contohnya:

$$\frac{dy}{dt} = \cos t \quad (2.1)$$

Dengan t adalah variabel bebas, dan y adalah variabel tak bebas.

2. Persamaan diferensial parsial

Suatu persamaan diferensial disebut parsial ketika persamaan tersebut memiliki dua atau lebih variabel yang bebas.

Beberapa persamaan diferensial biasa dapat membentuk sistem persamaan diferensial biasa. Berikut ini adalah contoh sistem persamaan diferensial biasa dengan tiga persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

2.1.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan adalah titik yang bernilai tetap dan tidak dipengaruhi oleh waktu. Sehingga, ketika $t = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ nilai titik keseimbangan tetap atau tidak berubah.

Definisi 2.1

Misalkan,

$$\dot{x} = f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah titik keseimbangan pada sistem persamaan (2.3) jika $f(\bar{x}) = 0$ (Perko, 2001). Jadi jika \bar{x} disubstitusikan ke dalam f bernilai nol, maka \bar{x} merupakan titik keseimbangan.

2.1.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2 (Andari, 2017)

Misalkan $A_{n \times n}$ dan $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Jika $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, maka λ disebut nilai eigen dari A dan \bar{x} disebut vektor eigen terkait dengan λ . Dari persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, maka diperoleh:

$$\Leftrightarrow A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, maka paling tidak ada satu solusi tak nol dari persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$. Persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = 0$ mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$ atau $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan

$\det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks A dan merupakan polinomial derajat n , sehingga mempunyai sebanyak n nilai λ .

2.1.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya infeksi baru yang dihasilkan oleh setiap individu terinfeksi dalam suatu populasi. Sehingga jika nilai R_0 tinggi, maka tingkat penyebaran penyakitnya akan semakin cepat. Sebaliknya, jika nilai R_0 kecil maka tingkat penyebaran penyakitnya akan semakin lambat. Menurut (Giesecke, 2002) terdapat tiga nilai R_0 , yaitu:

1. $R_0 < 1$ berarti jumlah kasus baru berkurang dari waktu ke waktu sehingga dengan sendirinya wabah penyakit akan berakhir.
2. $R_0 = 1$ berarti kasus stabil atau konstan.
3. $R_0 > 1$ berarti wabah penyakit tersebut adalah endemik dan akan berkelanjutan jika tidak menerapkan pengendalian yang sesuai dan efektif.

Bilangan reproduksi dasar dapat dicari menggunakan matriks *Next-Generation* yang sudah dikonstruksi dari populasi individu terpapar atau terinfeksi. Jika pada suatu kompartemen terdapat individu-individu yang terinfeksi, maka kompartemen tersebut adalah kompartemen penyakit. Misalkan terdapat sebanyak n populasi terinfeksi dan m populasi yang tidak terinfeksi, kemudian misalkan x adalah populasi terinfeksi dan y adalah populasi sehat, maka $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$, dan $m, n \in \mathbb{R}^n$. Sehingga,

$$\dot{x}_i = F_i(x, y) - V_i(x, y) \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

$$\dot{y}_j = g_j(x, y) \quad \text{untuk } j = 1, 2, 3, \dots, m \quad y \in \mathbb{R}^m$$

dengan F_i merupakan laju bertambahnya jumlah individu terinfeksi dan V_i merupakan laju berkurangnya jumlah individu terinfeksi.

Perhitungan dari bilangan reproduksi dasar R_0 didapatkan dari linierisasi pada subsistem terinfeksi yang didekati menggunakan titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0). Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah kondisi ketika populasi terinfeksi bernilai nol. Berikut merupakan persamaan dari populasi terinfeksi yang sudah dilinierisasi:

$$\dot{x}_i = (F - V)x \quad (2.5)$$

Dimana F dan V adalah matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai:

$$F = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} E_0 \right] \text{ dan } V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j} E_0 \right] \quad (2.6)$$

Selanjutnya matriks K didefinisikan sebagai berikut:

$$K = FV^{-1} \quad (2.7)$$

Dimana matriks K disebut juga sebagai matriks *Next-Generation*. Selanjutnya, nilai bilangan reproduksi dasar dari populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks K (Driesse & Watmough, 2002) sehingga,

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}) \quad (2.8)$$

2.1.5 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan digunakan untuk mencari kestabilan titik kesetimbangan dari suatu sistem. Analisis ini dapat dilakukan dengan cara melinierisasi titik kesetimbangan dengan menggunakan deret Taylor. Sehingga didapatkan matriks jacobian yang kemudian akan dicari nilai eigennya, apabila semua bagian riil nilai eigen yang didapatkan negatif maka titik kesetimbangan stabil. Sedangkan jika

ada satu saja nilai eigen yang memiliki bagian riil positif, maka titik kesetimbangan tidak stabil. Selain itu dalam analisis kestabilan lokal, titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dikatakan stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Kemudian, titik kesetimbangan endemik dikatakan stabil jika $R_0 > 1$, dan tidak stabil jika $R_0 < 1$.

2.1.6 Kriteria Routh-Hurwitz

Definisi 2.2 (Sofiah, 2013)

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah kriteria yang dapat digunakan untuk mengetahui berapa jumlah kutub-kutub pada loop tertutup di daerah tidak stabil, tanpa perlu menyelesaikan persamaan karakteristik pada sistem yang ada. Sehingga, kriteria ini dapat menentukan stabil atau tidaknya suatu sistem. Pada sistem dengan orde yang tinggi, kestabilan dapat ditentukan dengan suatu persamaan polinomial orde n . Dengan kriteria ini, kestabilan mutlak dapat diperoleh secara langsung. Misalkan fungsi alih *loop* tertutup dari suatu sistem adalah:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.9)$$

Untuk menentukan bagaimana kestabilan dari persamaan (2.9) menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, maka:

$$Q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0 \quad (2.10)$$

Berdasarkan persamaan (2.9), jika terdapat koefisien yang bernilai nol atau negatif maka koefisien positif terkecilnya adalah akar atau akar imajiner yang memiliki bagian real positif, sehingga sistem tidak stabil. Perlu diperhatikan

bahwa kestabilan belum bisa didapatkan hanya dengan semua koefisien yang positif. Jadi jika terdapat semua koefisien yang positif, maka:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots
s^2	k_1	k_2			\dots
s^1	l_1				\dots
s^0	m_1				\dots

Dengan

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

dan seterusnya hingga sisanya adalah nol. Begitu pula untuk koefisien-koefisien c , dapat dicari dengan cara:

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

Begitu seterusnya hingga diperoleh sisanya adalah nol. Proses ini akan dilanjutkan sampai baris ke- n secara lengkap dengan susunan yang dihasilkan berbentuk

segitiga. Adapun semua koefisien pada kolom pertama kriteria Routh-Hurwitz mempunyai tanda positif dan tidak ada perubahan tanda.

2.1.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah metode yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Pada metode ini tingkat akurasi yang didapatkan lebih tinggi dan tidak membutuhkan diferensiasi orde yang lebih tinggi lagi. Berikut adalah bentuk dari metode Runge-Kutta orde empat yang melibatkan nilai rata-rata tertimbang dari $f(t, y)$ pada titik yang berbeda dalam interval $t_n \leq t \leq t_{n+1}$:

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right) \quad (2.11)$$

Dimana:

$$k_{n1} = f(t_n, y_n)$$

$$k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right)$$

$$k_{n3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right)$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3})$$

Jumlah $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ dapat diartikan sebagai kemiringan rata-rata. Perhatikan bahwa k_{n1} adalah kemiringan di ujung kiri interval, k_{n2} adalah kemiringan di titik tengah menggunakan rumus Euler untuk berpindah dari t_n menuju $t_n + h/2$, k_{n3} adalah pendekatan kedua untuk kemiringan di titik tengah, dan yang terakhir k_{n4} adalah kemiringan di $t_n + h$ menggunakan rumus Euler dan kemiringan pada k_{n3} untuk berpindah dari t_n menuju $t_n + h$ (Boyce & DiPrima, 2000).

2.1.8 Model SEIHCRD

Model SEIHCRD adalah model yang menjelaskan perpindahan dari orang rentan menjadi terpapar, kemudian dari terpapar menjadi terinfeksi, dari terinfeksi menjadi sembuh atau rawat inap, dari rawat inap menjadi sembuh atau kritis, dan dari kritis menjadi sembuh atau meninggal (Singh & Bajpai, 2020). Pada model ini, kompartemen dibagi menjadi tujuh populasi manusia, yaitu populasi manusia yang rentan (*Susceptible*), populasi manusia yang terpapar (*Exposed*), populasi manusia yang terinfeksi (*Infected*), populasi manusia yang dirawat inap (*Hospitalized*), populasi manusia yang kritis (*Critical*), populasi manusia yang sembuh (*Recovered*), dan populasi manusia yang meninggal (*Dead*). Berikut merupakan model SEIHCRD pada penelitian (Singh & Bajpai, 2020):

$$\frac{dS}{dt} = -\eta \cdot \beta \cdot I \cdot \frac{S}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \eta \cdot \beta \cdot I \cdot \frac{S}{N} - \delta \cdot E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta \cdot E - \psi \cdot \text{prob}(I \rightarrow H) \cdot I - \gamma \cdot (1 - \text{prob}(I \rightarrow H)) \cdot I$$

$$\frac{dH}{dt} = \psi \cdot \text{prob}(I \rightarrow H) \cdot I - \sigma \cdot \text{prob}(H \rightarrow C) \cdot H - \chi(1 - \text{prob}(H \rightarrow C)) \cdot H$$

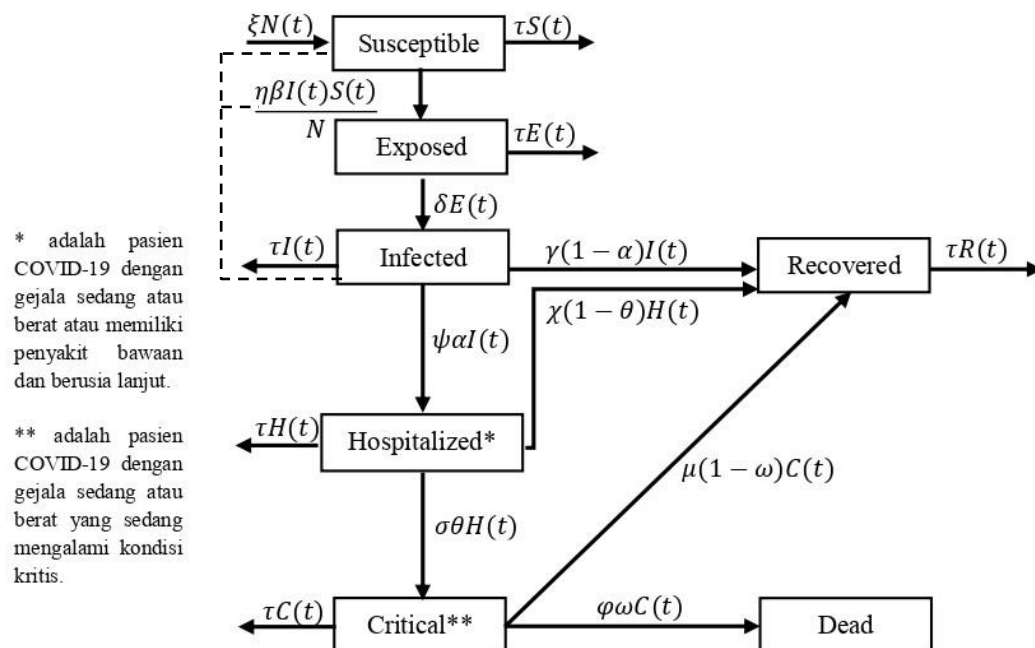
$$\frac{dC}{dt} = \sigma \cdot \text{prob}(H \rightarrow C) \cdot H - \varphi \cdot \text{prob}(C \rightarrow D) \cdot C - \mu(1 - \text{prob}(C \rightarrow D)) \cdot C$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot (1 - \text{prob}(I \rightarrow H)) \cdot I + \mu \cdot (1 - \text{prob}(C \rightarrow D)) \cdot C + \chi(1 - \text{prob}(H \rightarrow C)) \cdot H$$

$$\frac{dD}{dt} = \varphi \cdot \text{prob}(C \rightarrow D) \cdot C$$

Pada model ini alur penyebaran COVID-19 digambarkan melalui struktur yang ringkas. Oleh karenanya, hasil yang diperoleh dapat menjelaskan bagaimana

tren yang terjadi pada wabah tersebut. Berdasarkan faktor-faktor yang mendukung terjadinya suatu infeksi, rata-rata waktu perkembangan gejala COVID-19 yang dirasakan oleh individu juga digambarkan pada model ini. Dimana gejala yang dialami masing-masing individu akan berpengaruh pada isolasi yang akan dijalani oleh individu terinfeksi. Individu terinfeksi dengan gejala ringan akan melakukan isolasi mandiri, sedangkan individu terinfeksi dengan gejala sedang dan berat akan diisolasi dan mendapatkan penanganan di rumah sakit. Selain itu, hasil dari analisis ini menjelaskan bahwa peningkatan perawatan di rumah sakit dapat mengurangi adanya kasus infeksi baru dan kematian pada Brazil, India, Italy, Spain, United Kingdom, dan United States, serta hal ini dapat meningkatkan angka pemulihan pada individu yang terinfeksi.



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model SEIHCRD

Model SEIHCRD pada penelitian ini adalah modifikasi dari model SEIHCRD pada penelitian (Singh & Bajpai, 2020) yang memiliki tujuh kelas

populasi yaitu *Susceptible, Exposed, Infected, Hospitalized, Critical, Recovered* dan *Dead*. Modifikasi ini dilakukan dengan menyesuaikan kondisi sebenarnya di Indonesia dengan menambahkan faktor kelahiran dan kematian alami serta menjelaskan secara detail bagaimana kriteria individu pada kelas *Infected, Hospitalized, dan Critical* di Indonesia. Dimana individu pada kelas *Infected* akan memiliki dua kemungkinan setelah dinyatakan positif COVID-19, yaitu individu yang terinfeksi dengan gejala ringan dan tidak membutuhkan perawatan di rumah sakit akan menjalankan isolasi mandiri sampai kondisinya pulih dan ketika dinyatakan sembuh individu tersebut akan masuk ke kelas *Recovered*. Sedangkan individu yang terinfeksi dengan gejala sedang dan berat atau memiliki penyakit bawaan maupun berusia lanjut akan dirawat inap di rumah sakit dan masuk ke kelas *Hospitalized*. Kemudian individu pada kelas *Hospitalized* juga memiliki dua kemungkinan, yaitu individu atau pasien COVID-19 yang dirawat inap di rumah sakit dan mengalami kondisi kritis akan dipindahkan ke ruang ICU untuk mendapatkan penanganan lebih lanjut dan masuk pada kelas *Critical*. Sedangkan individu atau pasien COVID-19 yang dirawat inap dan berangsur pulih hingga dinyatakan sembuh akan masuk ke kelas *Recovered*. Selanjutnya individu pada kelas *Critical* juga memiliki dua kemungkinan sama seperti pada kelas *Infected* dan *Hospitalized*. Pada kelas *Critical* ini, pasien COVID-19 yang mengalami kondisi kritis akan mendapatkan penanganan di ruang ICU. Jadi jika pasien tersebut dapat diselamatkan dan kondisinya membaik, maka pasien akan pulih dan sembuh sehingga masuk ke kelas *Recovered*. Namun, pasien yang tidak dapat diselamatkan dan meninggal akan masuk ke kelas *Dead*. Diagram kompartemen dari model yang telah dimodifikasi digambarkan pada Gambar 2.1. Adapun

faktor-faktor yang dapat mempengaruhi jumlah individu pada setiap kompartemen akan dijelaskan sebagai berikut.

1. Kompartemen *Susceptible*

Pada kompartemen *Susceptible* (S), terdapat perubahan yang terjadi karena adanya faktor penambahan dan pengurangan jumlah individu. Penambahan pada jumlah individu yang rentan dalam kompartemen *Susceptible* (S) dipengaruhi oleh adanya kelahiran alami dimana semua bayi yang baru lahir rentan terinfeksi. Individu atau bayi yang baru lahir ini akan masuk ke kompartemen *Susceptible* (S) dengan laju sebesar ξ .

Pengurangan jumlah individu pada kompartemen *Susceptible* (S) ini terjadi karena adanya pengaruh perubahan pada individu yang awalnya rentan menjadi terpapar sehingga masuk pada kompartemen *Exposed* (E). Adanya kemungkinan tidak menjaga jarak dengan laju sebesar η pada setiap interaksi dapat berpengaruh terhadap terpaparnya individu yang rentan. Individu yang rentan dapat terpapar karena adanya laju penularan penyakit antara individu rentan dan individu terinfeksi dengan laju sebesar β . Selanjutnya pengurangan jumlah individu juga dipengaruhi oleh adanya kematian alami pada individu rentan yang bukan disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar τ .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan pada kompartemen *Susceptible* (S) terhadap waktu sebagai berikut

$$\frac{dS(t)}{dt} = \xi N(t) - \frac{\eta\beta I(t)S(t)}{N(t)} - \tau S(t) \quad (2.12)$$

2. Kompartemen *Exposed*

Pada kompartemen *Exposed* (E), penambahan pada jumlah individu yang terpapar dipengaruhi oleh adanya kemungkinan tidak menjaga jarak pada setiap

interaksi dengan laju sebesar η . Individu terpapar dapat menjadi individu yang terinfeksi karena adanya laju penularan penyakit antara individu rentan dan terinfeksi dengan laju sebesar β .

Berikutnya, pengurangan jumlah individu pada kompartemen *Exposed* (E) dipengaruhi oleh adanya laju penularan penyakit antara individu terpapar dan terinfeksi dengan laju sebesar δ . Selain itu pengurangan jumlah individu juga disebabkan oleh adanya kematian alami pada individu terpapar yang bukan disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar τ .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan pada kompartemen *Exposed* terhadap waktu, yaitu:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\eta\beta I(t)S(t)}{N(t)} - \delta E(t) - \tau E(t) \quad (2.13)$$

3. Kompartemen *Infected*

Pada kompartemen *Infected* (I), penambahan jumlah individu terinfeksi dipengaruhi oleh masuknya individu yang terpapar dan adanya laju penularan penyakit antara individu terpapar menjadi terinfeksi dengan laju sebesar δ . Selain itu penambahan ini juga dipengaruhi oleh probabilitas individu terinfeksi yang menjalani isolasi mandiri mengalami gejala sedang atau berat sehingga harus dirawat inap dengan laju sebesar α , dan banyaknya individu terinfeksi yang menjalani isolasi mandiri dinyatakan sembuh dengan laju sebesar γ . Individu pada kompartemen *Exposed* yang berpindah ke *Infected* merupakan individu terinfeksi dengan gejala ringan yang tidak dirawat dirumah sakit dan melakukan isolasi mandiri.

Pengurangan jumlah individu pada kompartemen *Infected* dipengaruhi oleh beberapa faktor, yaitu rata-rata perkembangan gejala yang dirasakan individu

terinfeksi dengan laju sebesar ψ , kemudian probabilitas individu terinfeksi yang menjalani isolasi mandiri mengalami gejala sedang atau berat sehingga harus dirawat inap dengan laju sebesar α , banyaknya individu terinfeksi yang melakukan isolasi mandiri dan dinyatakan sembuh dengan laju sebesar γ , dan kematian alami yang bukan disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar τ .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan pada kompartemen *Infected* terhadap waktu, yaitu:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \psi\alpha I(t) - \gamma I(t) + \alpha\gamma I(t) - \tau I(t) \quad (2.14)$$

4. Kompartemen *Hospitalized*

Penambahan jumlah individu pada kompartemen *Hospitalized* dipengaruhi oleh adanya rata-rata perkembangan gejala yang dirasakan individu terinfeksi dengan laju sebesar ψ , probabilitas individu terinfeksi yang menjalani isolasi mandiri mengalami gejala sedang atau berat sehingga harus dirawat inap dengan laju sebesar α , dan masuknya individu dari kompartemen *Infected* ke *Hospitalized*. Selain itu penambahan ini juga dipengaruhi oleh rata-rata waktu individu terinfeksi menjalani rawat inap dengan laju sebesar χ , dan probabilitas individu yang dirawat inap mengalami kondisi kritis dan harus masuk ruang ICU dengan laju sebesar θ .

Adapun pengurangan jumlah individu pada kompartemen *Hospitalized* ini dikarenakan adanya pengaruh oleh rata-rata waktu individu terinfeksi dirawat inap sampai mengalami kondisi kritis dan masuk ruang ICU dengan laju sebesar σ , probabilitas individu yang dirawat inap mengalami kondisi kritis dan harus masuk ruang ICU dengan laju sebesar θ , rata-rata waktu individu terinfeksi

menjalani rawat inap dengan laju sebesar χ , dan kematian alami yang bukan disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar τ .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan pada kompartemen *Hospitalized* terhadap waktu sebagai berikut:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \psi\alpha I(t) - \sigma\theta H(t) - \chi H(t) + \chi\theta H(t) - \tau H(t) \quad (2.15)$$

5. Kompartemen *Critical*

Penambahan jumlah individu pada kompartemen *Critical* dipengaruhi oleh adanya rata-rata waktu individu terinfeksi dirawat inap sampai kondisinya kritis dan dipindahkan ke ruang ICU dengan laju sebesar σ , probabilitas individu yang dirawat inap mengalami kondisi kritis dan harus masuk ruang ICU dengan laju sebesar θ , waktu pemulihan pasien dari kondisi kritis dengan laju sebesar μ , dan probabilitas individu yang kritis menjadi meninggal dengan laju sebesar ω .

Adapun pengurangan jumlah individu pada kompartemen *Critical* ini disebabkan karena adanya pengaruh dari rata-rata waktu individu terinfeksi mengalami kondisi kritis dan masuk ruang ICU dengan laju sebesar φ , probabilitas individu yang kritis menjadi meninggal dengan laju sebesar ω , waktu pemulihan pasien dari kondisi kritis dengan laju sebesar μ , dan kematian alami yang bukan disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar τ .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan pada kompartemen *Critical* terhadap waktu sebagai berikut:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \sigma\theta H(t) - \varphi\omega C(t) - \mu C(t) + \mu\omega C(t) - \tau C(t) \quad (2.16)$$

6. **Kompartemen *Recovered***

Penambahan jumlah individu pada kompartemen *Recovered* dipengaruhi oleh banyaknya individu terinfeksi yang melakukan isolasi mandiri dan dinyatakan sembuh dengan laju sebesar γ , waktu pemulihan pasien dari kondisi kritis dengan laju sebesar μ , rata-rata waktu individu terinfeksi menjalani rawat inap dengan laju sebesar χ .

Pengurangan jumlah individu pada kompartemen *Recovered* dikarenakan adanya pengaruh dari probabilitas individu terinfeksi yang menjalani isolasi mandiri mengalami gejala sedang atau berat sehingga harus dirawat inap dengan laju sebesar α , banyaknya individu terinfeksi yang melakukan isolasi mandiri dan dinyatakan sembuh dengan laju sebesar γ , waktu pemulihan pasien dari kondisi kritis dengan laju sebesar μ , probabilitas individu yang kritis menjadi meninggal dengan laju sebesar ω , rata-rata waktu individu terinfeksi menjalani rawat inap dengan laju sebesar χ , probabilitas individu yang dirawat inap mengalami kondisi kritis dan harus masuk ruang ICU dengan laju sebesar θ , dan kematian alami yang bukan disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar τ .

Dengan demikian diperoleh laju perpindahan pada kompartemen *Recovered* terhadap waktu sebagai berikut:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \alpha \gamma I(t) + \mu C(t) - \mu \omega C + \chi H(t) - \chi \theta H(t) - \tau R(t) \quad (2.17)$$

7. **Kompartemen *Dead***

Dalam kompartemen ini hanya terdapat penambahan pada populasi, dimana penambahan jumlah individu dipengaruhi oleh rata-rata waktu individu terinfeksi mengalami kondisi kritis dan masuk ruang ICU dengan laju sebesar φ dan probabilitas individu yang kritis menjadi meninggal dengan laju sebesar ω .

Sehingga didapatkan laju perpindahan pada kompartemen *Dead* terhadap waktu sebagai berikut:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \varphi\omega C(t) \quad (2.18)$$

Berdasarkan persamaan (2.12) – (2.18) diperoleh Model SEIHCRD pada penyebaran COVID-19 yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \xi N(t) - \frac{\eta\beta I(t)S(t)}{N(t)} - \tau S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\eta\beta I(t)S(t)}{N(t)} - \delta E(t) - \tau E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \delta E(t) - \psi\alpha I(t) - \gamma I(t) + \alpha\gamma I(t) - \tau I(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} &= \psi\alpha I(t) - \sigma\theta H(t) - \chi H(t) + \chi\theta H(t) - \tau H(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \sigma\theta H(t) - \varphi\omega C(t) - \mu C(t) + \mu\omega C(t) - \tau C(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \alpha\gamma I(t) + \mu C(t) - \mu\omega C + \chi H(t) - \chi\theta H(t) - \tau R(t) \\ \frac{dD(t)}{dt} &= \varphi\omega C(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bagaimana kepositifan solusi $S(t), E(t), I(t), H(t), C(t), R(t)$ untuk $\forall t \geq 0$.

Berdasarkan persamaan (2.12) kita mempunyai,

$$\frac{dS}{dt} = \xi N - \frac{\eta\beta IS}{N} - \tau S \geq -\left(\frac{\eta\beta I}{N} + \tau\right) S$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel maka didapatkan:

$$\int \frac{dS}{S} \geq \int -\left(\frac{\eta\beta I}{N} + \tau\right) dt$$

$$\ln S \geq -\left(\frac{\eta\beta I}{N} + \tau\right)t + c$$

$$S \geq e^{-\left(\frac{\eta\beta I}{N} + \tau\right)t + c}$$

$$S \geq e^{-\left(\frac{\eta\beta I}{N} + \tau\right)t} \cdot e^c$$

$$S(t) \geq c_1 e^{-\left(\frac{\eta\beta I}{N(t)} + \tau\right)t}$$

Dimana c_1 adalah suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$S(0) = c_1$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$S(t) \geq S(0)e^{-\left(\frac{\eta\beta I}{N(t)} + \tau\right)t} \geq 0$$

Dengan demikian, solusi S bernilai non-negatif $\forall t > 0$.

Berdasarkan persamaan (2.13) kita mempunyai,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\eta\beta IS}{N} - \delta E - \tau E \geq -(\delta + \tau)E$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel maka didapatkan:

$$\int \frac{dE}{E} \geq \int -(\delta + \tau) dt$$

$$\ln E \geq -(\delta + \tau)t + c$$

$$E \geq e^{-(\delta + \tau)t + c}$$

$$E \geq e^{-(\delta + \tau)t} \cdot e^c$$

$$E(t) \geq c_2 e^{-(\delta + \tau)t}$$

Dimana c_2 adalah suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$E(0) = c_2$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$E(t) \geq E(0)e^{-(\delta+\tau)t} \geq 0$$

Dengan demikian, solusi E bernilai non-negatif $\forall t > 0$.

Berdasarkan persamaan (2.14) kita mempunyai,

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \psi\alpha I - \gamma(1 - \alpha)I - \tau I \geq -(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau)I$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel maka didapatkan:

$$\int \frac{dI}{I} \geq \int -(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau) dt$$

$$\ln I \geq -(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau)t + c$$

$$I \geq e^{-(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau)t + c}$$

$$I \geq e^{-(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau)t} \cdot e^c$$

$$I(t) \geq c_3 e^{-(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau)t}$$

Dimana c_3 adalah suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$I(0) = c_3$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$I(t) \geq I(0)e^{-(\psi\alpha + \gamma(1 - \alpha) + \tau)t} \geq 0$$

Dengan demikian, solusi I bernilai non-negatif $\forall t > 0$.

Berdasarkan persamaan (2.15) kita mempunyai,

$$\frac{dH}{dt} = \psi\alpha I - \sigma\theta H - \chi(1 - \theta)H - \tau H \geq -(\sigma\theta + \chi(1 - \theta) + \tau)H$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel maka didapatkan:

$$\int \frac{dH}{H} \geq \int -(\sigma\theta + \chi(1 - \theta) + \tau) dt$$

$$\ln H \geq -(\sigma\theta + \chi(1 - \theta) + \tau)t + c$$

$$H \geq e^{-(\sigma\theta + \chi(1 - \theta) + \tau)t + c}$$

$$H \geq e^{-(\sigma\theta + \chi(1 - \theta) + \tau)t} \cdot e^c$$

$$H(t) \geq c_4 e^{-(\sigma\theta + \chi(1-\theta) + \tau)t}$$

Dimana c_4 adalah suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$H(0) = c_4$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$H(t) \geq H(0) e^{-(\sigma\theta + \chi(1-\theta) + \tau)t} \geq 0$$

Dengan demikian, solusi H bernilai non-negatif $\forall t > 0$.

Berdasarkan persamaan (2.16) kita mempunyai,

$$\frac{dC}{dt} = \sigma\theta H - \varphi\omega C - \mu(1-\omega)C - \tau C \geq -(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau)C$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel maka didapatkan:

$$\int \frac{dC}{C} \geq \int -(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau) dt$$

$$\ln C \geq -(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau)t + c$$

$$C \geq e^{-(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau)t + c}$$

$$C \geq e^{-(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau)t} \cdot e^c$$

$$C(t) \geq c_5 e^{-(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau)t}$$

Dimana c_5 adalah suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$C(0) = c_5$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$C(t) \geq C(0) e^{-(\varphi\omega - \mu(1-\omega) - \tau)t} \geq 0$$

Dengan demikian, solusi C bernilai non-negatif $\forall t > 0$.

Berdasarkan persamaan (2.17) kita mempunyai,

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \alpha\gamma I + \mu C - \mu\omega C + \chi H - \chi\theta H - \tau R \geq -\tau R$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel maka didapatkan:

$$\int \frac{dR}{R} \geq \int -\tau dt$$

$$\ln R \geq -\tau t + c$$

$$R \geq e^{-\tau t + c}$$

$$R \geq e^{-\tau t} \cdot e^c$$

$$R(t) \geq c_6 e^{-\tau t}$$

Dimana c_6 adalah suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$R(0) = c_6$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$R(t) \geq R(0)e^{-\tau t} \geq 0$$

Dengan demikian, solusi R bernilai non-negatif $\forall t > 0$.

Dari hasil yang telah diperoleh dapat kita lihat bahwa solusi dari S, E, I, H, C, R bernilai non-negatif $\forall t > 0$. Berikutnya akan ditunjukkan keterbatasan solusi dari total individu pada populasi $N = S + E + I + H + C + R$ yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dH}{dt} + \frac{dC}{dt} + \frac{dR}{dt} \\ &= \xi N(t) - \eta \beta I(t) S(t) - \tau S(t) + \eta \beta I(t) S(t) - \delta E(t) - \tau E(t) + \delta E(t) \\ &\quad - \psi \alpha I(t) - \gamma I(t) + \alpha \gamma I(t) - \tau I(t) + \psi \alpha I(t) - \sigma \theta H(t) - \chi H(t) \\ &\quad + \chi \theta H(t) - \tau H(t) + \sigma \theta H(t) - \varphi \omega C(t) - \mu C(t) + \mu \omega C(t) - \tau C(t) \\ &\quad + \gamma I(t) - \alpha \gamma I(t) + \mu C(t) - \mu \omega C(t) + \chi H(t) - \chi \theta H(t) - \tau R(t) \\ &= \xi N(t) - \tau S(t) - \tau E(t) - \tau I(t) - \tau H(t) - \tau C(t) - \tau R(t) - \tau D(t) - \\ &\quad \varphi \omega C(t) \end{aligned}$$

$$\frac{dN}{dt} \leq (\xi - \tau)N - \varphi \omega C \leq (\xi - \tau)N$$

Dengan menggunakan metode pemisahan variabel diperoleh,

$$\int \frac{dN}{N} \leq \int (\xi - \tau) dt - 0$$

$$\ln N \leq (\xi - \tau)t + c$$

$$N \leq e^{(\xi - \tau)t + c}$$

$$N \leq e^{(\xi - \tau)t} \cdot e^c$$

$$N(t) \leq c_7 e^{(\xi - \tau)t}$$

Dimana c_7 merupakan suatu konstanta. Sehingga untuk $t = 0$ diperoleh,

$$N(0) = c_7$$

Dan dapat ditulis sebagai

$$N(t) \leq N(0)e^{(\xi - \tau)t}$$

Solusi N bernilai terbatas pada $0 \leq N(t) \leq N(0)e^{(\xi - \tau)t}$. Berdasarkan perhitungan tersebut didapatkan bahwa $\frac{dN}{N} \leq (\xi - \tau)N$ yang berarti $N(t)$ memiliki nilai tidak konstan serta terbatas di atas oleh $N(0)e^{(\xi - \tau)t}$.

2.2 Kajian Model SEIHCRD Pada COVID-19 dengan Teori Pendukung

Analisis dinamik merupakan suatu analisis yang dilakukan untuk mengetahui bagaimana perilaku dari model pada penyebaran COVID-19. Sehingga dengan mengetahui bagaimana dinamika model dari penyakit COVID-19, diharapkan hal tersebut dapat membantu dalam memahami dan mengidentifikasi hubungan penyebaran COVID-19 dengan parameter yang digunakan, memprediksi bagaimana pertumbuhan kasus di Indonesia, serta mempertimbangkan apa saja tindakan yang dapat dilakukan dalam rangka pencegahan dan pengendalian COVID-19. Adapun dalam melakukan analisis

dinamik terdapat beberapa tahapan, antara lain menentukan titik kesetimbangan, menentukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, serta menentukan bilangan reproduksi dasar. Setelah itu akan dilakukan simulasi numerik menggunakan metode runge kutta orde empat, dan dilanjutkan dengan interpretasi hasil.

Pada penelitian ini, model SEIHCRD yang digunakan merupakan hasil dari modifikasi pada (Singh & Bajpai, 2020). Dimana pada (Singh & Bajpai, 2020) kelas *Hospitalized* ditujukan untuk individu terinfeksi dengan kasus berat, sedangkan pada kelas *Critical* merupakan individu terinfeksi dengan penyakit bawaan. Padahal, dalam kenyataannya di Indonesia individu yang dirawat inap merupakan individu dengan gejala sedang dan berat atau yang memiliki penyakit bawaan maupun berusia lanjut, sedangkan individu di kelas *Critical* merupakan pasien COVID-19 yang kritis dan mendapatkan penanganan di ruang ICU. Selain itu, pada (Singh & Bajpai, 2020) tidak terdapat kelahiran dan kematian alami dalam populasi yang menyebabkan titik kesetimbangan dari *Susceptible* (*S*) bernilai nol. Sehingga pada penelitian ini, model akan dimodifikasi dengan menambahkan parameter kelahiran dan kematian alami serta menggambarkan probabilitas atau kemungkinan-kemungkinan yang ada melalui suatu parameter. Adapun model SEIHCRD yang digunakan dalam penelitian ini terdapat pada Gambar 2.1. Berikut adalah model SEIHCRD sebelum dan sesudah dimodifikasi.

1. Model SEIHCRD pada (Singh & Bajpai, 2020) sebelum dimodifikasi:

$$\frac{dS}{dt} = -\eta \cdot \beta \cdot I \cdot \frac{S}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \eta \cdot \beta \cdot I \cdot \frac{S}{N} - \delta \cdot E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta.E - \psi.\text{prob}(I \rightarrow H).I - \gamma.(1 - \text{prob}(I \rightarrow H)).I$$

$$\frac{dH}{dt} = \psi.\text{prob}(I \rightarrow H).I - \sigma.\text{prob}(H \rightarrow C).H - \chi(1 - \text{prob}(H \rightarrow C)).H$$

$$\frac{dC}{dt} = \sigma.\text{prob}(H \rightarrow C).H - \varphi.\text{prob}(C \rightarrow D).C - \mu(1 - \text{prob}(C \rightarrow D)).C$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma.(1 - \text{prob}(I \rightarrow H)).I + \mu.(1 - \text{prob}(C \rightarrow D)).C + \chi(1 - \text{prob}(H \rightarrow C)).H$$

$$\frac{dD}{dt} = \varphi.\text{prob}(C \rightarrow D).C$$

2. Model SEIHCRD sesudah dimodifikasi:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \xi N(t) - \frac{\eta \beta I(t) S(t)}{N(t)} - \tau S(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\eta \beta I(t) S(t)}{N(t)} - \delta E(t) - \tau E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \psi \alpha I(t) - \gamma I(t) + \alpha \gamma I(t) - \tau I(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = \psi \alpha I(t) - \sigma \theta H(t) - \chi H(t) + \chi \theta H(t) - \tau H(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = \sigma \theta H(t) - \varphi \omega C(t) - \mu C(t) + \mu \omega C(t) - \tau C(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \alpha \gamma I(t) + \mu C(t) - \mu \omega C + \chi H(t) - \chi \theta H(t) - \tau R(t)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \varphi \omega C(t)$$

Selanjutnya model yang telah dimodifikasi akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemiknya. Dimana titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan titik tetap dari suatu populasi yang tidak terdapat penyakit, sedangkan titik kesetimbangan endemik merupakan titik tetap dari suatu populasi dengan penyebaran penyakit di dalamnya. Sehingga sesuai dengan

Definisi (2.1) bahwa titik kesetimbangan dari model dapat diperoleh jika $f(\bar{x}) = 0$.

Berikutnya akan ditentukan bilangan reproduksi dasar yang didapatkan dari *radius spectral* atau nilai eigen dominan pada hasil matriks *Next-Generation*. Bilangan reproduksi dasar ini digunakan sebagai parameter ambang dalam menentukan bagaimana batas antara penyebaran dan kepunahan suatu penyakit. Sehingga berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat diketahui apakah penyakit tersebut akan berakhir dengan sendirinya, stabil, atau justru tetap ada dan berkelanjutan.

Kemudian akan dilakukan analisis kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik untuk mengetahui bagaimana sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangannya. Adapun dalam menentukan analisis kestabilan diperlukan linierisasi pada sistem sehingga sistem yang berbentuk nonlinier akan menjadi linier. selanjutnya kestabilan titik kesetimbangan dapat diperoleh dari nilai eigen pada hasil linierisasi sistem. Sehingga, jika persamaan karakteristik yang diperoleh berbentuk polinomial dan sulit ditentukan nilai eigennya, maka dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz sifat kestabilan dari titik kesetimbangan dapat diperoleh berdasarkan akar karakteristiknya. Setelah diperoleh analisis kestabilan dari titik kesetimbangan, berikutnya akan dilakukan simulasi numerik pada model SEIHCRD.

Simulasi numerik merupakan ilustrasi model menggunakan parameter khusus dan metode numerik tertentu. Pada penelitian ini metode numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat. Dimana metode ini adalah metode yang sering digunakan karena memiliki tingkat akurasi tinggi tanpa

membutuhkan diferensiasi orde yang lebih tinggi. Sehingga dengan menggunakan persamaan (2.11) maka solusi numerik dari model SEIHCRD dapat diperoleh. Adapun perhitungan dari simulasi ini dilakukan untuk mencari iterasi pertama dari model, sedangkan iterasi kedua hingga ke-92 akan dilakukan dengan bantuan *software* Octave. Kemudian grafik solusi yang diperoleh akan dijelaskan melalui interpretasi hasil.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian kualitatif. Penelitian kualitatif merupakan penelitian yang digunakan untuk menyelidiki, menemukan, menggambarkan, dan menjelaskan kualitas atau keistimewaan dari pengaruh sosial yang tidak dapat dijelaskan, diukur atau digambarkan melalui pendekatan kuantitatif (Saryono, 2010).

3.2 Data dan Sumber Data

Pada penelitian ini jenis data yang digunakan adalah data sekunder di bulan Agustus sampai Oktober 2021, berupa kasus harian COVID-19 oleh (COVID-19, n.d.) pada website <https://covid19.go.id/peta-sebaran> dan ketersediaan tempat tidur rumah sakit oleh (KEMENKES, 2022) pada website <https://www.kemkes.go.id/article/view/22040400001/Data-Ketersediaan-Tempat-Tidur-RS-COVID-19.html>. Data ini diambil pada bulan Agustus sampai Oktober dikarenakan data kasus harian COVID-19 dan ketersediaan tempat tidur rumah sakit tersedia secara lengkap.

3.3 Tahapan Penelitian

Adapun dalam penelitian ini, peneliti melakukan beberapa tahapan penelitian sebagai berikut:

1. Analisis dinamik pada model SEIHCRD:
 - a. Mengidentifikasi nilai awal dan parameter yang digunakan
 - b. Menentukan titik kesetimbangan
 - c. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0)

- d. Menentukan analisis kestabilan
2. Simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat
 - a. Menentukan nilai tetapan
 - b. Melakukan perhitungan iterasi pertama menggunakan rumus Runge-Kutta orde empat dengan memasukkan nilai tetapan yang telah diperoleh
 - c. Melakukan perhitungan iterasi kedua hingga ke-92 menggunakan *software Octave*
 3. Interpretasi Hasil
 - a. Menampilkan grafik yang diperoleh dari *software Octave*
 - b. Menganalisis hasil dari grafik yang diperoleh
 - c. Menarik kesimpulan dari hasil analisis
 - d. Mengimplementasikan model SEIHCRD dalam pandangan Islam

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model SEIHCRD

4.1.1 Identifikasi Nilai Awal dan Parameter yang Digunakan

Nilai awal untuk populasi *Susceptible* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), *Recovered* (R), dan *Dead* (D) pada penelitian ini diambil dari peta sebaran COVID-19 di website <https://covid19.go.id/peta-sebaran>, kemudian untuk nilai awal populasi *Hospitalized* (H) dan *Critical* (C) diambil dari website <https://www.kemkes.go.id/article/view/22040400001/Data-Ketersediaan-Tempat-Tidur-RS-COVID-19.html>, adapun data yang diambil berupa banyaknya kasus harian di tanggal 1 Agustus 2021 dan akan digunakan pada penggambaran kondisi di 3 bulan berikutnya. Dimana pada bulan Agustus hingga Oktober, data ketersediaan tempat tidur rumah sakit dan tempat tidur ICU tersedia secara lengkap. Sedangkan untuk nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari beberapa sumber.

Adapun dalam penelitian ini, nilai awal pada total populasi (N_0) merupakan jumlah dari total penduduk di Indonesia diambil dari website <https://dukcapil.kemendagri.go.id/berita/baca/809/distribusi-penduduk-indonesia-per-juni-2021-jabar-terbanyak-kaltara-paling-sedikit>, nilai awal populasi *Susceptible* (S_0) merupakan total populasi penduduk di Indonesia dikurangi dengan banyaknya kasus terpapar, terinfeksi, rawat inap, kritis dan sembuh dari COVID-19 pada tanggal 1 Agustus 2021, nilai awal populasi *Exposed* (E_0) merupakan banyaknya penambahan kasus harian yang terkonfirmasi positif, sembuh dan meninggal di tanggal 1 Agustus 2021, nilai awal populasi *Infected*

(I_0) merupakan banyaknya pertambahan kasus harian yang terkonfirmasi positif pada tanggal 1 Agustus 2021.

Kemudian nilai awal populasi *Hospitalized* (H_0) merupakan jumlah individu terinfeksi yang dirawat inap pada tanggal 1 Agustus 2021, nilai awal populasi *Critical* (C_0) merupakan jumlah individu terinfeksi yang kritis dan masuk ICU pada tanggal 1 Agustus 2021, nilai awal populasi *Recovered* (R_0) merupakan banyaknya pertambahan kasus harian yang terkonfirmasi sembuh pada tanggal 1 Agustus 2021, dan nilai awal populasi *Dead* (D_0) merupakan banyaknya pertambahan kasus harian yang terkonfirmasi meninggal pada tanggal 1 Agustus 2021. Berikut merupakan nilai awal dan parameter pada penelitian ini:

Tabel 4.1 Nilai Awal Model SEIHCRD di Indonesia

Variabel	Definisi	Nilai (orang)
(N_0)	Banyaknya total penduduk hidup di Indonesia	272.229.372
(S_0)	Banyaknya individu yang rentan terhadap waktu	272.008.906
(E_0)	Banyaknya individu yang terpapar terhadap waktu	71.788
(I_0)	Banyaknya individu yang terinfeksi terhadap waktu	30.738
(H_0)	Banyaknya individu terinfeksi yang rawat inap terhadap waktu	70.568
(C_0)	Banyaknya pasien terinfeksi yang kritis terhadap waktu	7.926
(R_0)	Banyaknya individu terinfeksi yang sembuh terhadap waktu	39.446
(D_0)	Banyaknya pasien kritis yang meninggal terhadap waktu	1.604

Tabel 4.2 Nilai Parameter Model SEIHCRD di Indonesia

Parameter	Definisi	Nilai	Sumber
ξ	Laju kelahiran alami	6.25×10^{-3}	(Ramadhani, 2021)
τ	Laju kematian alami	6.25×10^{-3}	(Ramadhani, 2021)

η	Faktor <i>social distancing</i>	1	(Singh & Bajpai, 2020)
β	Laju kontak individu rentan dengan individu terinfeksi	[0,1]	(Rifanti et al., 2021)
δ	Laju perpindahan individu di kelas <i>Exposed</i> ke kelas <i>Infected</i>	[0,1]	(Rifanti et al., 2021)
ψ	Rata-rata waktu perkembangan gejala COVID-19	$\frac{2}{14} = 0.142$	(Claudya, 2021)
α	Probabilitas individu terinfeksi dirawat inap	[0,1]	(Singh & Bajpai, 2020)
γ	Rata-rata waktu pemulihan pasien COVID-19 hingga sembuh	$\frac{14}{42} = 0.33$	(Fadli, 2021)
σ	Rata-rata waktu dari rawat inap menjadi kritis dan masuk ICU	$\frac{1}{5} = 0.2$	(Manafe, 2020)
θ	Probabilitas pasien COVID-19 menjadi kritis dan masuk ICU	[0,1]	(Singh & Bajpai, 2020)
φ	Rata-rata waktu masuk ICU	$\frac{1}{8} = 0.125$	(Singh & Bajpai, 2020)
ω	Probabilitas pasien kritis menjadi meninggal	[0,1]	(Singh & Bajpai, 2020)
μ	Rata-rata waktu pemulihan pasien dari kondisi kritis	$\frac{12}{18} = 0.67$	(Claudya, 2021)
χ	Rata-rata waktu rawat inap	$\frac{1}{14} = 0.07$	(Manafe, 2020)

4.1.2 Menentukan Titik Keseimbangan

Titik-titik keseimbangan terbagi menjadi dua yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Dalam menentukan kedua titik keseimbangan tersebut, setiap persamaan pada sistem persamaan (2.19) haruslah bernilai nol, atau $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dD}{dt} = 0$. Sehingga persamaan pada (2.19) menjadi:

$$\xi N - \frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \tau S^* = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0 \quad (4.2)$$

$$\delta E^* - \psi\alpha I^* - \gamma I^* + \alpha\gamma I^* - \tau I^* = 0 \quad (4.3)$$

$$\psi\alpha I^* - \sigma\theta H^* - \chi H^* + \chi\theta H^* - \tau H^* = 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma\theta H^* - \varphi\omega C^* - \mu C^* + \mu\omega C^* - \tau C^* = 0 \quad (4.5)$$

$$\gamma I^* - \alpha\gamma I^* + \mu C^* - \mu\omega C^* + \chi H^* - \chi\theta H^* - \tau R^* = 0 \quad (4.6)$$

$$\varphi\omega C^* - \tau D^* = 0 \quad (4.7)$$

Selanjutnya, persamaan (4.4) – (4.7) tidak dimasukkan pada sistem (4.8) karena persamaan (4.1) – (4.3) tidak bergantung secara eksplisit terhadap H^*, C^*, R^* , dan D^* . Dimana H^* dapat dicari dengan memasukkan fungsi $I(t)$ yang telah diperoleh ke dalam persamaan (4.4), kemudian C^* dapat dicari dengan memasukkan fungsi $H(t)$ yang telah diperoleh ke dalam persamaan (4.5), lalu R^* dan D^* tidak dinyatakan secara eksplisit di dalam persamaan. Berikut adalah sistem (4.8) yang akan dicari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemiknya.

$$\xi N - \frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \tau S^* = 0$$

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0 \quad (4.8)$$

$$\delta E^* - \psi\alpha I^* - \gamma I^* + \alpha\gamma I^* - \tau I^* = 0$$

1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan titik dimana tidak terdapat penyakit didalam populasi. Sehingga tidak ada individu yang terinfeksi atau $I^* = 0$, maka:

Substitusikan $I^* = 0$ ke persamaan (4.1), sehingga:

$$\xi N - \frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \tau S^* = 0$$

$$\eta\beta(0)S^* = \xi N - \tau S^*$$

$$0 = \xi N - \tau S^*$$

$$\tau S^* = \xi N$$

$$S^* = \frac{\xi N}{\tau}$$

Substitusikan $I^* = 0$ ke persamaan (4.2), sehingga:

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0$$

$$\frac{\eta\beta(0)S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0$$

$$\delta E^* + \tau E^* = 0$$

$$E^*(\delta + \tau) = \frac{0}{\delta + \tau}$$

$$E^* = 0$$

Sehingga didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit COVID-19 di Indonesia adalah:

$$E_0 = (S_0, E_0, I_0) = \left(\frac{\xi N}{\tau}, 0, 0\right) \quad (4.9)$$

2. Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan titik yang menunjukkan kondisi dimana terdapat penyebaran penyakit didalam populasi. Sehingga $S^* \neq 0, E^* \neq 0, I^* \neq 0$, maka berdasarkan persamaan (4.1) – (4.3) diperoleh:

$$\xi N - \frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \tau S^* = 0$$

$$\xi N = \frac{(\eta\beta I^* + \tau)}{N} S^*$$

$$S^* = \frac{\xi N^2}{\eta\beta I^* + \tau}$$

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0$$

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} = (\delta + \tau) E^*$$

$$E^* = \frac{\eta\beta I^* S^*}{(\delta + \tau) N}$$

$$\delta E^* - \psi\alpha I^* - \gamma I^* + \alpha\gamma I^* - \tau I^* = 0$$

$$\delta E^* - (\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau) I^* = 0$$

$$I^* = \frac{\delta E^*}{(\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau)}$$

Karena terdapat penyebaran penyakit di dalam populasi maka $I^* \neq 0$, sehingga dengan melakukan substitusi I^* ke persamaan (4.1) didapatkan:

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0$$

$$S^* \cdot \frac{\eta\beta\delta E^*}{(\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau) N} - (\delta + \tau) E^* = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{S^*}{(\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau)N} &= \frac{(\delta + \tau)E^*}{\eta\beta\delta E^*} \\ S^* &= \frac{(\delta + \tau)(\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau)N}{\eta\beta\delta} \\ S^* &= \frac{\psi\alpha\delta N + \psi\alpha\tau N - \alpha\delta\gamma N - \alpha\gamma\tau N + \delta\gamma N + \delta\tau N + \gamma\tau N + \tau^2 N}{\eta\beta\delta}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Selanjutnya substitusikan (4.10) ke (4.1)

$$\begin{aligned}\xi N - \frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \tau S^* &= 0 \\ \xi N - \tau S^* &= \frac{\eta\beta I^* S^*}{N} \\ \xi N - \tau \left(\frac{\psi\alpha\delta N + \psi\alpha\tau N - \alpha\delta\gamma N - \alpha\gamma\tau N + \delta\gamma N + \delta\tau N + \gamma\tau N + \tau^2 N}{\eta\beta\delta} \right) \\ &= I^* \cdot \eta\beta \left(\frac{\psi\alpha\delta N + \psi\alpha\tau N - \alpha\delta\gamma N - \alpha\gamma\tau N + \delta\gamma N + \delta\tau N + \gamma\tau N + \tau^2 N}{\eta\beta\delta N} \right) \\ \frac{\eta\beta\delta\xi N - \psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N - \tau^3 N}{\eta\beta\delta} &= I^* \\ \frac{\eta\beta(\psi\alpha\delta N + \psi\alpha\tau N - \alpha\delta\gamma N - \alpha\gamma\tau N + \delta\gamma N + \delta\tau N + \gamma\tau N + \tau^2 N)}{\eta\beta\delta N} \\ \frac{(\eta\beta\delta\xi N - \psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N - \tau^3 N)(\eta\beta\delta N)}{\eta\beta\delta(\eta\beta(\psi\alpha\delta N + \psi\alpha\tau N - \alpha\delta\gamma N - \alpha\gamma\tau N + \delta\gamma N + \delta\tau N + \gamma\tau N + \tau^2 N))} &= I^* \\ I^* &= \frac{-\psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N - \tau^3 N + \eta\beta\delta\xi N}{\eta\beta(\psi\alpha\delta + \psi\alpha\tau - \alpha\delta\gamma - \alpha\gamma\tau + \delta\gamma + \delta\tau + \gamma\tau + \tau^2)}\end{aligned}\quad (4.11)$$

Kemudian substitusikan (4.10) dan (4.11) ke (4.2)

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - \delta E^* - \tau E^* = 0$$

$$\frac{\eta\beta I^* S^*}{N} - (\delta + \tau)E^* = 0$$

$$E^* = \frac{\eta\beta I^* S^*}{(\delta + \tau)N}$$

$$E^* = \frac{\eta\beta \left(\begin{array}{c} -\psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N \\ -\tau^3 N + \eta\beta\delta\xi N \end{array} \right)}{\eta\beta(\psi\alpha\delta + \psi\alpha\tau - \alpha\delta\gamma - \alpha\gamma\tau + \delta\gamma + \delta\tau + \gamma\tau + \tau^2) \eta\beta\delta (\delta + \tau)N}$$

$$E^* = \frac{-\psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N - \tau^3 N + \eta\beta\delta\xi N}{\eta\beta\delta (\delta + \tau)} \quad (4.12)$$

Sehingga, berikut adalah titik kesetimbangan endemik yang didapatkan:

$$E^* = (S^*, E^*, I^*) \quad (4.13)$$

Dengan,

$$S^* = \frac{\psi\alpha\delta N + \psi\alpha\tau N - \alpha\delta\gamma N - \alpha\gamma\tau N + \delta\gamma N + \delta\tau N + \gamma\tau N + \tau^2 N}{\eta\beta\delta}$$

$$E^* = \frac{-\psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N - \tau^3 N + \eta\beta\delta\xi N}{\eta\beta\delta (\delta + \tau)}$$

$$I^* = \frac{-\psi\alpha\delta\tau N - \psi\alpha\tau^2 N + \alpha\delta\gamma\tau N + \alpha\gamma\tau^2 N - \delta\gamma\tau N - \delta\tau^2 N - \gamma\tau^2 N - \tau^3 N + \eta\beta\delta\xi N}{\eta\beta(\psi\alpha\delta + \psi\alpha\tau - \alpha\delta\gamma - \alpha\gamma\tau + \delta\gamma + \delta\tau + \gamma\tau + \tau^2)}$$

Misalkan

$$\rho = \psi\alpha\delta + \psi\alpha\tau - \alpha\delta\gamma - \alpha\gamma\tau + \delta\gamma + \delta\tau + \gamma\tau + \tau^2$$

Maka titik kesetimbangan endemik pada (4.13) menjadi:

$$E^* = (S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{\rho N}{\eta\beta\delta}, \frac{-\rho\tau N + \eta\beta\delta\xi N}{\eta\beta\delta (\delta + \tau)}, \frac{\rho\tau N + \eta\beta\delta\xi N}{\rho\eta\beta} \right) \quad (4.14)$$

4.1.3 Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Berdasarkan model persamaan dari subsistem terinfeksi, maka akan didapatkan matriks *Next-Generation*. Adapun Langkah-langkah dalam menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah sebagai berikut:

1. Mengambil persamaan yang mengandung subsistem terinfeksi, dimana pada model ini subsistem terinfeksi adalah E dan I.
2. Linierisasi subsistem terinfeksi pada titik kesetimbangan bebas penyakit menggunakan matriks jacobian sebagai berikut:

$$J_{(E,I)} = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} \\ \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\delta + \tau) & \frac{\eta\beta S}{N} \\ \delta & -(\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau) \end{bmatrix}$$

$$J_{(S,E,I)} = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dE} & \frac{dE}{dI} \\ \frac{dI}{dE} & \frac{dI}{dI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\delta + \tau) & \frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ \delta & -(\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau) \end{bmatrix}$$

3. Selanjutnya akan dilakukan dekomposisi dari matriks Jacobian (J). setelah itu bilangan reproduksi dasar dapat dicari menggunakan matriks *Next-Generation*.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta\beta S}{N} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} (\delta + \tau) & 0 \\ -\delta & (\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau) \end{pmatrix}$$

Dengan \mathbf{F} merupakan matriks transmisi yang menggambarkan laju penambahan kasus, sedangkan \mathbf{V} merupakan matriks transisi yang menggambarkan laju pengurangan kasus. Sehingga diperoleh:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta + \tau} & 0 \\ -\delta & -1 \\ \frac{1}{\alpha\gamma\delta - \gamma\delta - \tau^2 + \alpha\gamma\tau - \gamma\tau - \delta\tau - \alpha\delta\psi - \alpha\tau\psi} & \frac{-1}{\alpha\gamma - \gamma - \tau - \psi\alpha} \end{pmatrix}$$

4. Berikutnya menghitung R_0 dimana $R_0 = \rho(FV^{-1})$, dengan $\rho(FV^{-1})$ adalah nilai eigen absolut dominan (radius spectral) dari K (Matriks *Next-Generation*), maka:

$$\begin{aligned} K &= (FV^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta + \tau} & 0 \\ -\delta & -1 \\ \frac{1}{\alpha\gamma\delta - \gamma\delta - \tau^2 + \alpha\gamma\tau - \gamma\tau - \delta\tau - \alpha\delta\psi - \alpha\tau\psi} & \frac{-1}{\alpha\gamma - \gamma - \tau - \psi\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\eta\beta\delta\xi}{\tau^3 - \alpha\gamma\tau^2 + \gamma\tau^2 + \delta\tau^2 - \alpha\gamma\delta\tau + \gamma\delta\tau + \alpha\tau^2\psi + \alpha\delta\tau\psi} & \frac{\eta\beta\xi}{\tau^2 - \alpha\gamma\tau + \gamma\tau + \alpha\tau\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah:

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K) \\ &= \rho \left(\begin{pmatrix} \frac{\eta\beta\delta\xi}{\tau^3 - \alpha\gamma\tau^2 + \gamma\tau^2 + \delta\tau^2 - \alpha\gamma\delta\tau + \gamma\delta\tau + \alpha\tau^2\psi + \alpha\delta\tau\psi} & \frac{\eta\beta\xi}{\tau^2 - \alpha\gamma\tau + \gamma\tau + \alpha\tau\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\eta\beta\delta\xi}{\tau^3 - \alpha\gamma\tau^2 + \gamma\tau^2 + \delta\tau^2 - \alpha\gamma\delta\tau + \gamma\delta\tau + \alpha\tau^2\psi + \alpha\delta\tau\psi} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.2, maka

$$R_0 = 0.364325388100000$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas didapatkan hasil bahwa $R_0 < 1$, yang artinya bilangan reproduksi dasar stabil asimtotik lokal pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Sehingga jumlah kasus baru akan berkurang dari waktu ke waktu dan dengan sendirinya wabah penyakit akan berakhir (Giesecke, 2002).

4.1.4 Menentukan Analisis Kestabilan

Model matematika yang ada pada persamaan (4.8) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear. Sehingga dalam mencari analisis kestabilannya, maka akan dilakukan linierisasi pada sekitar titik kesetimbangan. Berikut adalah matriks jacobi dari hasil linierisasi pada (4.8):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial E} & \frac{\partial S}{\partial I} \\ \frac{\partial E}{\partial S} & \frac{\partial E}{\partial E} & \frac{\partial E}{\partial I} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial E} & \frac{\partial I}{\partial I} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\eta\beta I}{N} - \tau & 0 & -\frac{\eta\beta S}{N} \\ \frac{\eta\beta I}{N} & -\delta - \tau & \frac{\eta\beta S}{N} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau \end{bmatrix}$$

1. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang telah diperoleh yaitu $E_0 = \left(\frac{\xi N}{\tau}, 0, 0\right)$, maka matriks jacobi yang didapatkan dari hasil linierisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit adalah:

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\tau & 0 & -\frac{\eta\beta\xi N}{\tau N} \\ 0 & -\delta - \tau & \frac{\eta\beta\xi N}{\tau N} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\tau & 0 & -\frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ 0 & -\delta - \tau & \frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks $J(E_0)$ didapatkan melalui persamaan berikut:

$$\det|\mathbf{J}(\mathbf{E}_0) - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\tau - \lambda & 0 & -\frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ 0 & -\delta - \tau - \lambda & \frac{\eta\beta\xi}{\tau} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau - \lambda & 0 \\ 0 & -\delta - \tau - \lambda \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\tau - \lambda) \cdot (-\delta - \tau - \lambda) \cdot (-\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau - \lambda) + 0 \cdot \left(\frac{\eta\beta\xi}{\tau}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{\eta\beta\xi}{\tau}\right)$$

.

$$0 \cdot \delta - \left(-\frac{\eta\beta\xi}{\tau}\right) \cdot (-\delta - \tau - \lambda) \cdot 0 - (-\tau - \lambda) \cdot \left(\frac{\eta\beta\xi}{\tau}\right) \cdot \delta - 0 \cdot 0 \cdot (-\psi\alpha - \gamma$$

+

$$\alpha\gamma - \tau - \lambda) = 0$$

$$-\psi\alpha\delta\tau - \gamma\delta\tau + \alpha\gamma\delta\tau - \delta\tau^2 - \delta\lambda\tau - \psi\alpha\tau^2 - \gamma\tau^2 + \alpha\gamma\tau^2 - \tau^3 - \lambda\tau^2 - \psi\alpha\lambda\tau$$

$$-\gamma\lambda\tau + \alpha\gamma\lambda\tau - \lambda\tau^2 - \lambda^2\tau - \psi\alpha\delta\lambda - \gamma\delta\lambda + \alpha\gamma\delta\lambda - \delta\lambda\tau - \delta\lambda^2 - \psi\alpha\lambda\tau - \gamma\lambda\tau$$

$$+ \alpha\gamma\lambda\tau - \lambda\tau^2 - \lambda^2\tau - \psi\alpha\lambda^2 - \gamma\lambda^2 + \alpha\gamma\lambda^2 - \lambda^2\tau - \lambda^3 + 0 + 0 - 0 + \frac{\eta\beta\xi\delta\tau}{\tau} +$$

$$\frac{\eta\beta\xi\delta\lambda}{\tau} - 0 = 0$$

$$-\psi\alpha\delta\tau^2 - \gamma\delta\tau^2 + \alpha\gamma\delta\tau^2 - \delta\tau^3 - \delta\lambda\tau^2 - \psi\alpha\tau^3 - \gamma\tau^3 + \alpha\gamma\tau^3 - \tau^4 - \lambda\tau^3$$

$$-\psi\alpha\lambda\tau^2 - \gamma\lambda\tau^2 + \alpha\gamma\lambda\tau^2 - \lambda\tau^3 - \lambda^2\tau^2 - \psi\alpha\delta\lambda\tau - \gamma\delta\lambda\tau + \alpha\gamma\delta\lambda\tau - \delta\lambda\tau^2$$

$$-\delta\lambda^2\tau - \psi\alpha\lambda\tau^2 - \gamma\lambda\tau^2 + \alpha\gamma\lambda\tau^2 - \lambda\tau^3 - \lambda^2\tau^2 - \psi\alpha\lambda^2\tau - \gamma\lambda^2\tau + \alpha\gamma\lambda^2\tau$$

$$-\lambda^2\tau^2 - \lambda^3\tau + \eta\beta\xi\delta\tau + \eta\beta\xi\delta\lambda$$

τ

$$= 0$$

$$-\lambda^3\tau - 3\lambda^2\tau^2 + \alpha\gamma\lambda^2\tau - \psi\alpha\lambda^2\tau - \gamma\lambda^2\tau - \delta\lambda^2\tau - 3\lambda\tau^3 - 2\psi\alpha\lambda\tau^2 - 2\delta\lambda\tau^2$$

–

$$2\gamma\lambda\tau^2 + 2\alpha\gamma\lambda\tau^2 - \psi\alpha\delta\lambda\tau - \gamma\delta\lambda\tau + \alpha\gamma\delta\lambda\tau + \eta\beta\xi\delta\lambda - \tau^4 + \alpha\gamma\tau^3 - \gamma\tau^3$$

$$- \delta\tau^3$$

$$-\gamma\delta\tau^2 + \eta\beta\xi\delta\tau - \psi\alpha\tau^3 - \psi\alpha\delta\tau^2 + \alpha\gamma\delta\tau^2 = 0$$

$$-(\tau)\lambda^3 - (3\tau^2 - \alpha\gamma\tau + \psi\alpha\tau + \gamma\tau + \delta\tau)\lambda^2 - (3\tau^3 + 2\psi\alpha\tau^2 + 2\delta\tau^2 +$$

$$2\gamma\tau^2 - 2\alpha\gamma\tau^2 + \psi\alpha\delta\tau + \gamma\delta\tau - \alpha\gamma\delta\tau - \eta\beta\xi\delta)\lambda - (\tau^4 - \alpha\gamma\tau^3 + \gamma\tau^3 + \delta\tau^3$$

$$+ \gamma\delta\tau^2 - \eta\beta\xi\delta\tau + \psi\alpha\tau^3 + \psi\alpha\delta\tau^2 - \alpha\gamma\delta\tau^2) = 0$$

$$(\tau)\lambda^3 + (3\tau^2 - \alpha\gamma\tau + \psi\alpha\tau + \gamma\tau + \delta\tau)\lambda^2 + (3\tau^3 + 2\psi\alpha\tau^2 + 2\delta\tau^2 +$$

$$2\gamma\tau^2 - 2\alpha\gamma\tau^2 + \psi\alpha\delta\tau + \gamma\delta\tau - \alpha\gamma\delta\tau - \eta\beta\xi\delta)\lambda + (\tau^4 - \alpha\gamma\tau^3 + \gamma\tau^3 + \delta\tau^3$$

$$+ \gamma\delta\tau^2 - \eta\beta\xi\delta\tau + \psi\alpha\tau^3 + \psi\alpha\delta\tau^2 - \alpha\gamma\delta\tau^2) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (4.15)$$

Dengan

$$a_0 = \tau$$

$$a_1 = 3\tau^2 - \alpha\gamma\tau + \psi\alpha\tau + \gamma\tau + \delta\tau$$

$$a_2 = 3\tau^3 + 2\psi\alpha\tau^2 + 2\delta\tau^2 + 2\gamma\tau^2 - 2\alpha\gamma\tau^2 + \psi\alpha\delta\tau + \gamma\delta\tau - \alpha\gamma\delta\tau - \eta\beta\xi\delta$$

$$a_3 = \tau^4 - \alpha\gamma\tau^3 + \gamma\tau^3 + \delta\tau^3 + \gamma\delta\tau^2 - \eta\beta\xi\delta\tau + \psi\alpha\tau^3 + \psi\alpha\delta\tau^2 - \alpha\gamma\delta\tau^2$$

Karena nilai dari akar-akar pada persamaan karakteristik (4.15) sulit untuk didapatkan, maka dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz akan diketahui sifat kestabilan dari titik kesetimbangan E_0 . Sehingga berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan E_0 akan stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi-kondisi berikut:

1. $a_0 > 0$
2. $a_1 > 0$
3. $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$
4. $a_3 > 0$

Sehingga dengan menggunakan parameter-parameter pada Tabel 4.2 didapatkan

1. $a_0 = 0.00625 > 0$,
2. $a_1 = 0.0019384375 > 0$,
3. $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = 0,000000164269103 > 0$,
4. $a_3 = 0.000005809108887 > 0$

Dengan

$$a_2 = 0.0001034730469$$

Berdasarkan perhitungan di atas didapatkan bahwa syarat 1 – 4 terpenuhi dan semua nilai eigen pada persamaan karakteristik titik kesetimbangan bebas penyakit bernilai negatif, yang berarti titik kesetimbangan bebas penyakit pada model SEIHCRD stabil asimtotik lokal.

2. Analisis Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Berdasarkan titik kesetimbangan bebas penyakit yang telah diperoleh yaitu

$$E^* = \left(\frac{\rho N}{\eta \beta \delta}, \frac{-\rho \tau N + \eta \beta \delta \xi N}{\eta \beta \delta (\delta + \tau)}, \frac{\rho \tau N + \eta \beta \delta \xi N}{\rho \eta \beta} \right),$$

maka matriks jacobian yang didapatkan dari hasil linierisasi di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit adalah:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\frac{\eta \beta (\rho \tau N + \eta \beta \delta \xi N)}{\rho \eta \beta N} - \tau & 0 & -\frac{\eta \beta \rho N}{\eta \beta \delta N} \\ \frac{\eta \beta (\rho \tau N + \eta \beta \delta \xi N)}{\rho \eta \beta N} & -\delta - \tau & \frac{\eta \beta \rho N}{\eta \beta \delta N} \\ 0 & \delta & -\psi \alpha - \gamma + \alpha \gamma - \tau \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2\rho\tau - \eta\beta\delta\xi}{\rho} & 0 & -\frac{\rho}{\delta} \\ \frac{\rho\tau + \eta\beta\delta\xi}{\rho} & -\delta - \tau & \frac{\rho}{\delta} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau \end{bmatrix}$$

Dengan

$$\rho = \psi\alpha\delta + \psi\alpha\tau - \alpha\delta\gamma - \alpha\gamma\tau + \delta\gamma + \delta\tau + \gamma\tau + \tau^2$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks $\mathbf{J}(\mathbf{E}_1)$ didapatkan melalui persamaan berikut:

$$\det|\mathbf{J}(\mathbf{E}_1) - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{-2\rho\tau - \eta\beta\delta\xi - \lambda\rho}{\rho} & 0 & -\frac{\rho}{\delta} \\ \frac{\rho\tau + \eta\beta\delta\xi}{\rho} & -\delta - \tau - \lambda & \frac{\rho}{\delta} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-2\rho\tau - \eta\beta\delta\xi - \lambda\rho}{\rho} & 0 & -\frac{\rho}{\delta} \\ \frac{\rho\tau + \eta\beta\delta\xi}{\rho} & -\delta - \tau - \lambda & \frac{\rho}{\delta} \\ 0 & \delta & -\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-2\rho\tau - \eta\beta\delta\xi - \lambda\rho}{\rho} & 0 \\ \frac{\rho\tau + \eta\beta\delta\xi}{\rho} & -\delta - \tau - \lambda \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{-2\rho\tau - \eta\beta\delta\xi - \lambda\rho}{\rho} \cdot (-\delta - \tau - \lambda) \cdot (-\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau - \lambda) + 0 \cdot \left(\frac{\rho}{\delta}\right) \cdot 0 + \\ & \left(-\frac{\rho}{\delta}\right) \cdot \left(\frac{\rho\tau + \eta\beta\delta\xi}{\rho}\right) \cdot \delta - \left(-\frac{\rho}{\delta}\right) \cdot (-\delta - \tau - \lambda) \cdot 0 - \left(\frac{-2\rho\tau - \eta\beta\delta\xi - \lambda\rho}{\rho}\right) \cdot \\ & \left(\frac{\rho}{\delta}\right) \cdot \delta - 0 \cdot \left(\frac{\rho\tau + \eta\beta\delta\xi}{\rho}\right) \cdot (-\psi\alpha - \gamma + \alpha\gamma - \tau - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha\delta\rho\tau\psi - 2\gamma\delta\rho\tau + 2\alpha\gamma\delta\rho\tau - 2\delta\rho\tau^2 - 2\delta\lambda\rho\tau - 2\alpha\rho\tau^2\psi - 2\gamma\rho\tau^2 + 2\alpha\gamma\rho\tau^2 \\
& - 2\rho\tau^3 - 2\lambda\rho\tau^2 - 2\alpha\lambda\rho\tau\psi - 2\gamma\lambda\rho\tau + 2\alpha\gamma\lambda\rho\tau - 2\lambda\rho\tau^2 - 2\lambda^2\rho\tau - \alpha\beta\delta^2\eta\xi\psi \\
& - \beta\gamma\delta^2\eta\xi + \alpha\beta\gamma\delta^2\eta\xi - \beta\delta^2\eta\xi\tau - \beta\delta^2\eta\lambda\xi - \alpha\beta\delta\eta\xi\tau\psi - \beta\gamma\delta\eta\xi\tau + \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi\tau - \\
& \beta\delta\eta\xi\tau^2 - \beta\delta\eta\lambda\xi\tau - \alpha\beta\delta\eta\lambda\xi\psi - \beta\gamma\delta\eta\lambda\xi + \alpha\beta\gamma\delta\eta\lambda\xi - \beta\delta\eta\lambda\xi\tau - \beta\delta\eta\lambda^2\xi - \\
& \alpha\delta\lambda\rho\psi - \gamma\delta\lambda\rho + \alpha\gamma\delta\lambda\rho - \delta\lambda\rho\tau - \delta\lambda^2\rho - \alpha\lambda\rho\tau\psi - \gamma\lambda\rho\tau + \alpha\gamma\lambda\rho\tau - \lambda\rho\tau^2 - \\
& \lambda^2\rho\tau - \alpha\lambda^2\rho\psi - \gamma\lambda^2\rho + \alpha\gamma\lambda^2\rho - \lambda^2\rho\tau - \lambda^3\rho
\end{aligned}$$

$$\rho$$

$$+0 - \frac{\rho^2\tau + \beta\delta\eta\xi\rho}{\rho} - 0 + \frac{2\rho^2\tau + \beta\delta\eta\xi\rho + \lambda\rho^2}{\rho} - 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
& -2\alpha\delta\rho\tau\psi - 2\gamma\delta\rho\tau + 2\alpha\gamma\delta\rho\tau - 2\delta\rho\tau^2 - 2\delta\lambda\rho\tau - 2\alpha\rho\tau^2\psi - 2\gamma\rho\tau^2 + 2\alpha\gamma\rho\tau^2 \\
& - 2\rho\tau^3 - 2\lambda\rho\tau^2 - 2\alpha\lambda\rho\tau\psi - 2\gamma\lambda\rho\tau + 2\alpha\gamma\lambda\rho\tau - 2\lambda\rho\tau^2 - 2\lambda^2\rho\tau - \alpha\beta\delta^2\eta\xi\psi \\
& - \beta\gamma\delta^2\eta\xi + \alpha\beta\gamma\delta^2\eta\xi - \beta\delta^2\eta\xi\tau - \beta\delta^2\eta\lambda\xi - \alpha\beta\delta\eta\xi\tau\psi - \beta\gamma\delta\eta\xi\tau + \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi\tau \\
& - \beta\delta\eta\xi\tau^2 - \beta\delta\eta\lambda\xi\tau - \alpha\beta\delta\eta\lambda\xi\psi - \beta\gamma\delta\eta\lambda\xi + \alpha\beta\gamma\delta\eta\lambda\xi - \beta\delta\eta\lambda\xi\tau - \beta\delta\eta\lambda^2\xi - \\
& \alpha\delta\lambda\rho\psi - \gamma\delta\lambda\rho + \alpha\gamma\delta\lambda\rho - \delta\lambda\rho\tau - \delta\lambda^2\rho - \alpha\lambda\rho\tau\psi - \gamma\lambda\rho\tau + \alpha\gamma\lambda\rho\tau - \lambda\rho\tau^2 - \\
& \lambda^2\rho\tau - \alpha\lambda^2\rho\psi - \gamma\lambda^2\rho + \alpha\gamma\lambda^2\rho - \lambda^2\rho\tau - \lambda^3\rho + \rho^2\tau + \lambda\rho^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda^3\rho - 4\lambda^2\rho\tau - \beta\delta\eta\lambda^2\xi + \alpha\gamma\lambda^2\rho - \gamma\lambda^2\rho - \delta\lambda^2\rho - \alpha\lambda^2\rho\psi - 5\lambda\rho\tau^2 - 3\gamma\lambda\rho\tau \\
& - 3\delta\lambda\rho\tau - 3\alpha\lambda\rho\tau\psi + \lambda\rho^2 + 3\alpha\gamma\lambda\rho\tau + \alpha\gamma\delta\lambda\rho - \gamma\delta\lambda\rho - \beta\delta^2\eta\lambda\xi - \beta\gamma\delta\eta\lambda\xi \\
& - 2\beta\delta\eta\lambda\xi\tau + \alpha\beta\gamma\delta\eta\lambda\xi - \alpha\beta\delta\eta\lambda\xi\psi - \alpha\delta\lambda\rho\psi - \beta\gamma\delta^2\eta\xi + \alpha\beta\gamma\delta^2\eta\xi - 2\rho\tau^3 \\
& - \beta\delta\eta\xi\tau^2 + 2\alpha\gamma\rho\tau^2 - 2\gamma\rho\tau^2 - 2\delta\rho\tau^2 - \beta\delta^2\eta\xi\tau + \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi\tau - \beta\gamma\delta\eta\xi\tau + \rho^2\tau \\
& + 2\alpha\gamma\delta\rho\tau - 2\gamma\delta\rho\tau - \alpha\beta\delta^2\eta\xi\psi - 2\alpha\rho\tau^2\psi - \alpha\beta\delta\eta\xi\tau\psi - 2\alpha\delta\rho\tau\psi = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\rho)\lambda^3 - (4\rho\tau + \beta\delta\eta\xi - \alpha\gamma\rho + \gamma\rho + \delta\rho + \alpha\rho\psi)\lambda^2 - (3\gamma\rho\tau + 3\delta\rho\tau - \rho^2 \\
& + 3\alpha\rho\tau\psi - 3\alpha\gamma\rho\tau - \alpha\gamma\delta\rho + \gamma\delta\rho + \beta\delta^2\eta\xi + \beta\gamma\delta\eta\xi + 2\beta\delta\eta\xi\tau - \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi \\
& + \alpha\beta\delta\eta\xi\psi + \alpha\delta\rho\psi + 5\rho\tau^2)\lambda - (\beta\gamma\delta^2\eta\xi - \alpha\beta\gamma\delta^2\eta\xi + 2\rho\tau^3 + \beta\delta\eta\xi\tau^2 - \\
& 2\alpha\gamma\rho\tau^2 + 2\gamma\rho\tau^2 + 2\delta\rho\tau^2 + \beta\delta^2\eta\xi\tau - \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi\tau + \beta\gamma\delta\eta\xi\tau - \rho^2\tau - 2\alpha\gamma\delta\rho\tau \\
& + 2\gamma\delta\rho\tau + \alpha\beta\delta^2\eta\xi\psi + 2\alpha\rho\tau^2\psi + \alpha\beta\delta\eta\xi\tau\psi + 2\alpha\delta\rho\tau\psi) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho)\lambda^3 + (4\rho\tau + \beta\delta\eta\xi - \alpha\gamma\rho + \gamma\rho + \delta\rho + \alpha\rho\psi)\lambda^2 + (3\gamma\rho\tau + 3\delta\rho\tau - \rho^2 \\
& + 3\alpha\rho\tau\psi - 3\alpha\gamma\rho\tau - \alpha\gamma\delta\rho + \gamma\delta\rho + \beta\delta^2\eta\xi + \beta\gamma\delta\eta\xi + 2\beta\delta\eta\xi\tau - \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi \\
& + \alpha\beta\delta\eta\xi\psi + \alpha\delta\rho\psi + 5\rho\tau^2)\lambda + (\beta\gamma\delta^2\eta\xi - \alpha\beta\gamma\delta^2\eta\xi + 2\rho\tau^3 + \beta\delta\eta\xi\tau^2 - \\
& 2\alpha\gamma\rho\tau^2 + 2\gamma\rho\tau^2 + 2\delta\rho\tau^2 + \beta\delta^2\eta\xi\tau - \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi\tau + \beta\gamma\delta\eta\xi\tau - \rho^2\tau - 2\alpha\gamma\delta\rho\tau \\
& + 2\gamma\delta\rho\tau + \alpha\beta\delta^2\eta\xi\psi + 2\alpha\rho\tau^2\psi + \alpha\beta\delta\eta\xi\tau\psi + 2\alpha\delta\rho\tau\psi) = 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (4.16)$$

Dengan

$$a_0 = \rho$$

$$a_1 = 4\rho\tau + \beta\delta\eta\xi - \alpha\gamma\rho + \gamma\rho - \delta\rho - \alpha\rho\psi$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & 3\gamma\rho\tau + 3\delta\rho\tau - \rho^2 + 3\alpha\rho\tau\psi - 3\alpha\gamma\rho\tau - \alpha\gamma\delta\rho + \gamma\delta\rho + \beta\delta^2\eta\xi + \beta\gamma\delta\eta\xi \\
& + 2\beta\delta\eta\xi\tau - \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi + \alpha\beta\delta\eta\xi\psi + \alpha\delta\rho\psi + 5\rho\tau^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & \beta\gamma\delta^2\eta\xi - \alpha\beta\gamma\delta^2\eta\xi + 2\rho\tau^3 + \beta\delta\eta\xi\tau^2 - 2\alpha\gamma\rho\tau^2 + 2\gamma\rho\tau^2 + 2\delta\rho\tau^2 + \\
& \beta\delta^2\eta\xi\tau - \alpha\beta\gamma\delta\eta\xi\tau + \beta\gamma\delta\eta\xi\tau - \rho^2\tau - 2\alpha\gamma\delta\rho\tau + 2\gamma\delta\rho\tau + \alpha\beta\delta^2\eta\xi\psi + \\
& 2\alpha\rho\tau^2\psi + \alpha\beta\delta\eta\xi\tau\psi + 2\alpha\delta\rho\tau\psi
\end{aligned}$$

Karena nilai dari akar-akar pada persamaan karakteristik (4.16) sulit untuk didapatkan, maka dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz akan diketahui sifat kestabilan dari titik kesetimbangan E^* . Sehingga berdasarkan kriteria tersebut, titik kesetimbangan E^* akan stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi-kondisi berikut

1. $a_0 > 0$
2. $a_1 > 0$
3. $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$
4. $a_3 > 0$

Sehingga dengan menggunakan parameter-parameter pada Tabel 4.2 didapatkan

1. $a_0 = 0.0230563125 > 0$,
2. $a_1 = -0.005328843338 < 0$,
3. $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = -0,0000005639381147 < 0$,
4. $a_3 = 0.000004532916074 > 0$

Dengan

$$a_2 = 0.00008621491684$$

Berdasarkan perhitungan di atas didapatkan bahwa syarat 2 dan 3 tidak terpenuhi sehingga terdapat nilai eigen pada persamaan karakteristik titik kesetimbangan endemik dengan nilai positif, yang berarti titik kesetimbangan endemik pada model SEIHCRD tidak stabil.

3. Analisis Kestabilan Global

Berdasarkan sistem (14) bahwa S, E dan I tidak bergantung pada H, C, R dan D maka analisis dinamik menggunakan S, E dan I

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \xi N - \frac{\eta\beta SI}{N} - \tau S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\eta\beta SI}{N} - (\delta + \tau)E \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - (\psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau)I\end{aligned}$$

Misalkan $\phi = \psi\alpha + \gamma - \alpha\gamma + \tau$

Maka, titik kesetimbangan:

$$\begin{aligned}E^0 &= \left(\frac{\xi N}{\tau}, 0, 0 \right) \\ E^* &= \left(\frac{\rho N}{\eta\beta\delta}, \frac{\eta\beta\delta\xi N - \rho\tau N}{\eta\beta\delta(\delta + \tau)}, \frac{\eta\beta\delta\xi N + \rho\tau N}{\eta\beta\rho} \right)\end{aligned}$$

dan bilangan reproduksi dasar (R_0):

$$R_0 = \frac{\eta\beta\delta\xi}{\tau\phi(\delta + \tau)}$$

Teorema 1

Titik kesetimbangan bebas penyakit E^0 dari model stabil asimtotik global jika $R_0 \leq 1$ dan tak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti:

Definisikan Fungsi Lyapunov

$$\mathcal{L} = \left(S - S^0 - S^0 \ln \left(\frac{S}{S^0} \right) \right) + E + I$$

Sehingga turunan Fungsi Lyapunov terhadap waktu adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \left(1 - \frac{S^0}{S} \right) \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} \\ &= \frac{1}{S} (S - S^0) \left(\xi N - \frac{\eta \beta S I}{N} - \tau S \right) + \left(\frac{\eta \beta S I}{N} - (\delta + \tau) E \right) + (\delta E - \phi I) \\ &= \frac{1}{S} (S - S^0) (\xi N - \tau S) + \left(\frac{\eta \beta S^0 I}{N} - (\delta + \tau) E \right) + (\delta E - \phi I) \\ &= -\frac{\tau}{S} (S - S^0)^2 + \left(\frac{\eta \beta S^0}{N} - \phi \right) I - \tau E \\ &= -\frac{\tau}{S} (S - S^0)^2 - \tau \phi \left(1 - \frac{R_0}{\delta / (\delta + \tau)} \right) I - \tau E \end{aligned}$$

Jika $R_0 \leq 1$ maka $\mathcal{L}' < 0$ untuk setiap $(S, E, I) \neq (S^0, 0, 0)$. Ketunggalan terbukti bahwa $\{E^0\}$ adalah himpunan yang memenuhi sifat $\mathcal{L}' = 0$. Berdasarkan prinsip Invarian Lasalle titik kesetimbangan E^0 stabil asimtotik global.

Teorema 2

Titik kesetimbangan endemik E^* dari model stabil asimtotik global jika $R_0 > 1$.

Bukti:

Definisikan Fungsi Lyapunov kuadratik

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} [(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*)]^2$$

Sehingga turunan Fungsi Lyapunov terhadap waktu adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} &= [(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*)] \frac{d(S + E + I)}{dt} \\ &= [(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*)] (\xi N - \tau S - \tau E - \phi I) \end{aligned}$$

Asumsikan $\xi N = \tau S^* + \tau E^* - \phi I^*$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= [(S - S^*) + (E - E^*) + (I - I^*)][-\tau(S - S^*) - \tau(E - E^*) - \phi(I - I^*)] \\ &= -\tau(S - S^*)^2 - \tau(E - E^*)^2 - \phi(I - I^*)^2 - \tau(S - S^*)[(E - E^*) + (I - I^*)] \\ &\quad - \tau(E - E^*)[(S - S^*) + (I - I^*)] - \phi(I - I^*)[(S - S^*) + (E - E^*)]\end{aligned}$$

$\frac{dV}{dt}$ bernilai negatif dan $\frac{dV}{dt} = 0$ jika dan hanya jika $S = S^*, E = E^*$ dan $I = I^*$. Himpunan solusi yang tidak memuat solusi lain kecuali E^* maka untuk setiap solusi menuju titik kesetimbangan E^* ketika $t \rightarrow \infty$. Berdasarkan prinsip Invarian Lasalle titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik global.

4.2 Simulasi Numerik Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat

Berdasarkan persamaan (2.10) yaitu $y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right)$

maka diperoleh:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.17)$$

$$E_{i+1} = E_i + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (4.18)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad (4.19)$$

$$H_{i+1} = H_i + \frac{h}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \quad (4.20)$$

$$C_{i+1} = C_i + \frac{h}{6}(o_1 + 2o_2 + 2o_3 + o_4) \quad (4.21)$$

$$R_{i+1} = R_i + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) \quad (4.22)$$

$$D_{i+1} = D_i + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4) \quad (4.23)$$

Dengan

$$k_1 = f_S(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \xi N - \frac{\eta \beta I_i S_i}{N} - \tau S_i$$

$$l_1 = f_E(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \frac{\eta\beta I_i S_i}{N} - \delta E_i - \tau E_i$$

$$m_1 = f_I(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \delta E_i - \psi\alpha I_i - \gamma I_i + \alpha\gamma I_i - \tau I_i$$

$$n_1 = f_H(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \psi\alpha I_i - \sigma\theta H_i - \chi H_i + \chi\theta H_i - \tau H_i$$

$$o_1 = f_C(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \sigma\theta H_i - \varphi\omega C_i - \mu C_i + \mu\omega C_i - \tau C_i$$

$$p_1 = f_R(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \gamma I_i - \alpha\gamma I_i + \mu C_i - \mu\omega C_i + \chi H_i - \chi\theta H_i - \tau R_i$$

$$q_1 = f_D(t_i, S_i, E_i, I_i, H_i, C_i, R_i, D_i)$$

$$= \varphi\omega C_i$$

$$k_2 = f_S\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right)$$

$$= \xi N - \frac{\eta\beta\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right)\left(S_i + \frac{k_1 h}{2}\right)}{N} - \tau\left(S_i + \frac{k_1 h}{2}\right)$$

$$l_2 = f_E\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right)$$

$$= \frac{\eta\beta\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right)\left(S_i + \frac{k_1 h}{2}\right)}{N} - \delta\left(E_i + \frac{l_1 h}{2}\right) - \tau\left(E_i + \frac{l_1 h}{2}\right)$$

$$m_2 = f_I\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right)$$

$$= \delta\left(E_i + \frac{l_1 h}{2}\right) - \psi\alpha\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right) - \gamma\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right) + \alpha\gamma\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right) - \tau\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right)$$

$$n_2 = f_H\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \psi\alpha\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right) - \sigma\theta\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) - \chi\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) + \chi\theta\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) \\
&\quad - \tau\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) \\
o_2 &= f_C\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right) \\
&= \sigma\theta\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) - \varphi\omega\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) - \mu\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) + \mu\omega\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) - \tau\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) \\
p_2 &= f_R\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right) \\
&= \gamma\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right) - \alpha\gamma\left(I_i + \frac{m_1 h}{2}\right) + \mu\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) - \mu\omega\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) + \chi\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) \\
&\quad - \chi\theta\left(H_i + \frac{n_1 h}{2}\right) - \tau\left(R_i + \frac{p_1 h}{2}\right) \\
q_2 &= f_D\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_1 h}{2}, E_i + \frac{l_1 h}{2}, I_i + \frac{m_1 h}{2}, H_i + \frac{n_1 h}{2}, C_i + \frac{o_1 h}{2}, R_i + \frac{p_1 h}{2}, D_i + \frac{q_1 h}{2}\right) \\
&= \varphi\omega\left(C_i + \frac{o_1 h}{2}\right) \\
k_3 &= f_S\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2}\right) \\
&= \xi N - \frac{\eta\beta\left(I_i + \frac{m_2 h}{2}\right)\left(S_i + \frac{k_2 h}{2}\right)}{N} - \tau\left(S_i + \frac{k_2 h}{2}\right) \\
l_3 &= f_E\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2}\right) \\
&= \frac{\eta\beta\left(I_i + \frac{m_2 h}{2}\right)\left(S_i + \frac{k_2 h}{2}\right)}{N} - \delta\left(E_i + \frac{l_2 h}{2}\right) - \tau\left(E_i + \frac{l_2 h}{2}\right) \\
m_3 &= f_I\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2}\right) \\
&\quad + \frac{q_2 h}{2} \\
&= \delta\left(E_i + \frac{l_2 h}{2}\right) - \psi\alpha\left(I_i + \frac{m_2 h}{2}\right) - \gamma\left(I_i + \frac{m_2 h}{2}\right) + \alpha\gamma\left(I_i + \frac{m_2 h}{2}\right) - \tau\left(I_i + \frac{m_2 h}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$n_3 = f_H \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2} \right)$$

$$= \psi \alpha \left(I_i + \frac{m_2 h}{2} \right) - \sigma \theta \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right) - \chi \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right) + \chi \theta \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right) - \tau \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right)$$

$$o_3 = f_C \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2} \right)$$

$$= \sigma \theta \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right) - \varphi \omega \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right) - \mu \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right) + \mu \omega \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right) - \tau \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right)$$

$$p_3 = f_R \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2} \right)$$

$$= \gamma \left(I_i + \frac{m_2 h}{2} \right) - \alpha \gamma \left(I_i + \frac{m_2 h}{2} \right) + \mu \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right) - \mu \omega \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right) + \chi \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right) - \chi \theta \left(H_i + \frac{n_2 h}{2} \right) - \tau \left(R_i + \frac{p_2 h}{2} \right)$$

$$q_3 = f_D \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2} \right)$$

$$= \varphi \omega \left(C_i + \frac{o_2 h}{2} \right)$$

$$k_4 = \xi N - \frac{\eta \beta (I_i + m_3 h)(S_i + k_3 h)}{N} - \tau(S_i + k_3 h)$$

$$l_4 = f_E(t_i + h, S_i + k_3 h, E_i + l_3 h, I_i + m_3 h, H_i + n_3 h, C_i + o_3 h, R_i + p_3 h, D_i + q_3 h) = \frac{\eta \beta (I_i + m_3 h)(S_i + k_3 h)}{N} - \delta(E_i + l_3 h) - \tau(E_i + l_3 h)$$

$$\begin{aligned}
m_4 &= f_I(t_i + h, S_i + k_3h, E_i + l_3h, I_i + m_3h, H_i + n_3h, C_i + o_3h, R_i + p_3h, D_i \\
&\quad + q_3h) \\
&= \delta(E_i + l_3h) - \psi\alpha(I_i + m_3h) - \gamma(I_i + m_3h) + \alpha\gamma(I_i + m_3h) - \tau(I_i + m_3h) \\
n_4 &= f_H(t_i + h, S_i + k_3h, E_i + l_3h, I_i + m_3h, H_i + n_3h, C_i + o_3h, R_i + p_3h, D_i \\
&\quad + q_3h) \\
&= \psi\alpha(I_i + m_3h) - \sigma\theta(H_i + n_3h) - \chi(H_i + n_3h) + \chi\theta(H_i + n_3h) - \tau(H_i + n_3h) \\
o_4 &= f_C(t_i + h, S_i + k_3h, E_i + l_3h, I_i + m_3h, H_i + n_3h, C_i + o_3h, R_i + p_3h, D_i \\
&\quad + q_3h) \\
&= \sigma\theta(H_i + n_3h) - \varphi\omega(C_i + o_3h) - \mu(C_i + o_3h) + \mu\omega(C_i + o_3h) - \tau(C_i + o_3h) \\
p_4 &= f_R(t_i + h, S_i + k_3h, E_i + l_3h, I_i + m_3h, H_i + n_3h, C_i + o_3h, R_i + p_3h, D_i \\
&\quad + q_3h) \\
&= \gamma(I_i + m_3h) - \alpha\gamma(I_i + m_3h) + \mu(C_i + o_3h) - \mu\omega(C_i + o_3h) + \chi(H_i + n_3h) \\
&\quad - \chi\theta(H_i + n_3h) - \tau(R_i + p_3h) \\
q_4 &= f_D(t_i + h, S_i + k_3h, E_i + l_3h, I_i + m_3h, H_i + n_3h, C_i + o_3h, R_i + p_3h, D_i \\
&\quad + q_3h) \\
&= \varphi\omega(C_i + o_3h)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari nilai tetapan dari rumus Runge-Kutta pada persamaan (4.17) – (4.23) dengan perhitungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= (0.00625)(272229372) - \frac{(1)(0.06)(30738)(272007302)}{272229372} - (0.00625) \\
&\quad (272008906) \\
&= 951.1531962433364 \\
l_1 &= \frac{(1)(0.06)(30738)(272008906)}{272229372} - (0.14)(71788) - (0.00625)(71788) \\
&= -7.074192404409184 \\
m_1 &= (0.14)(71788) - (0.142)(0.95)(30738) - (0.33)(30738) + (0.95) \\
&\quad (0.33)(30738) - (0.00625)(30738)
\end{aligned}$$

$$= -10.15790677056216$$

$$\begin{aligned} n_1 &= (0.142)(0.95)(30738) - (0.2)(0.25)(70568) - (0.07)(70568) + (0.07) \\ &\quad (0.25)(70568) - (0.00625)(70568) \\ &= -27.86872445688786 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_1 &= (0.2)(0.25)(70568) - (0.125)(0.485)(7926) - (0.67)(7926) + (0.67) \\ &\quad (0.485)(7926) - (0.00625)(7926) \\ &= -3.953709363652501 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= (0.33)(30738) - (0.95)(0.33)(30738) + (0.67)(7926) - (0.67)(0.485) \\ &\quad (7926) + (0.07)(70568) - (0.07)(0.25)(70568) - (0.00625)(39446) \\ &= -848.5151443955157 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= (0.125)(0.485)(7926) \\ &= 4.009256058479258 \end{aligned}$$

$$k_3 = f_s \left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{k_2 h}{2}, E_i + \frac{l_2 h}{2}, I_i + \frac{m_2 h}{2}, H_i + \frac{n_2 h}{2}, C_i + \frac{o_2 h}{2}, R_i + \frac{p_2 h}{2}, D_i + \frac{q_2 h}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= (0.00625)(272229372) - \\ &\quad \frac{(1)(0.06) \left(30738 + \frac{(-10.15774470392058)(0.01)}{2} \right)}{272229372} \\ &\quad \left(272007302 + \frac{(956.5178317935206)(0.01)}{2} \right) - (0.00625) \\ &\quad \left(272007302 + \frac{(956.5178317935206)(0.01)}{2} \right) \\ &= 951.1265181791969 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{(1)(0.06) \left(30738 + \frac{(-10.15790677056216)(0.01)}{2} \right)}{272229372} \\ &\quad \left(272008906 + \frac{(951.1531962433364)(0.01)}{2} \right) - ((0.14) + (0.00625)) \\ &\quad \left(71788 + \frac{(-7.074192404409184)(0.01)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= -7.072064874567189$$

$$m_2 = (0.14) \left(71788 + \frac{(-7.074192404409184)(0.01)}{2} \right) \\ -((0.142)(0.95) + (0.33) - (0.95)(0.33) + (0.00625)) \\ \left(30738 + \frac{(-10.15790677056216)(0.01)}{2} \right)$$

$$= -10.15485173523335$$

$$n_2 = (0.142)(0.95) \left(30738 + \frac{(-10.15790677056216)(0.01)}{2} \right) \\ -((0.2)(0.25) + (0.07) - (0.07)(0.25) + (0.00625)) \\ \left(70568 + \frac{(-27.86872445688786)(0.01)}{2} \right)$$

$$= -27.86042234608118$$

$$o_2 = (0.2)(0.25) \left(70568 + \frac{(-27.86872445688786)(0.01)}{2} \right) \\ -((0.125)(0.485) + (0.67) - (0.67)(0.485) + (0.00625)) \\ \left(7926 + \frac{(-3.953709363652501)(0.01)}{2} \right)$$

$$= -3.952533386118616$$

$$p_2 = ((0.33) - (0.95)(0.33)) \\ \left(30738 + \frac{(-10.15790677056216)(0.01)}{2} \right) \\ +((0.67) - (0.67)(0.485)) \\ \left(7926 + \frac{(-3.953709363652501)(0.01)}{2} \right) \\ +((0.07) - (0.07)(0.25)) \\ \left(70568 + \frac{(-27.86872445688786)(0.01)}{2} \right)$$

$$-(0.00625) \left(39446 + \frac{(-848.5151443955157)(0.01)}{2} \right)$$

$$= -848.5036030018114$$

$$q_2 = (0.125)(0.485) \left(7926 + \frac{(4.009256058479258)(0.01)}{2} \right)$$

$$= 4.008057590328402$$

$$k_3 = (0.00625)(272229372) -$$

$$\frac{(1)(0.06) \left(30738 + \frac{(-10.15485173523335)(0.01)}{2} \right)}{272229372}$$

$$\left(272008906 + \frac{(951.1265181791969)(0.01)}{2} \right) - (0.00625)$$

$$\left(272008906 + \frac{(951.1265181791969)(0.01)}{2} \right)$$

$$= 951.1265180970076$$

$$l_3 = \frac{(1)(0.06) \left(30738 + \frac{(-10.15485173523335)(0.01)}{2} \right)}{272229372}$$

$$\left(272008906 + \frac{(951.1265181791969)(0.01)}{2} \right) - ((0.14) + (0.00625))$$

$$\left(71788 + \frac{(-7.072064874567189)(0.01)}{2} \right)$$

$$= -7.072065514335547$$

$$m_3 = (0.14) \left(71788 + \frac{(-7.072064874567189)(0.01)}{2} \right)$$

$$-((0.142)(0.95) + (0.33) - (0.95)(0.33) + (0.00625))$$

$$\left(30738 + \frac{(-10.15485173523335)(0.01)}{2} \right)$$

$$= -10.15485265409406$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= (0.142)(0.95) \left(30738 + \frac{(-10.15485173523335)(0.01)}{2} \right) \\
&\quad - ((0.2)(0.25) + (0.07) - (0.07)(0.25) + (0.00625)) \\
&\quad \left(70568 + \frac{(-27.86042234608118)(0.01)}{2} \right) \\
&= -27.86042479973261
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o_3 &= (0.2)(0.25) \left(70568 + \frac{(-27.86042234608118)(0.01)}{2} \right) \\
&\quad - ((0.125)(0.485) + (0.67) - (0.67)(0.485) + (0.00625)) \\
&\quad \left(7926 + \frac{(-3.952533386118616)(0.01)}{2} \right) \\
&= -3.952533732663641
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 &= ((0.33) - (0.95)(0.33)) \\
&\quad \left(30738 + \frac{(-10.15485173523335)(0.01)}{2} \right) \\
&\quad + ((0.67) - (0.67)(0.485)) \\
&\quad \left(7926 + \frac{(-3.952533386118616)(0.01)}{2} \right) \\
&\quad + ((0.07) - (0.07)(0.25)) \\
&\quad \left(70568 + \frac{(-27.86042234608118)(0.01)}{2} \right) \\
&\quad - (0.00625) \left(39446 + \frac{(-848.5036030018114)(0.01)}{2} \right) \\
&= -848.5035989022803
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= (0.125)(0.485) \left(7926 + \frac{(-3.952533386118616)(0.01)}{2} \right) \\
&= 4.008057946796592
\end{aligned}$$

$$k_4 = (0.00625)(272229372) -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1)(0.06)(30738 + (-10.15485265409406)(0.01))}{272229372} \\
& (27208906 + (951.1265180970076)(0.01)) - (0.00625) \\
& (272008906 + (951.1265180970076)(0.01)) \\
& = 951.0998399513774 \\
l_4 &= \frac{(1)(0.06)(30738 + (-10.15485265409406)(0.01))}{272229372} \\
& (272008906 + (951.1265180970076)(0.01)) - ((0.14) + (0.00625)) \\
& (71788 + (-7.072065514335547)(0.01)) \\
& = -7.069938623983692 \\
m_4 &= (0.14)(71788 + (-7.072065514335547)(0.01)) \\
& -((0.142)(0.95) + (0.33) - (0.95)(0.33) + (0.00625)) \\
& (30738 + (-10.15485265409406)(0.01)) \\
& = -10.15179853707305 \\
n_4 &= (0.142)(0.95)(30738 + (-10.15485265409406)(0.01)) \\
& -((0.2)(0.25) + (0.07) - (0.07)(0.25) + (0.00625)) \\
& (70568 + (-27.86042479973261)(0.01)) \\
& = -27.85212514114853 \\
o_4 &= (0.2)(0.25)(70568 + (-27.86042479973261)(0.01)) \\
& -((0.125)(0.485) + (0.67) - (0.67)(0.485) + (0.00625)) \\
& (7926 + (-3.952533732663641)(0.01)) \\
& = -3.951358101474093 \\
p_4 &= ((0.33) - (0.95)(0.33)) \\
& (30738 + (-10.15485265409406)(0.01)) \\
& +((0.67) - (0.67)(0.485)) \\
& (7926 + (-3.952533732663641)(0.01))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +((0.07) - (0.07)(0.25)) \\
& (70568 + (-27.86042479973261)(0.01)) \\
& -(0.00625)(39446 + (-848.5035989022803)(0.01)) \\
& = -848.4920534119367
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_4 & = (0.125)(0.485)(7926 + (-3.952533732663641)(0.01)) \\
& = 4.006859834903832
\end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan nilai tetapan di atas, berikut merupakan iterasi pertama dari model SEIHCRD dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat:

$$\begin{aligned}
S_1 & = 272007302 + \frac{1}{6}((951.1531962433364) + 2(951.1265181791969) \\
& \quad + 2(951.1265180970076) + (951.0998399513774)) \\
& = 272008906
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 & = 71788 + \frac{1}{6}((-7.074192404409184) \\
& \quad + 2(-7.072064874567189) + 2(-7.072065514335547) \\
& \quad + (-7.069938623983692)) \\
& = 71788
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 & = 30738 + \frac{1}{6}((-10.15790677056216) \\
& \quad + 2(-10.15485173523335) \\
& \quad + 2(-10.15485265409406) \\
& \quad + (-10.15179853707305)) \\
& = 30738
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1 & = 70568 + \frac{1}{6}((-27.86872445688786) \\
& \quad + 2(-27.86042234608118) \\
& \quad + 2(-27.86042479973261) \\
& \quad + (-27.85212514114853))
\end{aligned}$$

$$= 70568$$

$$C_1 = 7926 + \frac{1}{6}((-3.953709363652501)$$

$$+2(-3.952533386118616)$$

$$+2(-3.952533732663641)$$

$$+(-3.951358101474093)$$

$$= 7926$$

$$R_1 = 39446 + \frac{1}{6}((-848.5151443955157) + 2(-848.5036030018114)$$

$$+2(-848.5035989022803) + (-848.4920534119367))$$

$$= 39446$$

$$D_1 = 1604 + \frac{1}{6}((4.009256058479258) + 2(4.008057590328402)$$

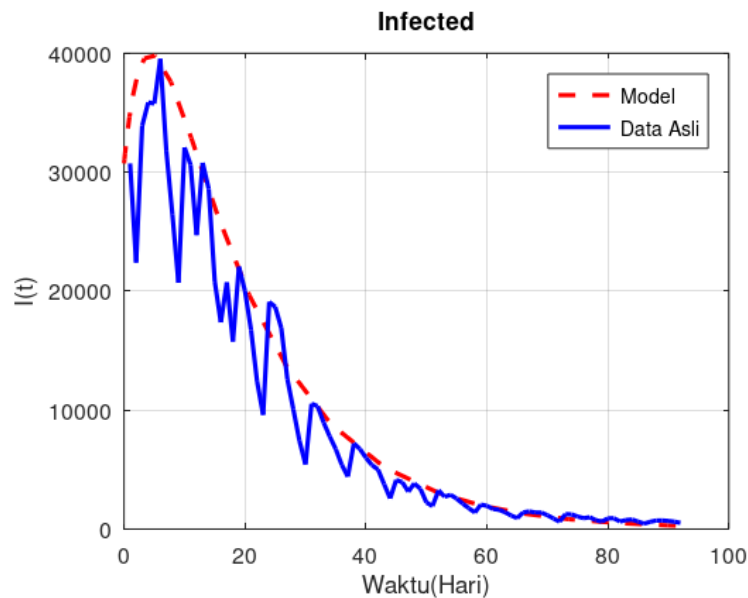
$$+2(4.008057946796592) + (4.006859834903832))$$

$$= 1604$$

Jadi pada iterasi pertama yaitu ketika $t = 1$ hari, diperoleh nilai $S = 272008906$, $E = 71788$, $I = 30738$, $H = 70568$, $C = 7926$, $R = 39446$, $D = 1604$. Kemudian, untuk perhitungan iterasi kedua hingga terakhir akan dilakukan dengan menggunakan *software Octave* dengan $t = 92$ hari. Tabel hasil perhitungan pada *Octave* akan ditampilkan pada lampiran.

4.3 Interpretasi Hasil

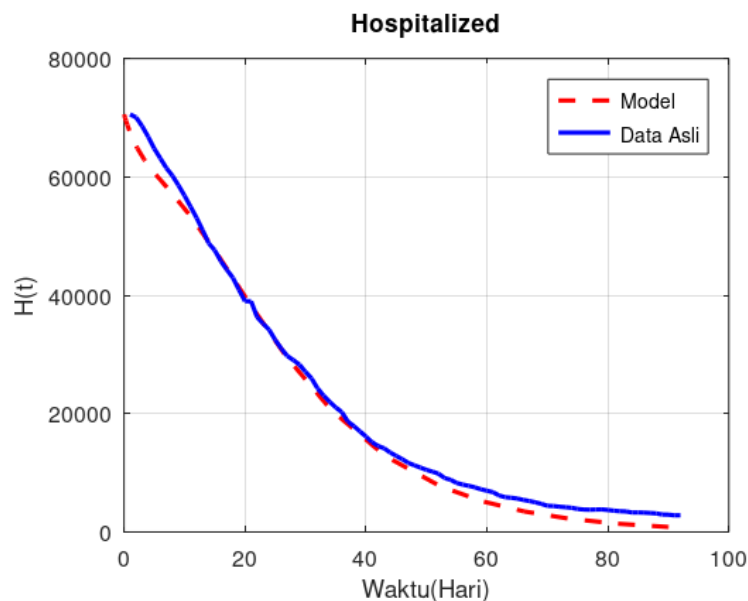
4.3.1 Perbandingan Grafik Solusi I , H dan C dengan Grafik Data Asli



Gambar 4.1 Grafik *Infected* pada Model dan Data Asli

Setelah melakukan beberapa kali simulasi dengan menggunakan nilai parameter yang berbeda, didapatkan hasil bahwa grafik dari model dapat sangat mendekati grafik dari data asli pada kasus *Infected*, *Hospitalized* dan *Critical* ketika menggunakan parameter $\beta = 0.06$, $\delta = 0.14$, $\alpha = 0.95$, $\omega = 0.485$, $\theta = 0.25$ dan parameter lain sesuai pada Tabel 4.2. Pada Gambar 4.1, dapat kita lihat bahwa terdapat 2 grafik dari kasus infeksi pada penyebaran COVID-19 di Indonesia. Dimana grafik dengan garis berwarna biru merupakan grafik dari data asli, sedangkan grafik dengan garis putus-putus berwarna merah merupakan hasil dari simulasi model. Berdasarkan hasil dari 2 grafik tersebut, dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan parameter $\beta = 0.06$, $\delta = 0.14$, $\alpha = 0.95$, $\omega = 0.485$, dan $\theta = 0.25$ maka model SEIHCRD dapat menangkap puncak dari kasus infeksi yang terjadi di Indonesia walaupun diperoleh error absolut sebesar 28%. Dimana pada model, puncak kasus infeksi terjadi lebih awal yaitu pada hari ke-5,

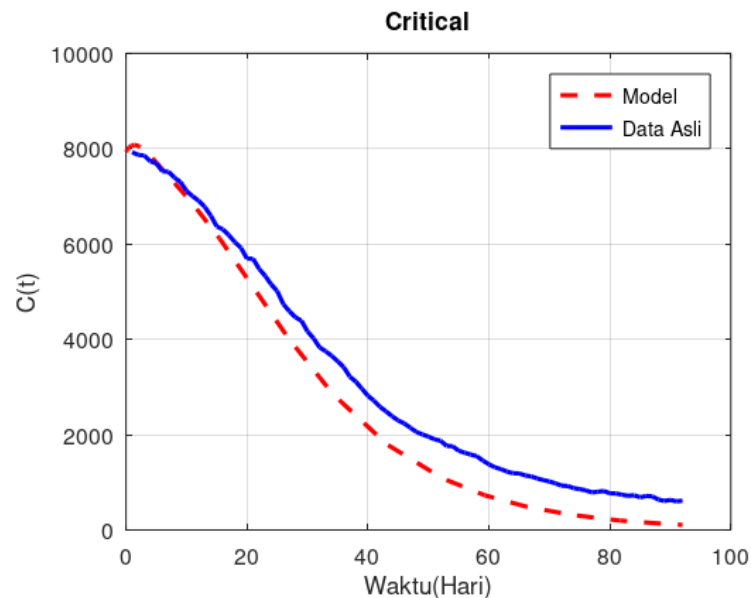
sedangkan pada data asli terjadi pada hari ke-7. Hal ini tentunya merupakan hasil yang baik, dimana model dapat memprediksi lebih awal mengenai kapan terjadinya puncak infeksi COVID-19. Sehingga pemerintah dan seluruh masyarakat di Indonesia, dapat melakukan persiapan yang lebih awal dan matang untuk menghadapi terjadinya puncak infeksi kasus. Kemudian berdasarkan parameter yang digunakan, kasus infeksi COVID-19 di Indonesia dapat berkurang dan mereda seiring bertambahnya waktu, jika laju kontak individu rentan dengan individu terinfeksi (β) rendah, laju perpindahan individu di kelas *Exposed* ke kelas *Infected* (δ) rendah, probabilitas individu yang terinfeksi dirawat inap (α) tinggi, probabilitas pasien COVID-19 menjadi kritis dan masuk ICU (θ) rendah, dan probabilitas pasien kritis menjadi meninggal (ω) rendah.



Gambar 4.2 Grafik *Hospitalized* pada Model dan Data Asli

Berikutnya pada Gambar 4.2, dapat dilihat bahwa terdapat 2 grafik dari kasus rawat inap pada penyebaran COVID-19 di Indonesia. Dimana grafik dengan garis berwarna biru merupakan grafik dari data asli, sedangkan grafik dengan

garis putus-putus berwarna merah merupakan hasil dari simulasi model. Berdasarkan 2 grafik tersebut, terlihat bahwa grafik dari model dapat mendekati grafik dari data asli dengan error absolut sebesar 20% jika $\beta = 0.06$, $\delta = 0.14$, $\alpha = 0.95$, $\omega = 0.485$, dan $\theta = 0.25$. Artinya, banyaknya kasus rawat inap akibat COVID-19 di Indonesia dapat berkurang dan mereda, jika laju kontak individu rentan dengan individu terinfeksi (β) rendah, laju perpindahan individu di kelas *Exposed* ke kelas *Infected* (δ) rendah, probabilitas individu yang terinfeksi dirawat inap (α) tinggi, probabilitas pasien COVID-19 menjadi kritis dan masuk ICU (θ) rendah, dan probabilitas pasien kritis menjadi meninggal (ω) rendah. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model SEIHCRD dapat menangkap tren melandai dari kasus *Hospitalized* di Indonesia, dimana puncak kasus yang terjadi pada model sama dengan yang terjadi pada data asli yaitu di hari pertama, dengan jumlah kasus yang sangat dekat di sekitar hari ke-10 hingga hari ke-30.



Gambar 4.3 Grafik *Critical* pada Model dan Data Asli

Selanjutnya, pada Gambar 4.3 terdapat 2 grafik dari kasus kritis pada penyebaran COVID-19 di Indonesia. Dimana grafik dengan garis berwarna biru merupakan data kasus asli, sedangkan grafik dengan garis putus-putus berwarna merah adalah hasil simulasi dari model. Berdasarkan hasil dari 2 grafik tersebut, dapat dilihat bahwa grafik dari model dapat mendekati grafik data asli dengan error absolut sebesar 33%, jika $\beta = 0.06, \delta = 0.14, \alpha = 0.95, \omega = 0.485,$ dan $\theta = 0.25$. Artinya, banyaknya kasus kritis dapat berkurang dan semakin mereda jika laju kontak individu rentan dengan individu terinfeksi (β) rendah, laju perpindahan individu di kelas *Exposed* ke kelas *Infected* (δ) rendah, probabilitas individu yang terinfeksi dirawat inap (α) tinggi, probabilitas pasien COVID-19 menjadi kritis dan masuk ICU (θ) rendah, dan probabilitas pasien kritis menjadi meninggal (ω) rendah. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model SEIHCRD dapat menangkap tren melandai dari kasus *Critical* di Indonesia, dimana puncak kasus yang terjadi pada model sama dengan yang terjadi pada data asli yaitu di hari pertama, dengan jumlah kasus yang sangat dekat pada 20 hari pertama.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh tiga kesimpulan sebagai berikut:

1. Melalui analisis dinamik yang telah dilakukan pada model SEIHCRD, didapatkan dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $(E_0) = (S_0, E_0, I_0) = \left(\frac{\xi N}{\tau}, 0, 0\right)$ dan titik kesetimbangan endemik $(E^*) = (S^*, E^*, I^*) = \left(\frac{\rho N}{\eta\beta\delta}, \frac{-\rho\tau N + \eta\beta\delta\xi N}{\eta\beta\delta(\delta + \tau)}, \frac{\rho\tau N + \eta\beta\delta\xi N}{\rho\eta\beta}\right)$. Setelah itu diperoleh bilangan reproduksi dasar $(R_0) = 0.364325388100000$, yang berarti bahwa jumlah kasus akan berkurang seiring bertambahnya waktu, sehingga wabah penyakit akan berakhir. Kemudian, berdasarkan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal dan titik kesetimbangan endemik tidak stabil.
2. Berdasarkan hasil simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta Orde Empat, didapatkan nilai pada iterasi pertama dengan $\beta = 0.06, \delta = 0.14, \alpha = 0.95, \omega = 0.485, \theta = 0.25$ yaitu $S = 272008906, E = 71788, I = 30738, H = 70568, C = 7926, R = 3.9446, D = 1.604$.
Kemudian untuk hasil iterasi secara lengkap akan ditampilkan pada lampiran.
3. Berdasarkan grafik solusi yang diperoleh dari model SEIHCRD, dapat diketahui bahwa dengan menggunakan $\beta = 0.06, \delta = 0.14, \alpha = 0.95, \omega = 0.485, \theta = 0.25$ dan parameter lain sesuai Tabel 4.2, grafik solusi pada

kasus *Infected*, *Hospitalized*, dan *Critical* dapat menangkap tren melandai dari data asli di Indonesia. Dimana jumlah kasus akan semakin berkurang dan mereda seiring bertambahnya waktu, jika memenuhi beberapa kondisi sebagai berikut:

- Laju kontak individu rentan dengan individu terinfeksi (β) rendah,
- Laju perpindahan individu di kelas *Exposed* ke kelas *Infected* (δ) rendah,
- Probabilitas individu yang terinfeksi dirawat inap (α) tinggi,
- Probabilitas pasien COVID-19 menjadi kritis dan masuk ICU (θ) rendah,
- dan probabilitas pasien kritis menjadi meninggal (ω) rendah.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan beberapa hal sebagai berikut:

1. Model dapat dimodifikasi atau dikembangkan dengan nilai parameter yang berbeda sehingga titik kesetimbangan pada setiap kompartemen dapat diperoleh dan dianalisis kestabilannya, serta grafik dari setiap populasi dapat lebih mendekati data asli.
2. Faktor vaksinasi dan pemberlakuan pembatasan kegiatan masyarakat dapat ditambahkan dalam model dengan meninjau aspek optimal kontrol.
3. Data yang digunakan dapat diambil dari data terbaru tahun 2022.

DAFTAR PUSTAKA

- Andari, A. (2017). *Aljabar Linear Elementer*.
<https://books.google.co.id/books?id=1cdVDwAAQBAJ&lpg=PP1&dq=aljabar linear&hl=id&pg=PR4#v=onepage&q=aljabar linear&f=false>
- Arofi, Z. (2020). Optimis di Tengah Pandemi: Cara Rasulullah Menyelesaikan Masalah Pandemi. *Community Empowerment*, 6(1), 91–98.
<https://doi.org/10.31603/ce.4417>
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2000). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (seventh ed).
- Claudia. (2021). *Berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk sembuh dari ISPA?*
<https://www.alodokter.com/komunitas/topic/berapa-lama-waktu-yang-dibutuhkan-untuk-sembuh-dari-ispa#:~:text=Infeksi oleh virus%2C umumnya memiliki,Pilek>
- COVID-19, S. (n.d.). *Peta Sebaran COVID-19*. <https://covid19.go.id/peta-sebaran>
- Fadli, R. (2021). *Butuh Berapa Lama Waktu Penyembuhan Corona*. Halodoc.
<https://www.halodoc.com/artikel/butuh-berapa-lama-waktu-penyembuhan-corona>
- Giesecke, J. (2002). *Modern Infectious Disease Epidemiology* (2nd ed.).
<http://kin.perpusnas.go.id/DisplayData.aspx?pId=113799&pRegionCode=UN11MAR&pClientId=112>
- KEMENKES. (2022). *Data Ketersediaan Tempat Tidur RS COVID-19*. 11 April.
<https://www.kemkes.go.id/article/view/22040400001/Data-Ketersediaan-Tempat-Tidur-RS-COVID-19.html>
- Kementerian Agama RI. (2019). Al-Qur'an dan Terjemahannya Edisi Penyempurnaan 2019 (Juz 21-30). *Lajnah Pentashihan Mushaf Al- Qur'an*, 571–914. <https://pustakalajnah.kemenag.go.id/detail/135>
- Manafe, D. (2020). *Lama Pasien Covid-19 Dirawat Rata-rata Dua Minggu*. Beritasatu.Com. <https://www.beritasatu.com/nasional/651499/lama-pasien-covid19-dirawat-ratarata-dua-minggu>
- Mbogo, R. W., & Orwa, T. O. (2021). SARS-COV-2 outbreak and control in Kenya - Mathematical model analysis. *Infectious Disease Modelling*, 6, 370–380. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2021.01.009>
- Muhammad, J., & Abdurahman, J. (2010). *Terjemah Tafsir Jalalain*. 1–402.
- Perko, L. (2001). *Equations and Dynamical Systems*.

- Qur'ani, F. (2022). *Analisis Dinamik Model Susceptible-Exposed-Infectious-Hospitalized-Critical-Recovered-Dead (Seihcrd) Pada Penyebaran Covid-19*.
- Ramadhani, A. (2021). *MODEL EPIDEMI SUSCEPTIBLE-EXPOSED-INFECTED-RECOVERED (SEIR) MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT PADA PENYEBARAN COVID-19 DI INDONESIA*.
- Rifanti, U. M., Dewi, A. R., Nurlaili, N., & Hapsari, S. T. (2021). Model Matematika COVID-19 dengan Sumber Daya Pengobatan yang Terbatas. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 18(1), 23. <https://doi.org/10.12962/limits.v18i1.8207>
- Shihab, M. Q. (2002). *TAFSIR AL MISHBAH* (Vol.15). Lentera Hati.
- Singh, A., & Bajpai, M. K. (2020). SEIHCRD model for COVID-19 spread scenarios, disease predictions and estimates the basic reproduction number, case fatality rate, hospital, and ICU beds requirement. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 125(3), 991–1031. <https://doi.org/10.32604/cmes.2020.012503>
- Sofiah. (2013). *Analisa Penentuan Harga Gain Untuk Kestabilan Pada Sistem Pengendali Dengan Metode Routh-Hurwitz*. 3(2), 530–542.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Hasi Perhitungan Solusi I bulan Agustus-Oktober 2021

t (hari)	Data Asli I (orang)	Model I (orang)	Error (%)
1	30738	30738	0
2	22404	35011	56.27120157
3	33900	37722	11.27433628
4	35867	39246	9.420916162
5	35764	39875	11.49479924
6	39532	39836	0.768997268
7	31753	39304	23.7804302
8	26415	38415	45.42873367
9	20709	37273	79.98454778
10	32081	35961	12.09438609
11	30625	34538	12.77714286
12	24709	33051	33.76097778
13	30788	31537	2.432766013
14	28598	30021	4.975872439
15	20813	28524	37.04895978
16	17384	27058	55.64887253
17	20741	25635	23.59577648
18	15768	24261	53.86225266
19	22053	22941	4.026663039
20	20004	21677	8.363327335
21	16744	20470	22.25274725
22	12408	19322	55.72211476
23	9604	18230	89.81674302
24	19106	17194	10.00732754
25	18671	16212	13.17015693
26	16899	15283	9.562696018
27	12618	14404	14.15438263
28	10050	13574	35.06467662
29	7427	12790	72.20950586
30	5436	12050	121.6703458
31	10534	11351	7.755838238
32	10337	10693	3.443939247
33	8955	10071	12.46231156
34	7797	9486	21.66217776
35	6727	8934	32.80808681
36	5403	8414	55.72829909
37	4413	7924	79.56038976
38	7201	7462	3.624496598
39	6731	7027	4.397563512
40	5990	6617	10.46744574
41	5376	6231	15.90401786
42	5001	5868	17.33653269
43	3779	5526	46.22916115
44	2577	5203	101.9014358
45	4128	4899	18.67732558
46	3948	4614	16.86930091
47	3145	4344	38.12400636
48	3835	4091	6.67535854
49	3385	3852	13.79615953
50	2234	3627	62.35452104

51	1932	3415	76.75983437
52	3263	3216	1.440392277
53	2720	3028	11.32352941
54	2881	2851	1.041305102
55	2557	2685	5.00586625
56	2137	2528	18.29667759
57	1760	2380.948031	35.28113811
58	1390	2241.949535	61.29133347
59	2057	2111.064954	2.62833999
60	1954	1987.820867	1.730852968
61	1690	1871.771427	10.75570575
62	1624	1762.496762	8.528125715
63	1414	1659.60147	17.36926945
64	1142	1562.713204	36.84003538
65	922	1471.481329	59.59667347
66	1404	1385.575664	1.312274646
67	1484	1304.685288	12.08320164
68	1393	1228.517422	11.80779456
69	1384	1156.796372	16.41644708
70	1167	1089.262535	6.661308032
71	894	1025.671458	14.72835095
72	620	965.7929549	55.77305724
73	1261	909.4102793	27.88181766
74	1233	856.3193353	30.54993225
75	1053	806.3279419	23.42564654
76	915	759.2551374	17.02129646
77	997	714.9305245	28.29182302
78	747	673.1936542	9.880367574
79	626	633.8934447	1.260933657
80	903	596.8876348	33.89948673
81	914	562.0422692	38.50741037
82	633	529.2312133	16.39317326
83	760	498.3356969	34.42951356
84	802	469.2438843	41.4907875
85	623	441.850469	29.07697126
86	460	416.0562933	9.552979714
87	611	391.7679885	35.88085295
88	719	368.8976373	48.69295725
89	723	347.3624557	51.95540032
90	683	327.0844928	52.11061598
91	620	307.9903491	50.32413724
92	523	290.0109104	44.5485831
Mean Absolute Percentage Error			28.17680677

Sumber: <https://covid19.go.id/peta-sebaran>

Lampiran 2 Hasi Perhitungan Solusi H bulan Agustus-Oktober 2021

t (hari)	Data Asli H (Orang)	Model H (Orang)	Error (%)
1	70,568	70568	0
2	70,054	67522.34874	3.613856818
3	68,563	65230.60038	4.860346859
4	66,768	63440.81398	4.983204559
5	64,777	61969.31901	4.334379476
6	63,133	60684.25901	3.878702089
7	61,503	59492.88472	3.268320701
8	60,200	58331.76506	3.103380299
9	58,569	57159.26661	2.406961689
10	56,836	55949.79441	1.559232866
11	54,965	54689.39853	0.50141267
12	53,072	53372.43782	0.566094777
13	50,984	51999.06056	1.990939436
14	48,784	50573.31475	3.66783116
15	47,596	49101.7426	3.163590634
16	45,765	47592.34607	3.992889925
17	44,302	46053.83587	3.954304256
18	42,946	44495.09577	3.607078118
19	40,925	42924.80991	4.8865239
20	38,991	41351.21243	6.053223651
21	38,991	39781.92833	2.028489478
22	36,311	38223.88148	5.268049577
23	35,188	36683.25168	4.249322719
24	34,161	35165.46666	2.940390089
25	32,442	33675.21859	3.801302594
26	30,986	32216.49706	3.971138779
27	29,726	30792.63269	3.588214665
28	29,045	29406.34687	1.244093201
29	28,274	28059.80453	0.757570438
30	27,065	26754.66759	1.146618912
31	25,954	25492.14741	1.779504484
32	24,257	24273.05523	0.066188043
33	23,042	23097.84988	0.24238296
34	21,982	21966.68217	0.069683502
35	21,048	20879.43598	0.800855277
36	20,270	19835.76578	2.142250712
37	18,668	18835.13074	0.895279292
38	17,885	17876.82547	0.045706048
39	17,002	16960.00764	0.246984819
40	16,120	16083.72254	0.225046298
41	15,168	15246.92493	0.520338416
42	14,528	14448.49835	0.547230508
43	14,145	13687.27203	3.235970075
44	13,425	12962.03573	3.448523393
45	12,854	12271.55264	4.531253744
46	12,298	11614.57054	5.557240694
47	11,677	10989.8314	5.884804284
48	11,258	10396.07964	7.656069965
49	10,883	9832.069071	9.65662895
50	10,489	9296.568791	11.36839745
51	10,192	8788.368106	13.77189849
52	9,844	8306.280569	15.62088004
53	9,109	7849.147281	13.83085651

54	8,818	7415.839523	15.90111677
55	8,275	7005.260813	15.34428021
56	8,003	6616.348455	17.32664682
57	7,793	6248.074658	19.82452639
58	7,543	5899.44727	21.78911216
59	7,212	5569.510193	22.77440109
60	6,971	5257.34352	24.58264926
61	6,720	4962.063433	26.15977035
62	6,172	4682.821902	24.12796659
63	5,873	4418.806225	24.76066364
64	5,784	4169.238414	27.91773143
65	5,648	3933.374485	30.35810048
66	5,420	3710.503639	31.54052326
67	5,230	3499.947385	33.0793999
68	5,012	3301.058595	34.13689955
69	4,750	3113.220522	34.45851532
70	4,422	2935.845793	33.60819103
71	4,381	2768.375368	36.80950998
72	4,262	2610.277508	38.7546338
73	4,183	2461.046725	41.16550981
74	4,084	2320.202746	43.18798369
75	3,886	2187.289483	43.71360053
76	3,789	2061.874017	45.58263348
77	3,756	1943.545603	48.2549094
78	3,788	1831.914692	51.63899967
79	3,807	1726.611986	54.64638859
80	3,715	1627.287507	56.19683695
81	3,593	1533.609703	57.31673524
82	3,502	1445.264577	58.73030906
83	3,464	1361.95485	60.68259671
84	3,287	1283.39915	60.95530424
85	3,295	1209.331232	63.29798992
86	3,262	1139.499231	65.06746685
87	3,205	1073.664942	66.50031383
88	3,132	1011.603126	67.70104963
89	2,946	953.1008558	67.64762879
90	2,926	897.9568813	69.31111137
91	2,807	845.9810246	69.86173763
92	2,820	796.9936044	71.73781545
Mean Absolute Percentage Error			20.34764127

Sumber: <https://covid19.go.id/peta-sebaran>

Lampiran 3 Hasi Perhitungan Solusi C bulan Agustus-Oktober 2021

t	Data Asli (Orang)	Model (Orang)	Error (%)
1	7,926	7926	0
2	7,868	8072.20054	2.59532969
3	7,858	8061.723614	2.592563171
4	7,733	7972.582965	3.098189125
5	7,692	7847.686013	2.023999129
6	7,524	7709.109801	2.460257855
7	7,518	7566.96789	0.651341979
8	7,393	7424.829179	0.4305313
9	7,299	7282.957635	0.219788533
10	7,113	7140.190081	0.382258977
11	7,001	6994.975059	0.086058292
12	6,908	6845.904962	0.8988859
13	6,780	6691.950387	1.298666858
14	6,596	6532.526461	0.962303502
15	6,368	6367.470362	0.00831718
16	6,307	6196.977297	1.744453829
17	6,185	6021.522163	2.643133985
18	6,037	5841.781801	3.233695528
19	5,918	5658.565267	4.383824485
20	5,691	5472.755177	3.834911668
21	5,691	5285.260675	7.129490863
22	5,478	5096.981306	6.955434356
23	5,331	4908.780444	7.920081711
24	5,150	4721.466738	8.321034214
25	5,012	4535.782059	9.501555088
26	4,737	4352.394579	8.119177137
27	4,589	4171.895789	9.089217934
28	4,462	3994.800456	10.47063075
29	4,390	3821.548709	12.94877656
30	4,165	3652.509609	12.30469126
31	4,021	3487.985677	13.25576531
32	3,830	3328.218013	13.10135736
33	3,750	3173.391689	15.37622163
34	3,652	3023.641205	17.20588157
35	3,539	2879.055853	18.64775776
36	3,413	2739.684876	19.72795558
37	3,216	2605.542342	18.98189235
38	3,111	2476.611706	20.39178059
39	2,962	2352.850013	20.56549585
40	2,814	2234.191752	20.60441535
41	2,710	2120.552352	21.75083572
42	2,582	2011.831341	22.08244225
43	2,487	1907.91517	23.28447246
44	2,385	1808.679737	24.16437161
45	2,295	1713.99262	25.31622571
46	2,235	1623.715046	27.35055723
47	2,146	1537.703622	28.34559077
48	2,056	1455.811839	29.19203118
49	2,004	1377.891382	31.24294501
50	1,958	1303.793255	33.41198902
51	1,901	1233.368753	35.12000247
52	1,873	1166.470278	37.72182178
53	1,764	1102.952036	37.47437438

54	1,757	1042.670616	40.65619715
55	1,662	985.4854704	40.70484534
56	1,620	931.259303	42.51485784
57	1,581	879.8583828	44.34798338
58	1,547	831.1527879	46.27325224
59	1,455	785.0165899	46.04696977
60	1,377	741.3279871	46.16354487
61	1,313	699.9693929	46.68930747
62	1,276	660.8274857	48.21101209
63	1,223	623.7932259	48.99483026
64	1,190	588.7618453	50.52421468
65	1,186	555.6328117	53.15069041
66	1,143	524.3097756	54.12862856
67	1,124	494.7004979	55.98750019
68	1,079	466.7167666	56.74543405
69	1,046	440.2743005	57.90876668
70	1,017	415.2926452	59.16493164
71	978	391.6950624	59.94938012
72	929	369.4084135	60.23590813
73	923	348.3630402	62.25752544
74	878	328.4926427	62.58625937
75	856	309.7341564	63.81610322
76	832	292.0276283	64.90052544
77	788	275.3160944	65.06140934
78	801	259.5454576	67.59732115
79	818	244.6643676	70.08993061
80	768	230.624103	69.97081992
81	766	217.3784559	71.6216115
82	739	204.8836191	72.27555899
83	716	193.0980765	73.0309949
84	729	181.9824971	75.0366945
85	684	171.4996318	74.92695442
86	713	161.6142138	77.33320985
87	705	152.2928632	78.39817543
88	638	143.503994	77.50721097
89	609	135.2177257	77.79676097
90	631	127.4057979	79.80890683
91	599	120.0414884	79.95968474
92	615	113.0995352	81.60983167
Mean Absolute Percentage Error			33.52835356

Sumber: <https://covid19.go.id/peta-sebaran>

Lampiran 4 Hasil Perhitungan Solusi S, E, R, D bulan Agustus-Oktober

t (hari)	S (orang)	E (orang)	R (orang)	D (orang)
1	272008906	71788	39446	1604
2	272008305.9	63865.3499	46110.54661	2090.013046
3	272007503	57212.37889	52672.43979	2579.626049
4	272006580.2	51580.36708	59103.17582	3065.930364
5	272005600.1	46772.88222	65388.84866	3545.592772
6	272004609.5	42634.5577	71522.54127	4017.193657
7	272003643	39042.29276	77500.18051	4480.254535
8	272002725.5	35898.35127	83318.45138	4934.69073
9	272001875	33124.94875	88973.89626	5380.521418
10	272001103.4	30660.006	94462.66279	5817.731533
11	272000418.6	28453.81723	99780.57839	6246.219992
12	271999825.3	26466.43505	104923.3639	6665.794227
13	271999325.4	24665.61765	109886.8817	7076.187135
14	271998919.4	23025.21655	114667.364	7477.082622
15	271998606	21523.90993	119261.5976	7868.142181
16	271998383.1	20144.20706	123667.0567	8249.028664
17	271998248	18871.6651	127881.987	8619.425641
18	271998197.3	17694.27282	131905.446	8979.051967
19	271998227.5	16601.965	135737.3077	9327.671867
20	271998334.7	15586.23957	139378.2407	9665.101109
21	271998515	14639.85535	142829.6652	9991.209984
22	271998764.7	13756.59305	146093.6967	10305.92376
23	271999079.7	12931.06601	149173.0801	10609.22127
24	271999456.3	12158.57004	152071.1206	10901.13209
25	271999890.8	11434.96398	154791.6114	11181.73286
26	272000379.8	10756.57445	157338.7638	11451.14295
27	272000919.6	10120.11963	159717.1389	11709.51997
28	272001507.2	9522.648127	161931.5834	11957.05503
29	272002139.3	8961.489651	163987.1702	12193.96816
30	272002813.1	8434.215061	165889.1436	12420.50392
31	272003525.6	7938.603857	167642.8692	12636.9272
32	272004274.2	7472.617545	169253.7901	12843.51932
33	272005056.4	7034.377688	170727.3871	13040.57452
34	272005869.7	6622.147683	172069.1435	13228.39667
35	272006712	6234.317528	173284.5154	13407.29644
36	272007581	5869.390977	174378.9052	13577.58862
37	272008474.8	5525.974624	175357.6394	13739.58993
38	272009391.5	5202.768558	176225.9495	13893.617
39	272010329.2	4898.558272	176988.9566	14039.9846
40	272011286.3	4612.207627	177651.6583	14179.00423
41	272012261.2	4342.652659	178218.9182	14310.9828
42	272013252.5	4088.896107	178695.4585	14436.22162
43	272014258.6	3850.002525	179085.8528	14555.01546
44	272015278.4	3625.093901	179394.5227	14667.65191
45	272016310.5	3413.34569	179625.7343	14774.41077
46	272017353.7	3213.98322	179783.5969	14875.56359
47	272018407.1	3026.278405	179872.0625	14971.37338
48	272019469.5	2849.546733	179894.9266	15062.09434
49	272020540	2683.144491	179855.829	15147.97173
50	272021617.7	2526.466205	179758.2565	15229.2418
51	272022701.7	2378.942263	179605.5453	15306.13177
52	272023791.2	2240.036716	179400.8841	15378.85986
53	272024885.5	2109.24522	179147.3177	15447.63543

54	272025983.9	1986.093126	178847.7508	15512.65902
55	272027085.7	1870.133693	178504.9521	15574.12259
56	272028190.3	1760.946415	178121.5585	15632.20969
57	272029297	1658.135459	177700.0796	15687.09562
58	272030405.5	1561.328195	177242.9022	15738.94771
59	272031515.1	1470.173825	176752.2945	15787.92552
60	272032625.4	1384.342092	176230.4109	15834.18111
61	272033735.9	1303.522064	175679.2967	15877.85928
62	272034846.3	1227.421001	175100.8919	15919.09783
63	272035956	1155.763283	174497.0364	15958.02782
64	272037064.8	1088.289404	173869.4737	15994.77383
65	272038172.4	1024.755028	173219.8554	16029.45421
66	272039278.3	964.9300977	172549.7454	16062.18135
67	272040382.3	908.5979994	171860.6236	16093.06193
68	272041484.1	855.5547748	171153.8901	16122.19715
69	272042583.5	805.6083808	170430.869	16149.68298
70	272043680.2	758.5779924	169692.8118	16175.61041
71	272044773.9	714.2933462	168940.9009	16200.06565
72	272045864.6	672.5941232	168176.2534	16223.13037
73	272046951.9	633.3293675	167399.9239	16244.88193
74	272048035.7	596.3569388	166612.9078	16265.39354
75	272049115.9	561.5429975	165816.1443	16284.73452
76	272050192.2	528.7615194	165010.5194	16302.97044
77	272051264.5	497.8938397	164196.8683	16320.16334
78	272052332.7	468.8282223	163375.9784	16336.37188
79	272053396.7	441.4594557	162548.5917	16351.65153
80	272054456.4	415.6884718	161715.4069	16366.05474
81	272055511.6	391.4219868	160877.082	16379.63107
82	272056562.2	368.5721636	160034.2367	16392.42735
83	272057608.2	347.056294	159187.4538	16404.48782
84	272058649.4	326.7964984	158337.2816	16415.8543
85	272059685.9	307.7194448	157484.2358	16426.56624
86	272060717.5	289.7560825	156628.8012	16436.66095
87	272061744.2	272.8413925	155771.4332	16446.1736
88	272062765.9	256.9141518	154912.5598	16455.13744
89	272063782.5	241.9167121	154052.5828	16463.58383
90	272064794	227.7947906	153191.8793	16471.54238
91	272065800.5	214.4972742	152330.8031	16479.04103
92	272066801.7	201.9760335	151469.6861	16486.10613