

## Proses Berpikir Mahasiswa dalam Menyusun Bukti Matematis dengan Strategi Semantik

**Abdussakir**

Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

Jl. Jalan Gajayana No.50, Malang, Jawa Timur. E-mail: [abdussakir@uin-malang.ac.id](mailto:abdussakir@uin-malang.ac.id)

**Abstract:** This study is aimed to reveal the thinking process in proof construction performed by students with semantic strategy. This study use descriptive-qualitative approach. The thinking process of students will be analyzed using theoretical framework of David Tall about the three worlds of mathematical thinking. The result are three ways of thinking in semantic strategy, namely (1) started from formal world then move into the symbolic or embodied-symbolic world with possibility of more than once and ends within or outside of the formal world, (2) started from symbolic world or embodied-symbolic world then move to the formal world with possibility of more than once and ends within or outside of the formal world, and (3) all thinking processes performed outside of formal world that does not obtain formal proof.

**Key Words:** thinking process, mathematical proof, semantic strategy

**Abstrak:** Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif-kualitatif. Analisis data dilakukan dengan menggunakan kerangka kerja David Tall tentang tiga dunia berpikir matematik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa terdapat enam kemungkinan jalur dalam strategi semantik ditinjau dari teori tiga dunia berpikir matematik. Hasil penelitian menunjukkan ada tiga jalur berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik, yaitu (1) bermula dari dunia berpikir formal berpindah ke dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau di luar dunia berpikir formal, (2) bermula dari dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik (non RSP) lalu pindah ke dunia berpikir formal dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau di luar dunia berpikir formal, dan (3) semua proses berpikir terjadi di luar dunia berpikir formal.

**Kata kunci:** proses berpikir, bukti matematis, strategi semantik

Bukti mempunyai peran yang sangat penting dalam matematika dan dalam pendidikan matematika. Bukti diakui sebagai inti berpikir matematis (Hanna, dkk., 2009) dan bernalar deduktif (Cheng & Lin, 2009:124). Seseorang tidak dapat mempelajari matematika tanpa belajar bukti matematis dan bagaimana membuatnya (Wu, 1996:222 dan Balacheff, 2010:115). Bahkan, bukti dianggap sebagai komponen penting untuk bekerja, berkomunikasi, mengetahui, dan memahami matematika (Schoenfeld, 1998:76, Cirillo, 2009:130, dan Kögce, dkk., 2010:2544).

Para ahli telah sepakat perlunya mahasiswa untuk mengembangkan kemampuan yang dibutuhkan

dalam menyusun bukti (Blanton, dkk., 2003). Kenyataannya mahasiswa mengalami kesulitan serius untuk menyusun bukti (Martin & Harel, 1989, Moore, 1994, Weber, 2001, dan Epp, 2003). Bukti matematis merupakan konsep matematika yang sulit bagi mahasiswa baik untuk mempelajari maupun menyusunnya (Pfeiffer, 2011:3). Bukti dapat dipandang sebagai proses sekaligus hasil (Nichols, 2008), maka kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti tidak cukup dilihat dari bukti yang dihasilkan. Proses berpikir yang terjadi saat menyusun bukti dapat memberi petunjuk yang lebih baik untuk mengetahui kesulitan mahasiswa.

David Tall (2008a, 2008b) mengembangkan teori tiga dunia berpikir matematis yang dapat digunakan

untuk menjelaskan proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti. Menurut Tall (2008a, 2008b), berpikir matematis dapat dikelompokkan menjadi tiga, yaitu (a) dunia wujud yang bermula dari interaksi dengan objek dunia nyata dan berkembang berdasarkan pengalaman-pengalaman inderawi melalui deskripsi dan definisi verbal, (b) dunia simbolik yang berkembang dari aksi (seperti menghitung) menuju kalkulasi dan manipulasi berbentuk simbol yang berfungsi secara dual sebagai proses dan konsep (prosep), dan (c) dunia formal yang berdasarkan aksioma untuk membangun sistem, berdasarkan definisi untuk membuat konsep baru, dan berdasarkan bukti formal untuk membangun teori-teori yang koheren (Tall, 2009).

Bukti matematis terletak dalam dunia formal dan bersifat formal deduktif (Tall & Mejia-Ramos, 2006: 5). Tall (2008a:10) menyatakan bahwa bukti formal deduktif yang tertulis adalah tahap akhir berpikir matematika. Dengan demikian, proses berpikir dalam menyusun bukti matematis dapat berlangsung hanya dalam dunia formal atau melibatkan dunia wujud dan simbolik. Pinto (1998) menyebut *jalur formal* ketika proses berpikir dalam pembuktian hanya melibatkan dunia formal dan menyebut *jalur alami* ketika proses berpikir dalam pembuktian bermula dari dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya. Beberapa istilah berbeda mengenai jalur alami dan formal juga ditemukan dalam literatur lain. Weber & Alcock (2004: 210) dan Weber (2004a:428-429) menggunakan istilah produksi bukti sintaksis dan produksi bukti semantik. Alcock & Weber (2005:33) menyebut pendekatan referensial dan pendekatan sintaksis.

Abdussakir (2010a, 2010b) menyatakan bahwa kategori jalur alami dan jalur formal belum memadai untuk menjelaskan proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti. Ada mahasiswa yang pertama kali bekerja dalam dunia formal, lalu menuju dunia wujud atau simbolik, dan akhirnya kembali ke dunia formal. Fakta ini tidak dapat dikategorikan jalur alami atau jalur formal. Mengacu pada Pinto (1998), fakta ini merupakan kombinasi antara jalur alami dan jalur formal yang penting untuk diikuti prosesnya.

Alcock & Inglis (2008:114) mendefinisikan sistem representasi bukti (*representation system of proof* (RSP)) sebagai sistem pernyataan-pernyataan simbolik yang berlaku umum yang dapat dikombinasikan ke dalam konfigurasi yang diperbolehkan melalui aturan logika proposisi dan kerangka kerja bukti yang diterima. Alcock & Inglis (2008:115) mendefinisikan strategi sintaksis dan strategi semantik dalam menyusun bukti matematis. Strategi sintaksis terjadi ketika

seluruh proses pembuktian terjadi dalam RSP sedangkan strategi semantik terjadi ketika proses pembuktian melibatkan aspek di luar RSP. Kategori strategi semantik dan strategi sintaksis yang dikemukakan Alcock & Inglis (2008) ini lebih memadai untuk menjelaskan kemungkinan jalur berpikir dalam pembuktian.

Strategi semantik perlu dikaji karena dalam strategi ini melibatkan dunia berpikir matematis yang berbeda ketika ditinjau dari kerangka teori tiga dunia berpikir matematis. Proses berpikir yang melibatkan perpindahan dari satu dunia berpikir ke dunia berpikir yang lain sangat penting untuk diketahui. Hal ini sesuai dengan saran Sepideh Stewart (2008:248) berikut.

“... *the theory of the three worlds of mathematical thinking as yet has not been investigated in practice very much. Hence, it would be valuable to follow university students' thinking processes as they move from one world of mathematical thinking to another for each concept.*”

Mengacu pada saran Pinto (1998) maka proses berpikir dalam strategi semantik perlu diketahui karena melibatkan gabungan antara jalur alami dan jalur formal.

Strategi semantik melibatkan perpindahan antara RSP dan non RSP yang perlu diketahui prosesnya (Alcock & Inglis, 2009). Alcock & Inglis (2008) menyebut penalaran semantik ketika bekerja di luar RSP dan penalaran sintaksis ketika bekerja di RSP. Weber (2009) menggunakan istilah pendekatan semantik dan pendekatan sintaksis sedangkan Iannone & Nardi (2007) menyebut pengetahuan semantik dan pengetahuan sintaksis. Strategi semantik melibatkan kedua jenis penalaran tersebut dalam pembuktian (Weber, 2009) dan ini merupakan hal yang penting untuk diteliti.

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Untuk tujuan tersebut, peneliti membuat definisi ulang mengenai strategi semantik dan strategi sintaksis mengacu pada Alcock & Inglis (2008) serta berdasarkan kelemahan yang ada ditinjau dari definisi jalur alami dan jalur formal oleh Pinto (1998) dan kritik dari Weber & Mejia-Ramos (2009). Penulis mendefinisikan *strategi sintaksis* sebagai kegiatan pembuktian yang seluruhnya berlangsung di dalam RSP (dunia berpikir formal) dan dimungkinkan sempat keluar dari RSP tetapi hanya untuk menjelaskan konsep/ide dan tidak menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan.

kan. *Strategi semantik* didefinisikan sebagai kegiatan pembuktian yang sempat berlangsung di luar RSP (di dunia berpikir wujud, simbolik, atau gabungan keduanya) dan menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan.

Pengkategorian strategi sintaksis atau strategi semantik dalam penelitian ini dilakukan sejak mahasiswa sudah membaca soal dan memulai pembuktian. Hal ini berbeda dengan Alcock dan Inglis (2009) yang menyatakan bahwa dengan membaca soal saja sudah termasuk strategi sintaksis. Dengan penegasan *sudah membaca soal dan memulai pembuktian*, maka definisi ini memberikan kerangka kerja yang jelas untuk menentukan sejak kapan harus mulai melihat proses berpikir mahasiswa.

## METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif-eksploratif. Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pengumpulan data dilakukan dengan memberikan masalah pembuktian kepada mahasiswa untuk diselesaikan dengan mengeraskan suaranya, disebut metode *think out loud* (Iannone & Nardi, 2006:2301) atau *think alouds* (Rodriguez & Gutierrez, 2006:436; Samkoff, dkk., 2012).

Data yang terkumpul selanjutnya ditranskrip, ditelaah, direduksi, dan dikategorikan. Aspek pernyataan dikategorikan menjadi 4 (empat) yaitu (1) berpikir wujud, (2) berpikir wujud-simbolik, (3) berpikir simbolik, dan (4) berpikir formal. Satuan dan *coding* yang ditetapkan untuk aspek pernyataan dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 1.

Aspek sumber dikategorikan menjadi 5 (lima) yaitu (1) mengingat, (2) mengonkretkan, (3) menyimpulkan, (4) mengekstrak makna, dan (5) lainnya. Satuan dan *coding* yang ditetapkan untuk aspek sumber pernyataan dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 2.

Proses berpikir dikategorikan berdasarkan tujuan penggunaan berpikir non formal (wujud, simbolik, atau wujud-simbolik). Tiga kategori yang ditetapkan yaitu (1) menemukan definisi konsep, yang dikodekan m-Defi, (2) melakukan refleksi, yang dikodekan m-Refle, dan (3) mencari petunjuk langkah non definisi, yang dikodekan m-Petun. Kategori menemukan definisi konsep dikatakan terjadi jika mahasiswa menggunakan berpikir non formal untuk menemukan kembali

definisi konsep yang diperlukan yang belum dimiliki atau lupa. Kategori melakukan refleksi dikatakan terjadi jika mahasiswa membuat suatu kesimpulan tetapi kemudian merasa ragu dan menggunakan berpikir non formal untuk mengecek kebenaran kesimpulan yang telah dihasilkan. Kategori mencari petunjuk langkah non definisi dikatakan terjadi jika mahasiswa menggunakan berpikir non formal untuk membuat kesimpulan atau subkesimpulan yang dapat menuntun langkah pembuktian.

Hasil pembuktian juga dikodekan dengan dua kategori yaitu (1) benar sempurna yang dikodekan BS dan (2) benar tidak sempurna yang dikodekan BtS. Bukti dikatakan benar sempurna jika bukti ini lengkap dan mengikuti aturan logika predikat. Bukti dikatakan benar tidak sempurna jika bukti ini secara substansial langkahnya sudah benar tetapi terdapat kekurangan dalam penyajiannya.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini dipaparkan empat subjek penelitian yang menggunakan strategi semantik dalam menyusun bukti. Pemilihan keempat subjek ini didasarkan pada keberhasilan mereka dalam menyusun bukti. Berdasarkan pendapat Weber (2009:201), jalur berpikir mahasiswa yang berhasil dapat memberi pertimbangan untuk diaplikasikan pada mahasiswa yang lain. Keempat subjek yang dipaparkan sudah memenuhi syarat cukup (minimal 2) untuk analisis perbandingan tetap pada masing-masing kategori yang ditetapkan. Ringkasan pembuktian keempat subjek penelitian dapat dilihat pada Tabel 3.

Literatur pertama yang membahas jalur berpikir mahasiswa ketika menyusun pembuktian adalah hasil penelitian Pinto (1998). Pinto menyimpulkan terdapat dua jalur berpikir dalam pembuktian, yaitu jalur alami dan jalur formal. Pemilahan jalur berpikir dalam menyusun bukti menjadi alami dan formal belum mewakili semua jalur berpikir. Berdasarkan data penelitian ini, jalur berpikir yang ditempuh subjek penelitian ini tidak dapat dikategorikan sebagai jalur alami atau jalur natural. Semua subjek dalam penelitian ini bekerja pertama kali di dalam RSP dan selanjutnya keluar dari RSP yang pada akhirnya kembali lagi ke RSP.

Mengacu pada definisi produksi bukti sintaksis dan produksi bukti semantik (Weber & Alcock, 2004 dan Weber, 2004a) atau definisi pendekatan referensial dan pendekatan sintaksis (Alcock & Weber, 2005, 2008) maka jalur berpikir semua subjek dalam penelitian ini tidak termasuk pada semua kategori tersebut.

**Tabel 1. Satuan dan Coding untuk Aspek Pernyataan**

Satuan	Pengertian	Kode
Berpikir Wujud	Berpikir yang melibatkan penggunaan objek konkret, gerakan, dan gambar baik secara nyata maupun sekedar dibayangkan berdasarkan bayangan konsep.	Em
Berpikir Wujud-Simbolik	Berpikir yang melibatkan visualisasi perpaduan antara gambar dan simbol, seperti garis bilangan, diagram, atau grafik baik secara nyata akan sekedar dibayangkan	EmSim
Berpikir Simbolik	Berpikir yang melibatkan penggunaan simbol (huruf atau angka) atau manipulasi simbol-simbol yang bersifat khusus atau generik dalam bentuk contoh baik secara nyata atau sekedar dibayangkan.	Sim
Berpikir Formal	Berpikir yang melibatkan penggunaan definisi konsep dan sistem deduktif aksiomatik.	For

**Tabel 2. Satuan dan Coding untuk Aspek Sumber Pernyataan**

Satuan	Pengertian	Kode
Mengingat ( <i>recalling</i> )	Pernyataan diperoleh sebagai akibat/implikasi tidak langsung dari pernyataan sebelumnya tetapi muncul sebagai hasil mengingat.	Rec
Mengonkretkan ( <i>concreting</i> )	Pernyataan diperoleh dengan cara mewujudkan berpikir formal ke dalam berpikir wujud atau simbolik.	Con
Menyimpulkan ( <i>Inferring</i> )	Pernyataan diperoleh sebagai akibat/implikasi langsung dari pernyataan sebelumnya mengikuti aturan logika	Inf
Mengekstrak makna ( <i>extract meaning</i> )	Pernyataan diperoleh dari pernyataan sebelumnya dengan cara mengekstrak makna definisi konsepnya.	Ext
Lainnya ( <i>Other</i> )	Pernyataan yang diperoleh selain 4 kategori sebelumnya	Oth

**Tabel 3. Ringkasan Pembuktian Keempat Subjek**

Subjek	Ciri Semantik	Kualitas Bukti	Tujuan		
			Menemukan Definisi	Melakukan Refleksi	Mencari Petunjuk
S1	EmSim, Sim	BtS	Ya	Ya	Ya
S2	EmSim	BS	Tidak	Ya	Ya
S3	EmSim, Sim	BtS	Tidak	Tidak	Ya
S4	EmSim	BtS	Ya	Ya	Ya

Keterangan:

BS = Benar Sempurna, BtS = Benar tidak Sempurna

EmSim = Wujud-Simbolik, Sim = Simbolik

Pertama, semua subjek tidak memulai proses pembuktian dari non RSP sementara definisi produksi bukti semantik atau pendekatan referensial mensyaratkan pertama kali harus berawal dari non RSP. Kedua, semua subjek menggunakan non RSP untuk menuntun langkah pembuktian sementara definisi produksi bukti sintaksis atau pendekatan sintaksis mensyaratkan proses pembuktian seluruhnya berada dalam RSP.

Data penelitian ini menunjukkan kesesuaian dengan pendapat Alcock & Inglis (2008) bahwa semua proses pembuktian dimulai dari RSP. Walaupun ada perbedaan mendasar antara definisi strategi semantik menurut Alcock & Inglis (2008) dengan definisi strategi semantik dalam penelitian ini ternyata semua subjek dalam penelitian ini memulai pembuktian dari dalam RSP. Perbedaan mendasar itu adalah proses berpikir dihitung sejak mahasiswa membaca soal

meskipun belum melakukan pembuktian (menurut Alcock & Inglis, 2008) sedangkan dalam penelitian ini dihitung sejak mahasiswa membaca soal dan mulai melakukan pembuktian.

Pendapat Alcock & Inglis (2008) bahwa semua proses berpikir dalam pembuktian selalu bermula dari RSP bertentangan dengan teori dan fakta di lapangan. Jika semua proses pembuktian berawal dari RSP, maka bertentangan dengan definisi jalur alami (Pinto, 1998), produksi bukti semantik (Weber & Alcock, 2004 dan Weber, 2004a), dan pendekatan referensial (Alcock & Weber, 2005). Alcock & Inglis (2008) menyatakan sekedar telah membaca soal saja dapat dikategorikan sudah berpikir dalam RSP. Dalam penelitian ini, ada 12 mahasiswa yang telah membaca soal dan mengetahui bahwa bukti yang disusun harus formal tetapi mereka tidak mampu bekerja secara formal sehingga pembuktian dimulai dari luar RSP. Ada

kalanya setelah membaca soal, mahasiswa tidak mengetahui sama sekali harus bekerja dari mana sehingga tidak bekerja apa-apa. Kasus ini terjadi pada subjek bernama Andy dalam penelitian Alcock yang diungkap kembali oleh Weber & Mejia-Ramos (2009).

Strategi semantik dalam penelitian ini dikategorikan menjadi tiga, yaitu (1) menemukan definisi konsep, (2) melakukan refleksi, dan (3) mencari petunjuk langkah. Ketiga kategori terjadi karena faktor yang berbeda tetapi proses yang terjadi di dalamnya memiliki kesamaan. Kategori (1) terjadi karena struktur kognitif yang tidak lengkap sedangkan kategori (2) dan (3) terjadi pada saat struktur kognitif sudah lengkap tetapi tidak mampu (atau tidak mau) mengkoordinasikannya secara formal untuk mencapai kesimpulan. Kesamaan yang dimiliki adalah mahasiswa menemukan makna baru setelah melakukan serangkaian kegiatan aksi, proses, objek, dan skema ketika sedang berada di luar dunia berpikir formal (di luar RSP).

Strategi semantik kategori menemukan definisi konsep terjadi karena terdapat komponen penting yang dibutuhkan dalam proses pembuktian yang tidak dimiliki subjek dalam struktur kognitifnya. Komponen penting ini berupa definisi konsep fungsi injektif yang tidak dapat dihasilkan dari sekadar mengkoordinasikan komponen lain yang sudah ada secara formal. Dorongan kuat untuk menemukan definisi konsep ini terjadi karena definisi konsep sangat diperlukan dalam proses pembuktian yang tanpa adanya definisi konsep ini menyebabkan pembuktian tidak dapat dilakukan. Dalam hal ini nampak bahwa dorongan mencari definisi konsep dipengaruhi keyakinan bahwa bukti harus bersifat deduktif.

Proses menemukan definisi konsep terjadi dengan berpikir wujud-simbolik. Bayangan konsep fungsi injektif digunakan untuk membuat contoh spesifik berupa diagram panah. Contoh spesifik ini dipandang sebagai contoh generik yang mewakili fungsi injektif. Contoh generik ini berfungsi sebagai prototip fungsi injektif yang mampu mengkonkretkan sesuatu yang seringkali tidak muncul dalam penyajian fungsi injektif secara formal.

Aksi fisik dan mental dilakukan pada contoh spesifik ini melalui berpikir wujud-simbolik untuk mengeksplorasi sifat fungsi injektif. Aksi ini kemudian diinteriorisasi menjadi proses dengan menangkap suatu makna dari aksi. Proses ini selanjutnya digeneralisasi menjadi suatu entitas berpikir formal yang didasarkan pada berpikir wujud-simbolik menjadi definisi konsep fungsi injektif. Dalam hal ini proses telah dienkapsulasi menjadi objek, yaitu definisi konsep fungsi injektif.

Definisi konsep fungsi injektif ini selanjutnya menjadi landasan operasional untuk melakukan pembuktian. Definisi jika  $x, y \in A$  dengan  $f(x) = f(y)$  maka  $x = y$  atau jika  $x, y \in A$  dengan  $x \neq y$  maka  $f(x) \neq f(y)$  selain berfungsi sebagai konsep juga berfungsi sebagai prosedur yang harus diikuti untuk membuktikan suatu fungsi sebagai fungsi injektif. Mengacu pada Gray dan Tall (1994) maka definisi formal fungsi injektif dapat disebut sebagai prosep (prosedur dan konsep).

Satu hal penting yang sangat mendukung suksesnya menemukan definisi konsep ini adalah ide kunci yang dijadikan landasan untuk melakukan aksi. Dalam kasus S1, ide kunci adalah  $a \neq b$  di  $A$  sedangkan dalam kasus S4, ide kunci adalah  $f(x) = f(y)$  di  $B$ . Ide kunci inilah yang membantu S1 dan S4 menemukan definisi konsep fungsi injektif. Hal ini mendukung pendapat Raman (2003) mengenai pentingnya ide kunci dalam proses pembuktian.

Strategi semantik kategori melakukan refleksi terjadi karena proses membuat kesimpulan yang spontan (menebak) yang tidak didasarkan pada koordinasi secara formal antara komponen struktur kognitif yang dimiliki. Komponen yang diperlukan dalam struktur kognitif untuk membuat kesimpulan sebenarnya sudah lengkap. Tidak adanya landasan formal dalam pengambilan keputusan mendorong subjek untuk melakukan refleksi. Ketidakmampuan mengkoordinasikan secara formal komponen yang ada dalam struktur kognitif mendorong subjek menggunakan berpikir wujud-simbolik untuk melakukan refleksi. Berdasarkan penelitian ini, nampak bahwa dorongan melakukan refleksi terjadi karena kesadaran bahwa kesimpulan yang dibuat hanya berdasarkan tebakan.

Proses refleksi terjadi dengan cara berpikir wujud-simbolik mengenai premis dan kesimpulan. Melalui berpikir wujud-simbolik, subjek melakukan rangkaian aksi untuk menangkap makna dari kegiatan eksplorasi hubungan antara premis dan kesimpulan. Makna yang diperoleh kemudian dicocokkan dengan komponen yang ada dalam struktur kognitif yang dimiliki untuk menentukan kebenaran kesimpulan yang dibuat.

Strategi semantik kategori mencari petunjuk terjadi pada saat komponen yang diperlukan dalam struktur kognitif sudah lengkap tetapi mahasiswa tidak mampu (atau tidak mau) mengkoordinasikan komponen-komponen tersebut untuk menghasilkan kesimpulan (subkesimpulan) secara formal. Ketidakmampuan atau ketidakmauan ini mendorong untuk berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik dan selanjutnya

melakukan aksi (fisik atau mental) untuk memperoleh objek baru dan selanjutnya diambil sebagai kesimpulan (subkesimpulan). Subkesimpulan ini menjadi penuntun langkah pembuktian selanjutnya untuk memperoleh kesimpulan akhir.

Proses yang terjadi pada kegiatan mencari petunjuk adalah menggunakan berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik. Dalam berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik ini dilakukan rangkaian aksi fisik atau mental yang selanjutnya diinteriorisasi menjadi proses. Proses ini kemudian dienkapsulasi menjadi objek yang diambil sebagai kesimpulan (subkesimpulan). Jadi, landasan berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik telah memberikan petunjuk untuk menghasilkan kesimpulan (subkesimpulan). Subkesimpulan dapat menjadi komponen penting pada proses pembuktian selanjutnya.

Dalam penelitian ini, S2 dan S3 mampu menyatakan definisi konsep fungsi injektif dengan baik sedangkan S1 dan S4 tidak mampu karena lupa definisi konsep fungsi injektif. Mengacu pada Hawro (2007) dan Moore (1994), salah satu penyebab kesulitan dalam menyusun bukti adalah pemahaman konsep yang tidak baik serta tidak dapat menyatakan definisi konsep. Meskipun demikian, S1 dan S4 memiliki bayangan konsep yang sangat memadai. S1 dan S4 menggunakan bayangan konsep untuk membuat contoh spesifik yang berfungsi sebagai contoh generik untuk menemukan sifat. Contoh spesifik atau generik dapat digunakan untuk mencari pola atau kesamaan sifat untuk merumuskan definisi konsep (Alcock & Inglis, 2008:116) tanpa mengikuti manipulasi aturan logika. Menurut Moore (1994), bayangan konsep yang tidak memadai dan ketidakmampuan (ketidakmauan) mengembangkan contoh dapat menjadi sumber kesulitan dalam menyusun bukti. Sebaliknya, bayangan konsep yang bagus dapat berperan mengkonkretkan landasan konseptual yang tidak muncul dalam penyajian formal (Alcock & Simpson, 2004:2).

S1 dan S4 mengembangkan contoh spesifik yang berfungsi sebagai contoh generik. Melalui contoh generik inilah S1 dan S4 melakukan rangkaian aksi, proses, objek, dan skema menghasilkan definisi konsep fungsi injektif. Kemampuan merumuskan definisi konsep dalam bahasa formal matematika menjadi faktor penting kesuksesan menyusun bukti. Ini sesuai dengan (Balacheff, 2010:131) bahwa asal mula mengetahui adalah dalam aksi tetapi prestasi dalam bukti matematis adalah dalam bahasa, yaitu bahasa simbolik matematis mulai level terendah sampai level formal yang digunakan matematisi.

Di awal pembuktian, semua subjek penelitian ini mengalami kesulitan dalam menentukan domain dan kodomain fungsi *gof*. Di saat mereka tidak dapat bekerja secara formal, mereka mengembangkan diagram. Bahkan di setiap menghadapi kesulitan untuk berpikir secara formal, semua subjek menggunakan diagram untuk membantu mereka langkah pembuktian mereka. Fakta ini sesuai dengan Gibson (1998:288) yang menyatakan bahwa mahasiswa sering mengarah pada strategi menggambar diagram ketika menghadapi kesulitan atau macet saat bekerja secara formal.

Semua subjek penelitian ini menggunakan diagram panah sebagai visualisasi fungsi atau fungsi komposisi. Visualisasi adalah proses mewujudkan representasi mental dan untuk kasus fungsi dapat berupa diagram panah (Dreyfus, 2002:31). Diagram panah adalah wujud dari representasi mental di saat seseorang berpikir wujud, wujud-simbolik, atau simbolik. Berpikir wujud-simbolik mengenai fungsi atau fungsi komposisi dalam diagram panah terbukti sangat membantu semua subjek dalam menyelesaikan pembuktian. Hal ini mendukung pendapat (Gibson, 1998:286) dan (Alcock & Simpson, 2004:2) mengenai pentingnya bayangan visual untuk memahami konsep matematika dan menyelesaikan tugas matematika. Ketidakmampuan atau ketidakmauan memvisualkan bayangan konsep yang dimiliki dapat menjadi sumber kesulitan dalam menyusun bukti.

Menggunakan diagram hampir selalu membantu mahasiswa untuk berhasil menyelesaikan tugas atau subtugas ketika tidak mampu bekerja secara simbolik (Gibson, 1998:301). Meskipun demikian, adakalanya mahasiswa tidak menemukan hubungan antara diagram dengan bukti yang diinginkan karena terjadi kebingungan harus memulai dari mana (Samkoff, dkk., 2012). Alcock & Simpson (2004) menyatakan bahwa representasi visual dapat berdampak positif atau negatif. Seringkali representasi visual merupakan prototip suatu konsep yang tidak memuat semua properti dari konsep.

Ada dua hal berkaitan dengan perilaku penggunaan berpikir wujud-simbolik dengan diagram panah oleh semua subjek penelitian ini. Pertama karena mereka mengalami kesulitan ketika berpikir formal dan kedua mereka mengetahui bahwa berpikir di luar formal lebih mudah. Ketika subjek pernah berhasil bekerja dengan gambar, nampak ia lebih cenderung bekerja dengan gambar daripada secara formal. Jadi, mahasiswa menggunakan gambar karena segan untuk terlibat serius berpikir formal atau karena mampu

menggunakan bayangan visual secara efektif untuk membangun kaitan yang bagus antara representasi visual dan formal (Alcock & Simpson, 2004).

Kesuksesan dengan berpikir wujud-simbolik yang dilakukan S1 dalam menemukan definisi konsep fungsi injektif mendorongnya menggunakan lagi untuk menuju kesimpulan  $f(x) \neq f(y)$ . Fakta ini menunjukkan bahwa ketika suatu representasi suatu konsep digunakan, perhatian dapat ditujukan pada representasi ini daripada untuk objek abstrak (konsep) (Dreyfus, 2002:32). Berpikir wujud-simbolik dapat mengurangi beban kognitif sehingga S1 berkomentar lebih mudah melihat gambar daripada berpikir abstrak. Hal ini sesuai Samkoff, dkk. (2012:49) bahwa gambar mampu memberikan akses untuk melihat, membandingkan, dan mengintegrasikan potongan informasi dengan usaha kognitif yang lebih rendah daripada ketika informasi yang sama disajikan secara simbolik.

## SIMPULAN DAN SARAN

### Simpulan

Jalur berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik dapat terjadi dalam tiga kemungkinan, yaitu (a) bermula dari dunia berpikir formal (RSP) lalu pindah ke dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik (non RSP) dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau di luar dunia berpikir formal, (b) bermula dari dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik (non RSP) lalu pindah ke dunia berpikir formal dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau di luar dunia berpikir formal, dan (c) semua proses berpikir terjadi di luar dunia berpikir formal.

Perpindahan dari dunia berpikir formal ke dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik dilakukan untuk tujuan (a) menemukan definisi konsep dalam rangka memperbaiki pemahaman, (b) melakukan refleksi dalam rangka mengecek kebenaran kesimpulan, dan (c) mencari petunjuk langkah non definisi dalam rangka menuntun langkah pembuktian. Karakteristik proses berpikir untuk masing-masing tujuan tersebut berbeda jika ditinjau dari faktor penyebab tetapi menunjukkan kesamaan dalam proses yang terjadi di dalamnya yaitu mahasiswa melakukan serangkaian aksi, proses, objek, dan skema dengan berpikir wujud-simbolik atau simbolik.

### Saran

Penelitian ini tidak melihat konsistensi mahasiswa dalam melakukan pembuktian pada beberapa soal. Hal ini berdasarkan alasan bahwa pemilihan strategi sangat bergantung pada materi (Alcock & Inglis, 2008) dan pengalaman belajar (Weber, 2004b). Hanya saja Alcock & Inglis (2008) menyatakan ketika mahasiswa sukses dengan satu strategi maka akan mempengaruhi pemilihan strategi pada masalah berikutnya sehingga strategi mereka akan terlihat sama. Penelitian lanjutan dapat dilakukan untuk melihat kecenderungan mahasiswa memilih suatu strategi dibandingkan strategi yang lain. Penelitian dapat difokuskan pada apakah kesuksesan dengan strategi semantik sebelumnya akan mendorong mahasiswa menggunakan strategi semantik untuk soal berikutnya.

## DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2010a. Transisi Berpikir dari Sekolah Menengah Ke Perguruan Tinggi. Dalam Muntholib (eds). *Prosiding Seminar Nasional Lesson Study 3* (Hlm. 285-294). Malang: FMIPA UM.
- Abdussakir. 2010b. Jalur Menuju Berpikir Formal dalam Matematika. Dalam Permadi, H. (eds). *Prosiding Seminar Nasional MIPA* (Hlm. 53-61). Malang: FMIPA UM.
- Alcock, L. & Inglis, M. 2008. Doctoral Students' Use of Examples in Evaluating and Proving Conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2): 111-129.
- Alcock, L. & Inglis, M. 2009. Representation Systems and Undergraduate Proof Productions: A comment on Weber. *Journal of Mathematical Behavior*, 28 (4): 209-211. (Online), ([www.staff.lboro.ac.uk/~mamji/files/semsyn.pdf](http://www.staff.lboro.ac.uk/~mamji/files/semsyn.pdf), diakses 16 Januari 2012).
- Alcock, L. & Simpson, A.. 2004. Convergence of sequences and Series: Interactions Between Visual Reasoning and the Learner's Beliefs about Their Own Role. *Educational Studies in Mathematics*, 57:1-32.
- Alcock, L. & Weber, K. 2005. Referential and Syntactic Approaches to Proof: Case Studies from a Transition Course. Dalam Chick, H.L. & Vincent, J.L. (eds). *Proceeding of the 29<sup>th</sup> Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hlm. 33-40). (Online), ([www.emis.de/proceedings/PME29/.../PME29Vol2AlcockWeber.pdf](http://www.emis.de/proceedings/PME29/.../PME29Vol2AlcockWeber.pdf), diakses 16 Januari 2012).
- Alcock, L. & Weber, K. 2008. Referential and Syntactic Approaches to Proving: Case Studies from a Tran-

- sition-to-Proof Course. Dalam Hitt, F. (eds). *Research in Collegiate Mathematics Education VII* (Hlm. 93-114). (Online), (<https://dspace.lboro.ac.uk/2134/8945>, diakses 16 Januari 2012).
- Balacheff, N. 2010. Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. Dalam Hanna, G. (eds). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York: Springer.
- Blanton, M., Stylianou, D. dan David, M. 2003. The Nature of scaffolding in Undergraduate Transition to Formal Proof. Dalam Pateman, N. (eds). *Proceedings of the 27<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (Hlm. 113-120). Honolulu, HI.
- Cheng, Ying-Hao & Lin, Fou-Lai. 2009. Developing Learning Strategies for Enhancing Below Average Students' Ability in Constructing Multi-Step Geometry Proof. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Cirillo, M. 2009. Challenges to Teaching Authentic Mathematical Proof in School Mathematics. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Dreyfus, T. 2002. Advanced Mathematical Thinking Processes. Dalam Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publisher.
- Epp, S.S. 2003. The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly*, 110(10):886-899.
- Gibson, D. 1998. Students' Use of Diagrams to Develop Proofs in an Introductory Analysis Course. In Schoenfeld, A.H., Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III* (Hlm. 284-307). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Gray, E. & Tall, D.O. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2):115-141.
- Hanna, G, de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, N.H., Lin, F.L., Selden, A., Tall, D., & Yevdokimov, O. 2009. ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education (Discussion Document). Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Hawro, J. 2007. University Students' Difficulties with Formal Proving and Attempts to Overcome Them. Dalam Pitta-Pantazi, D. (eds). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Hlm. 2290-2299). Larnaca, Cyprus, 22 – 26 February 2007.
- Iannone, P. & Nardi, E. 2007. The Interplay between Syntactic and Semantic Knowledge in Proof Production: Mathematicians' Perspectives. Dalam Pitta-Pantazi, D. (eds). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Hlm. 2300-2309). Larnaca, Cyprus, 22 – 26 February 2007.
- Kogce, D., Aydin, M. & Yildiz, C. 2010. The Views of High School Student about Proof and Their Levels of Proof (The Case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2:2544-2549.
- Martin, W.G. & Harel, G. 1989. Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1):41-51.
- Moore, R.C. 1994. Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (3): 249-266.
- Nichols, S.R. 2008. *Student-to-Student Discussion: The Role of the Instructor and Student in Discussion in an Inquiry-Oriented Transition to Proof Course*. Ph.D Dissertation (unpublished). Austin: University of Texas.
- Pinto, MMF. 1998. *Students' Understanding of Real Analysis*. Unpublished PhD Thesis. Warwick, UK: University of Warwick.
- Pfeiffer, K. 2011. *Features and Purposes of Mathematical Proofs in the View of Novice Student: Observation from Proof Validation and Evaluation Performances*. PhD Dissertation (unpublished) of School of Mathematic, Statistics and Applied Mathematics. Galway: National University of Ireland.
- Raman, M. 2003. Key Ideas: What are They and How Can They Help Us Understand How People View Proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52(3):319-325. (Online), (<http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1024360204239>, diakses 16 Januari 2012).
- Rodríguez, F. & Gutiérrez, A. 2006. Analysis of Proofs Produced by University Mathematics Students, and The Influence of Using Cabri Software. Dalam Novotná, J. (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Hlm. 433-440). Prague: PME.



- Samkoff, A., Lai, Y. & Weber, K. 2012. On the Different Ways that Mathematicians Use Diagram in Proof Construction. *Research in Mathematics Education*, 14(1):49-67.
- Schoenfeld, A. 1998. What Do We Know about Mathematics Curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1):55-80.
- Stewart, S. 2008. *Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking*. Unpublished Ph.D. Thesis. Auckland: The University of Auckland.
- Tall, D.O. 2008a. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2):5-24.
- Tall, D.O. 2008b. *The Historical & Individual Development of Mathematical Thinking: Ideas that are Set-Before and Met-Before*. Plenary Presented at Colóquio de História e Tecnologia no Ensino Da Matemática. UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil, May 5<sup>th</sup>. (Online), (<http://www.davidtall.com/>, diakses 3 Januari 2010).
- Tall, D.O. 2009. Cognitive and Social Development of Proof Through Embodiment, Symbolism & Formalism. Dalam Lin, Fou Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Vol 2*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Tall, D.O. & Mejia-Ramos, J.P. 2006. *The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof*. Dipresentasikan pada *the Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* di Universität Duisburg-Essen, Essen, Germany. (Online), (<http://www.davidtall.com/>, diakses 3 Januari 2010).
- Weber, K. 2001. Student Difficulty in Constructing Proof: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1):101-109.
- Weber, K. 2004a. A Framework for Describing the Processes that Undergraduates Use to Construct Proofs. *Proceeding of The 28<sup>th</sup> Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4:425-432.
- Weber, K. 2004b. Traditional Instruction in Advanced Mathematics Courses: A Case Study of One Professor's Lectures and Proofs in an Introductory Real Analysis Course. *Journal of Mathematical Behavior*, 23:115-133.
- Weber, K. 2009. How Syntactic Reasoners Can Develop Understanding, Evaluate Conjectures, and Construct Counterexamples in Advanced Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 28:200-208.
- Weber, K. & Alcock, L. 2004. Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56:209-234.
- Weber, K. & Mejia-Ramos, J.P. 2009. An Alternative Framework to Evaluate Proof Productions: A Reply to Alcock and Inglis. *Journal of Mathematical Behavior*, 28:212-216.
- Wu, H. 1996. The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(3): 221-2.