

# MENYUSUN BUKTI MATEMATIKA DENGAN STRATEGI SEMANTIK

**Abdussahir**

Jurusan Matematika UIN Maliki Malang

Email: abdussahir1975@yahoo.co.id

## **Abstrak**

*Alcock & Inglis (2008) menyatakan terdapat dua strategi dalam menyusun bukti, yaitu strategi sintaksis dan strategi semantik. Dalam strategi sintaksis penulis bukti secara keseluruhan bekerja dalam sistem deduktif aksiomatik, sedangkan dalam strategi semantik penulis bukti sempat bekerja di luar sistem deduktif aksiomatik. Tulisan ini berusaha menjelaskan alasan mengapa penulis bukti menggunakan strategi semantik dalam menyusun bukti. Data penelitian menunjukkan bahwa strategi semantik dilakukan karena penulis bukti ingin (1) meyakinkan diri pada kebenaran pernyataan atau langkah pembuktian, (2) memperbaiki pemahaman yang dimiliki, dan (3) mencari ide untuk menuntun langkah pembuktian.*

*Kata kunci: Bukti, menyusun bukti, strategi semantik.*

## **Pendahuluan**

Bukti matematis merupakan satu karakteristik yang paling membedakan matematika dari ilmu lainnya sejak abad kesembilan belas (Davis & Hersh, 1981:147). Senada dengan pernyataan ini, Dreyfus (1990:126) menyatakan bahwa bukti adalah karakteristik utama matematika dan merupakan karakteristik yang paling membedakan matematika dari ilmu lainnya. Bukti menempati jantung berpikir matematis dan penalaran deduktif (Cheng & Lin, 2009:124). Gila Hanna, dkk (2009) juga menyatakan bahwa bukti berada dalam jantung matematika.

Bukti matematis menjadi salah satu topik yang paling banyak dibicarakan dalam bidang pendidikan matematika setelah *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) memasukkannya dalam *Principles and Standards for School Mathematics* tahun 2000. Sejumlah penelitian yang berkaitan dengan bukti matematis telah dilaporkan dalam berbagai literatur. Berbagai penelitian ini dilakukan pada tingkat pendidikan yang berbeda dan dari perspektif yang berbeda. Penelitian melihat keseluruhan dari perspektif mahasiswa dan dosen (Raman 2003; Housman & Porter, 2003) ke sudut pandang siswa, guru dan calon guru sekolah menengah (Healy & Hoyles, 2000; Knuth, 2002a & 2002b; Chin, Liu & Lin, 2009, Gondek, Rosken & Torner, 2009, Furinghetti & Morselli, 2009, Kotelawala, 2009, Kögce, Aydm & Yildiz, 2010) sampai pada perspektif calon guru SD (Lo & McCrory, 2009, Turker, dkk., 2010).

Sebagian besar penelitian dalam agenda ini difokuskan pada sekolah dasar dan terutama sekolah menengah. Hanya beberapa penelitian yang berfokus pada mahasiswa sehingga penelitian pada level mahasiswa masih kurang (Marrades & Gutiérrez, 2000:121, Nichols, 2008:5). Perbedaan kunci antara siswa sekolah menengah dan mahasiswa matematika adalah bahwa siswa di sekolah menengah masih belajar untuk menggunakan penalaran deduktif, sedangkan mahasiswa biasanya sudah siap untuk melakukan bukti formal (Rodríguez & Gutiérrez, 2006:443).

Beberapa peneliti telah memberi sedikit perhatian pada bukti yang dihasilkan mahasiswa dan memfokuskan pada proses yang digunakan mahasiswa untuk menyusun bukti (Weber, 2004:425). Pinto (1998) mengemukakan ada dua jalur yang ditempuh mahasiswa dalam menulis bukti, yaitu jalur alami dan jalur formal. Berdasar pada penelitian Pinto, Weber (2004a, 2004b) menambahkan satu jalur baru, yaitu jalur prosedural atau hafalan. Beberapa istilah berbeda mengenai jalur alami dan formal juga ditemukan dalam literatur. Weber & Alcock (2004:210) dan Weber (2004a:428-429) menggunakan istilah produksi bukti sintaksis dan produksi bukti semantik. Alcock & Weber (2005:33) menyebut pendekatan referensial dan pendekatan sintaksis. Dalam jalur alami, produksi bukti semantik, atau pendekatan referensial mahasiswa pertama kali menyusun bukti menggunakan bayangan konsep atau representasi objek matematika yang terdapat dalam masalah.

Alcock & Inglis (2008:114) mendefinisikan sistem representasi bukti (*representation system of proof*, RSP) sebagai sekumpulan pernyataan-pernyataan simbolik yang berlaku umum yang dapat dikombinasikan ke dalam konfigurasi yang diperbolehkan melalui aturan logika proposisi dan kerangka kerja bukti yang diterima. Selanjutnya, Alcock & Inglis (2008:115) mendefinisikan dua strategi dalam produksi bukti, yaitu *strategi sintaksis* dan *strategi semantik*. Dalam strategi sintaksis, penulis bukti secara keseluruhan bekerja dalam RSP sedangkan dalam strategi semantik, penulis bukti sempat bekerja di luar RSP meskipun hanya sebagian kecil. Berpikir di luar RSP, menurut Alcock & Inglis (2008:116) ditandai dengan penggunaan contoh, penggunaan bahasa informal untuk menyatakan ide matematika, dan penggunaan gerakan.

Meskipun Alcock & Inglis (2008) sudah mengenalkan istilah strategi sintaksis dan strategi semantik, mereka tidak menjelaskan proses berpikir yang terjadi selama strategi itu berlangsung. Kategori strategi sintaksis dan strategi semantik hanya dilihat dari ada atau tidak adanya penggunaan aspek di luar RSP. Belum ada penjelasan mengapa penulis bukti perlu menggunakan aspek di luar RSP dalam strategi semantik. Berdasarkan hal tersebut, maka penelitian ini dilakukan untuk mengetahui mengapa penulis bukti menggunakan strategi semantik pada saat menyusun bukti.

## **Pembahasan**

Penelitian ini dilaksanakan pada tanggal 23 Pebruari 2012. Sebanyak 25 mahasiswa semester akhir di Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang matematika diminta untuk menyelesaikan soal pembuktian. Soal yang diberikan sebagai berikut.

Misalkan  $f$  fungsi dari  $A$  ke  $B$ ,  $g$  fungsi dari  $B$  ke  $C$   
Buktikan bahwa jika  $g \circ f$  injektif maka  $f$  injektif!

Setelah mengerjakan soal tersebut, selanjutnya dipilih mahasiswa yang menggunakan strategi semantik dalam menyusun bukti. Terhadap mahasiswa ini dilakukan wawancara berbasis tugas untuk mengetahui alasan mereka terkait dengan penggunaan aspek di luar RSP dalam langkah pembuktian.

Berdasarkan jawaban mahasiswa terhadap soal yang diberikan diperoleh data bahwa 5 mahasiswa menggunakan strategi sintaksis dan 20 mahasiswa

menggunakan strategi semantik. Dari 20 mahasiswa yang menggunakan strategi semantik, 2 mahasiswa menggunakan bahasa informal dalam menyusun bukti, 17 mahasiswa menggunakan diagram panah, dan 1 mahasiswa menggunakan diagram panah sekaligus contoh khusus secara simbolik.

Wawancara berbasis tugas dilakukan terhadap 18 mahasiswa yang menggunakan diagram panah atau contoh. 2 mahasiswa yang juga menggunakan strategi semantik melalui penggunaan bahasa informal tidak diwawancarai.

Berdasarkan hasil wawancara diperoleh alasan mahasiswa terkait penggunaan diagram panah atau contoh, seperti disajikan dalam tabel berikut.

No.	Alasan	Frekuensi
1.	Mempermudah atau memperbaiki pemahaman	8
2.	Mencari ide untuk menuntun langkah	8
3.	Meyakinkan kebenaran langkah	2
4.	Menjelaskan ide atau masalah	6

## Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa tujuan mahasiswa menggunakan representasi di luar RSP (misalnya diagram panah dan contoh khusus) adalah untuk mempermudah dan memperbaiki pemahaman, menjelaskan ide atau permasalahan, mencari ide untuk menuntun langkah pembuktian, dan meyakinkan kebenaran pernyataan. Hasil ini memiliki kesesuaian dengan penelitian Alcock & Weber (2005) ketika mewawancarai subyek bernama Brad yang menggunakan pendekatan referensial (semantik) dalam menyusun bukti. Brad menyatakan bahwa penggunaan gambar, diagram, atau contoh adalah untuk memahami masalah, meyakinkan bahwa langkah yang digunakan benar, menentukan jenis pembuktian yang harus dilakukan, dan mencari ide ketika mengalami kebuntuan langkah. Hasil penelitian ini juga memperkuat pernyataan Gibson (1998) bahwa secara umum penggunaan diagram, sebagai bagian dari aspek di luar RSP, adalah untuk (1) menentukan kebenaran pernyataan, (2) memahami informasi, (3) menemukan ide, dan (4) menjelaskan ide.

Berkaitan dengan adanya penulis bukti menggunakan sesuatu di luar RSP, misal gambar atau diagram, tetapi gambar ini hanya sebagai penjelas ide dan bukan sebagai sumber ide, maka strategi ini masuk dalam strategi semantik berdasarkan definisi Alcock & Inglis (2008:115) tetapi merujuk pada Pinto (1998) dan Weber & Mejia-Ramos (2009), strategi ini tidak termasuk dalam strategi semantik. Hal ini sesuai yang dinyatakan Pinto (1998) bahwa pada jalur formal, seseorang dapat menggunakan gambar untuk menjelaskan konsep tetapi bukan untuk menuntun langkah. Weber & Mejia-Ramos (2009) menunjukkan fakta seorang mahasiswa (Kevin) pada saat membuktikan suatu pernyataan, sempat menggunakan contoh, tetapi ia tidak pernah mempertimbangkan contoh ini dalam menyusun buktinya dan penyusunan bukti semuanya dalam penalaran sintaksis. Merujuk pada Alcock & Inglis (2008) seharusnya strategi Kevin termasuk semantik, tetapi Weber dan Mejia-Ramos (2009) menyatakan sangat ganjil untuk menyebut strategi Kevin sebagai strategi semantik. Berdasarkan perbedaan pendapat ini, maka peneliti sependapat dengan Pinto (1998) dan Weber & Mejia-Ramos (2009) bahwa ketika aspek di luar RSP digunakan hanya sebagai penjelas ide, maka strategi ini bukanlah strategi semantik.

Berkaitan dengan hasil penelitian ini, maka penelitian lebih lanjut yang dapat dilakukan adalah melihat alasan penggunaan strategi semantik dilihat dari struktur kognitif mahasiswa. Berdasarkan wawancara berbasis tugas dalam penelitian terdapat indikasi bahwa mahasiswa menempuh strategi semantic karena (1) ketidaklengkapan struktur kognitif yang dibutuhkan untuk pembuktian atau (2) struktur kognitif lengkap tetapi tidak mampu untuk dikoordinasikan untuk menghasilkan suatu kesimpulan dengan tepat.

### **Daftar Pustaka**

- Alcock, L., & Inglis, M. 2008. Doctoral Students' Use of Examples in Evaluating and Proving Conjectures. *Educational Studies in Mathematics*. Volume 69 Halaman: 111–129.
- Alcock, L., & Weber, K. 2005. Referential and Syntactic Approaches to Proof: Case Studies from a Transition Course. Dalam Chick, H.L. & Vincent, J.L (eds). *Proceeding of the 29<sup>th</sup> Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Volume 2 Halaman 33-40.
- Cheng, Ying-Hao & Lin, Fou-Lai. 2009. Developing Learning Strategies for Enhancing Below Average Students' Ability in Constructing Multi-Step Geometry Proof. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Chin, E.T., Liu, C.Y., & Lin, Fou-Lai. 2009. Taiwanese Junior High School Students' Proof Conceptions in Algebra. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Davis, P.J., & Hersh, R. 1981. *The Mathematical Experience*. New York: Viking Penguin Inc.
- Dreyfus, T.. 1990. *Advanced Mathematical Thinking*. Dalam Nesher & Kilpatrick (eds). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, ICMI Study Series*, Cambridge: Cambridge University Press. Hal:113–134.
- Furinghetti, F. & Morselli, F.. 2009. Teachers' Beliefs and the Teaching of Proof. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Gibson, D.. 1998. Student's Use Diagram to Develop Proof in an Introductory Analysis Course. *CBMS Issues in Mathematics Education*. Volume 7 Halaman: 284-307.
- Gondek, V., Rosken, B., & Torner, G.. 2009. Algebra vs. Analysis: University Students' Views on The Role of Proof. Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, N.H., Lin, F.L., Selden, A., Tall, D., & Yevdokimov, O.. 2009. ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education (Discussion Document). Dalam Lin, Fou-Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Healy, L. & Hoyles, C. 2000. A study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 31 No 4 Hal:396–428.
- Housman, D. & Porter, M. 2003. Proof Schemes and Learning Strategies of Above Average Mathematics Students. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 52 No 3 Hal:139–158.

- Knuth, E.J. 2002a. Teachers' Conceptions of Proof in The Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Vol 5 Hal: 61–88
- Knuth, E. J. 2002b. Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 33 No 5 Hal:379–405.
- Kogce, D., Aydin, M. & Yildiz, C.. 2010. The Views of High School Student about Proof and Their Levels of Proof (The Case of Trabzon). *Procedia Social and Behavioral Sciences* 2: 2544–2549.
- Kotelawala, U.. 2009. A Survey of Teacher Beliefs on Proving. Dalam Lin, Fou Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 1*. Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Lo, J.J. & McCrory, R.. 2009. Proof and Proving in a Mathematics Course for Prospective Elementary Teachers. Dalam Lin, Fou Lai (eds). *Proceeding of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 2* Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Marrades, R., & Gutiérrez, A. 2000. Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 44 No 1/2 Hal: 87-125
- Nichols, S.R.. 2008. *Student-to-Student Discussion: The Role of the Instructor and Student in Discussion in an Inquiry-Oriented Transition to Proof Course*. PhD Dissertation (unpublished) of the University of Texas at Austin.
- Pinto, M. M. F. 1998. *Students' Understanding of Real Analysis*. Unpublished PhD Thesis, University of Warwick. UK.
- Raman, M. 2003. Key Ideas: What are They and How Can They Help Us Understand How People View Proof? *Educational Studies in Mathematics*. Vol 52, No 3, Hal:319–325.
- Rodríguez, F. & Gutiérrez, A. 2006. *Analysis of Proofs Produced by University Mathematics Students, and The Influence of Using Cabri Software*. Dalam Novotná, J. (Eds.). *Proceedings 30 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*. Prague: PME.
- Turker, B., Alkas, C., Aylar, E., Gurel, R. & Ispir, O.K.. 2010. The Views of Elementary Mathematics Education Preservice Teachers on Proving. *International Journal of Human and Social Sciences*. Vol 5 No 7 Halaman: 423-427.
- Weber, K. 2004a. A Framework for Describing the Processes that Undergraduates Use to Construct Proofs. *Proceeding of The 28<sup>th</sup> Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Volume 4 Halaman: 425-432.
- Weber, K. 2004b. Traditional Instruction in Advanced Mathematics Courses: A Case Study of One Professor's Lectures and Proofs in an Introductory Real Analysis Course. *Journal of Mathematical Behavior* 23 Halaman 115–133.
- Weber, K. dan Alcock, L., 2004. Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics* Volume 56 Halaman: 209–234.
- Weber, K. & Mejia-Ramos, J.P.. 2009. An Alternative Framework to Evaluate Proof Productions: A Reply to Alcock and Inglis. *Journal of Mathematical Behavior* Volume 28 Halaman: 212–216.