TRANSISI BERPIKIR DARI SEKOLAH MENENGAH KE PERGURUAN TINGGI

Abdussakir
Dosen Jurusan Matematika UIN Maliki Malang; Mahasiswa Program Doktor Pendidikan Matematika PPS UM

Abstrak: David Tall menyatakan bahwa terdapat tiga dunia berpikir matematika, yaitu dunia perwujudan, simbolis, dan formal. Pembelajaran matematika di sekolah menengah lebih menekankan pada dunia perwujudan dan simbolis, sedangkan di perguruan tinggi lebih menekankan pada dunia berpikir formal. Perubahan pola pembelajaran ini mengakibatkan terjadinya transisi berpikir pada mahasiswa matematika di tahun pertama perguruan tinggi. Untuk sampai pada dunia berpikir formal, terdapat tiga jalur yang dapat ditempuh mahasiswa, yaitu jalur alami, formal, dan prosedural. Tulisan ini mencoba membuka ruang untuk beberapa pertanyaan, misalnya mengapa mahasiswa memilih jalur tertentu, apakah mahasiswa selalu menempuh jalur yang sama untuk materi matematika yang berbeda, dan adakah kemungkinan jalur lain yang dapat ditempuh.

Kata kunci: dunia berpikir, transisi berpikir, jalur.

Sebagian besar mahasiswa matematika di tahun pertama mengalami perubahan dalam proses berpikir sebagai akibat transisi dari matematika sekolah ke pembuktian formal dalam matematika murni di universitas. Matematika sekolah dapat dipandang sebagai kombinasi dari representasi visual, termasuk geometri dan grafik, bersama-sama dengan perhitungan dan manipulasi simbolis. Matematika murni di universitas bergeser menuju kerangka formal sistem aksiomatik dan bukti matematik.

Transisi dalam berpikir dapat dirumuskan dalam kerangka *tiga dunia matematika*, yaitu

(1) dunia *perwujudan-konseptual*, berda-sarkan persepsi dan refleksi pada sifat-sifat objek, pada awalnya terlihat dan dirasakan dalam dunia nyata tapi kemudian dibayangkan dalam pikiran,
(2) dunia *simbolis-proceptual*, yang tumbuh keluar dari dunia perwujudan melalui tindakan (seperti menghitung) dan disimbolkan sebagai konsep masuk akal (seperti angka) yang berfungsi sebagai proses untuk berbuat dan konsep untuk berpikir (prosep), dan
(3) dunia *formal-aksiomatik*, dari kerangka teoritik definisi konsep dan bukti matematika, yang membalik urutan konstruksi makna dari definisi yang didasarkan pada objek dikenal menuju konsep formal berdasarkan pada set-teoritik definisi (Tall, 2004:285, 2008a:5).

Setiap "dunia" mempunyai urutan pengembangan sendiri dan bentuk-bentuk bukti sendiri yang dapat dipadukan untuk menghasilkan berbagai macam cara berpikir secara matematis (Tall, 2008a:5, Tall dan Mejia-Ramos, 2006:5). Dalam dunia perwujudan, mahasiswa mulai dengan percobaan fisik untuk menemukan kecocokan antar benda, deskripsi verbal menjadi definisi dan digunakan untuk mendukung konstruksi visual terhadap bukti verbal dan membangun teori dari definisi dan bukti. Dalam dunia simbolik, argumen dimulai dari perhitungan numerik yang spesifik dan berkembang menjadi bukti identitas aljabar seperti

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

dengan manipulasi simbolik. Dalam dunia formal, bentuk bukti yang diinginkan adalah deduksi formal, seperti teorema nilai tengah dibuktikan dengan aksioma kelengkapan (Tall dan Mejia-Ramos, 2006:5).

Beberapa penelitian mengenai transisi menuju berpikir formal sudah dilakukan. Hasil penelitian Hong dkk (2009) menunjukkan bahwa guru matematika lebih cenderung pada dunia simbolis sedangkan dosen lebih cenderung pada dunia formal. Guru lebih cenderung pada gaya prosedural sedangkan dosen lebih cenderung pada gaya formal.

Penelitian oleh Stewart & Ramos (2007, 2008) pada matakuliah aljabar linear menemukan berbagai cara mahasiswa menjelaskan konsep bebas linear, nilai eigen, dan vektor eigen. Mahasiswa menggunakan representasi perwujudan dan simbolis untuk menjelaskan konsep tersebut. Namun, demikian dalam penelitian ini tidak dijelaskan alasan mengapa mahasiswa menggunakan representasi perwujudan dan simbolis. Lebih lanjut dalam disertasinya, Sepideh Stewart (2008:247) menyarankan agar dilakukan penelitian mendalam mengenai bagaimana mahasiswa dapat mencapai berpikir formal.

Penelitian Pinto (1998) menemukan dua rute yang ditempuh mahasiswa dalam matakuliah analisis real, yaitu rute alami dan rute formal, untuk menuju berpikir formal. Rute alami dibangun berdasarkan dunia perwujudan, simbolis atau gabungan keduanya dan membentuk jaringan dengan bayangan mental selama proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti tertulis. Rute formal menfokuskan pada teorema-teorema dan langkah logika yang diperlukan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Berdasarkan penelitian Pinto, Weber (2004) menambahkan satu rute, yaitu rute procedural, ketika melaksanakan penelitian pada matakuliah analisis real. Rute prosedural menfokuskan langkah pembuktian sebagai hasil menghapal.

Davil Tall (2008b:14-15) menyatakan

"These transitions occur throughout the curriculum. Those that involve unhelpful met-befores include:

(a) *From counting to the whole number concept*
(b) *From whole numbers to fractions*
(c) *From whole numbers to signed numbers*
(d) *From arithmetic to algebra*
(e) *From powers to fractional and negative powers*
(f) *From finite arithmetic to the limit concept*
(g) *From description to deductive definition*
(h) *At many other transitions, such as teaching the function concept in stages (linear, quadratic, trigonometric, logarithm, exponential, etc) builds limitations at each stage that stunt long-term growth.*

Research in many of these areas still needs to be done, so I invite you to do research into the effects of met-befores in transitions in the mathematical curriculum."

Pernyataan David Tall ini menjelaskan bahwa penelitian tentang dampak *met-before* (pengalaman belajar sebelumnya) dalam transisi berpikir juga sangat perlu dilakukan.

Berdasarkan uraian di atas, maka beberapa pertanyaan tentang mengapa memilih rute tertentu dan pengaruh *met-before* perlu diungkapkan untuk diteliti secara serius. Pertanyaan lain yang muncul berikutnya adalah apakah untuk rute yang ditempuh seorang mahasiswa selalu sama untuk materi matematika yang berbeda. Selain itu, kemungkinan adanya rute lain selain rute alami, formal, dan procedural masih perlu diungkap.

Set-Before* dan *Met-Before

David Tall (2008a) menggunakan istilah *set-before* untuk merujuk kepada struktur mental manusia yang dibawa sejak lahir, yang mungkin memerlukan sedikit waktu untuk matang saat otak manusia membuat koneksi pada awal kehidupan. Sebagai contoh, struktur visual otak memiliki sistem *built-in* untuk mengidentifikasi warna dan corak, untuk melihat perubahan dalam corak, mengidentifikasi sisi, mengkoordinasikan sisi untuk melihat benda-benda dan melacak gerakan mereka. Jadi anak lahir dengan sistem biologis untuk mengenali jumlah benda-benda (satu, dua, atau mungkin tiga) yang memberikan *set-before* untuk konsep "duaan" sebelum anak belajar menghitung.

Lebih lanjut, Tall (2008a) menyatakan ada tiga *set-before* mendasar yang menyebabkan manusia berpikir secara matematis dengan cara tertentu. Ketiganya adalah:

1. *Pengenalan* pola, persamaan dan perbe-daan;
2. *pengulangan* rangkaian tindakan sampai menjadi otomatis.
3. *bahasa* untuk menggambarkan dan memperbaiki cara kita berpikir tentang sesuatu;

Meskipun pengenalan dan pengulangan untuk berlatih kebiasaan-kebiasaan juga ditemukan pada spesies lain, kekuatan bahasa, dan penggunaan simbol-simbol yang terkait, yang memungkinkan manusia untuk fokus pada ide-ide penting, untuk menamai mereka dan berbicara tentang mereka untuk memperbaiki makna. Pengenalan pola adalah fasilitas penting untuk matematika, termasuk pola dalam bentuk dan bilangan.

Pengulangan yang menjadi otomatis sangat penting untuk belajar prosedur. Namun, ada tingkat yang lebih tinggi yang tidak hanya melibatkan kemampuan untuk melakukan prosedur, tetapi juga untuk *berpikir tentang* hal ini sebagai suatu entitas. Dalam hal ini, simbol-simbol beroperasi secara dual, yakni sebagai proses dan konsep (*prosep*) yang memungkinkan manusia untuk berpikir fleksibel (Gray & Tall, 1994).

Perkembangan pribadi didasarkan pada pengalaman yang telah ditemui sebelumnya. Pengalaman sebelumnya membentuk koneksi di otak yang mempengaruhi bagaimana memahami situasi baru. David Tall (2008a) mendefinisikan *met-before* sebagai fasilitas mental sekarang berdasarkan pengalaman spesifik individu sebelumnya.

Suatu *met-before* ini kadang-kadang konsisten dengan situasi baru dan kadang-kadang tidak konsisten. Misalnya, *met-before* "2 + 2 menghasilkan 4" adalah pengalaman pertama dalam aritmetika bilangan cacah dan terus konsisten dengan aritmetika pecahan, bilangan bulat positif dan negatif, rasional, real dan bilangan kompleks. *Met-before* "menghilangkan menghasilkan lebih kecil" tetap konsisten dengan pecahan (positif) pecahan, tetapi tidak konsisten dengan negatif di mana menghilangkan -2 menghasilkan lebih banyak. *Met-before* yang sama berlaku juga pada himpunan berhingga, yakni menghilangkan suatu subset meninggalkan unsur yang lebih sedikit, tetapi tidak konsisten dalam konteks himpunan takberhingga, di mana menghapus bilangan genap dari himpunan bilangan cacah masih meninggalkan bilangan ganjil dengan kardinalitas yang sama. Dengan cara ini, *met-before* dapat beroperasi secara terselubung, mempengaruhi cara individu menafsirkan matematika baru, kadang-kadang mendukung, tapi kadang-kadang menyebabkan kebingungan internal yang menghambat belajar.

Kebanyakan kurikulum hanya berfokus pada perluasan pengalaman berdasarkan pada *met-before* positif, dan gagal untuk menjelaskan *met-before* yang menyebabkan banyak peserta didik mengalami kesulitan mendalam. Misalnya, matematisi akan memiliki konsep limit sebagai *met-before* dalam pikiran mereka, sebagai dasar logika untuk kalkulus dan analisis; tetapi ini bukanlah *met-before* bagi siswa yang baru memulai kalkulus dan menyebabkan kesulitan mendalam. Otak mengubah kemampuannya untuk berpikir sepanjang waktu, mengorganisasikan kembali informasi untuk menciptakan struktur-struktur baru yang lebih rumit dan lebih baik dalam menghadapi situasi yang baru. Otak bukan sekadar tempat penyimpanan pengalaman sebelumnya dan menambah informasi baru untuk informasi lama. Otak merumuskan ulang informasi lama dengan cara baru, mengubah cara berpikir saat manusia tumbuh lebih dewasa. Ahli mungkin sudah lupa bagaimana mereka berpikir ketika mereka masih muda dan mungkin perlu merenungkan bagaimana *met-before* siswa yang berbeda mempengaruhi cara mereka belajar.

Tiga Dunia Matematika

Perkembangan individu dibangun atas tiga *set-before* mendasar yaitu *pengakuan, pengulangan* dan *bahasa* untuk mengkonstruksi tiga urutan perkembangan yang saling terkait dan saling terpadu untuk membangun pemikiran matematis secara penuh (Tall, 2004, 2006). Ini bukan untuk mengatakan bahwa ada korespondensi satu-satu antara *set-before* dan urutan perkembangan. *Pengakuan* dan kategorisasi gambar serta bentuk mendukung pemikiran dalam geometri dan grafik, sedangkan *pengulangan* serangkaian tindakan yang disimbolkan sebagai konsep yang dapat dipikirkan mengarah pada aritmetika dan aljabar. Masing-masing proses konstruksi ini berkembang lebih lanjut melalui penggunaan *bahasa* untuk menggambarkan, mendefinisikan dan menyimpulkan hubungan, sampai pada tingkat tertinggi, *bahasa* digunakan sebagai dasar untuk matematika formal.

Davidd Tall (2008a) selanjutnya menggambarkan cara berpikir ini ke dalam *tiga dunia matematika* yang berkembang dalam pengalaman duniawi dengan cara yang cukup berbeda. Tiga dunia matematika ini sebagai berikut.

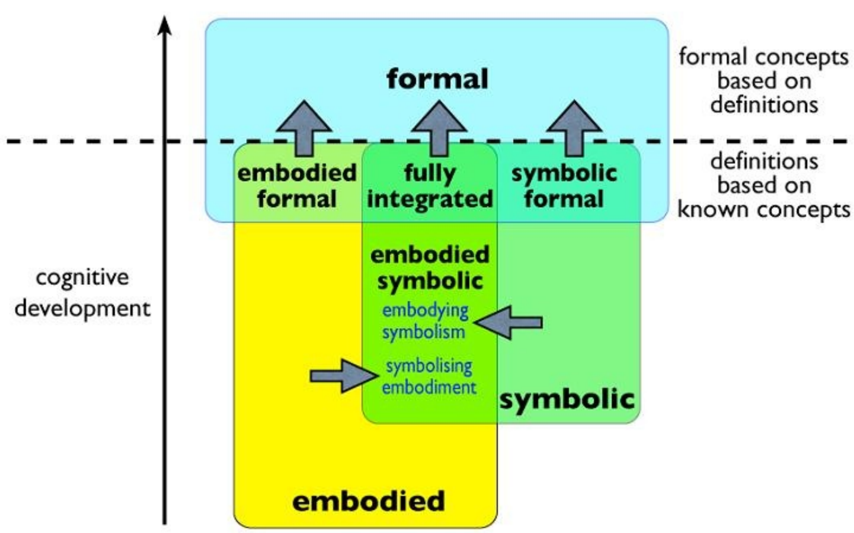
1. *Dunia perwujudan-konseptual*, berdasarkan persepsi dan refleksi pada sifat-sifat objek, pada awalnya terlihat dan dirasakan dalam dunia nyata tapi kemudian dibayangkan dalam pikiran;
2. *Dunia simbolis-proceptual* yang tumbuh keluar dari dunia perwujudan melalui tindakan (seperti menghitung) dan disimbolkan sebagai konsep masuk akal (seperti angka) yang berfungsi sebagai proses untuk berbuat dan konsep untuk berpikir (prosep);
3. *Dunia formal-aksiomatik* (berdasarkan definisi formal dan bukti), yang membalik urutan konstruksi makna dari definisi yang didasarkan pada objek dikenal menuju konsep formal berdasarkan pada set-teoritik definisi.

Perwujudan konseptual tidak hanya mengacu pada klaim yang lebih luas dari Lakoff (1987) bahwa semua pemikiran adalah perwujudan, tapi lebih khusus untuk representasi perseptual sesuatu. Secara konseptual, kita dapat mewujudkan figur geometris, seperti segitiga yang terdiri dari tiga segmen garis lurus; kita *membayangkan* segitiga seperti itu dan menjadikan suatu segitiga khusus yang bertindak sebagai *prototipe* untuk mewakili seluruh kelas segitiga. Kita "melihat" gambaran suatu grafik tertentu yang mewakili suatu fungsi spesifik atau generik.

Proceptual simbolis mengacu pada penggunaan simbol-simbol yang muncul dari skema aksi, seperti menghitung, yang menjadi konsep-konsep, seperti bilangan (Gray & Tall, 1994). Suatu simbol seperti 3 + 2 atau $\sqrt{b^2 - 4ac}$ mewakili proses yang harus dilakukan sekaligus konsep yang dihasilkan oleh proses tersebut.

Aksiomatik formal mengacu pada formal Hilbert yang membawa kita melampaui operasi formal Piaget. Perbedaan utama dari perwujudan dan simbolis matematika dasar matematika adalah bahwa dalam matematika dasar, definisi muncul dari pengalaman dengan benda-benda yang sifatnya dijabarkan dan kemudian digunakan sebagai definisi. Dalam matematika formal, seperti ditulis dalam publikasi matematika, presentasi resmi *mulai* dari set-teori definisi dan menyimpulkan properti lainnya menggunakan bukti formal.

Ketiga dunia tersebut dapat saling berinterkasi dan bekerja secara bersama. Meletakkan dua nama secara bersama, seperti *perwujudan-konseptual aksiomatik-formal* adalah jelas tidak tepat sehingga diperlukan kompresi. Untuk tujuan ini, mengacu pada tiga dunia matematika, David Tall (2008a) hanya menyebut sebagai *perwujudan*, *simbolis* dan *formal*. Istilah ini tetap menggunakan makna untuk istilah yang telah ditetapkan. Dengan kompresi ini, maka memungkinkan untuk menggabungkan mereka dan memberikan nama seperti *perwujudan formalis* ketika berpikir formal didukung oleh perwujudan. Dalam kerangka kombinasi interaksi dunia matematika, maka dapat diperoleh Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Perkembangan Kognitif melalui Tiga Dunia Matematika (David Tall, 2008a)

Matematika sekolah berkembang dari perwujudan konsepsi tindakan fisik: bermain dengan bentuk, menempatkan mereka dalam koleksi, menunjuk dan menghitung, membagi, dan mengukur. Setelah operasi ini dilakukan dan menjadi rutinitas, mereka dapat disimbolkan sebagai bilangan dan digunakan secara dual sebagai operasi atau sebagai entitas mental. Saat fokus perhatian beralih dari perwujudan ke manipulasi simbol, berpikir matematika berubah dari perwujudan ke dunia simbolik (proseptual). Melalui matematika sekolah, perwujudan memberikan arti khusus dalam berbagai konteks, sementara simbolis dalam aritmetika dan aljabar menawarkan dunia mental daya komputasi.

Kemudian transisi ke dunia aksiomatik formal didasarkan pada pengalaman perwujudan dan simbolis ini untuk merumuskan definisi formal dan untuk membuktikan teorema dengan menggunakan bukti matematis. Bukti formal yang tertulis adalah tahap akhir berpikir matematika. Hal ini didasarkan pada pengalaman teorema apa yang layak untuk membuktikan dan bagaimana mungkin pembuktian dilakukan, sering kali berkembang secara implicit dalam perwujudan dan pengalaman simbolik.

Teori-teori formal yang didasarkan pada aksioma sering mengarah pada *struktur teorema*, yang mengungkapkan bahwa sistem aksiomatik (seperti ruang vektor) mempunyai perwujudan yang lebih rumit dan simbolis yang terkait -misalnya ruang vector berdimensi hingga adalah system koordinat dimensi-n. Dengan cara ini, kerangka teoretis menjadi lingkaran penuh, berkembang dari perwujudan dan simbolis ke formal, kembali lagi ke bentuk yang lebih canggih dari perwujudan dan simbolis yang, pada gilirannya, memberikan cara-cara baru pada matematika yang lebih rumit.

Dualitas Simbol: Proses dan Konsep

Ausubel dkk (1968) membedakan antara belajar bermakna dan belajar hapalan. Belajar yang menghasilkan skema pengetahuan yang kaya akan saling keterkaitan antara entitas pengetahuan disebut *belajar bermakna*, dan belajar yang menghasilkan entitas pengetahuan yang terisolasi dari skema pengetahuan yang ada disebut *belajar hapalan*. Hiebert dan Lefevre (dalam Hiebert, 1986;6) membedakan antara pengetahuan procedural dan konseptual. Pengetahuan mengenai fakta dan prosedur oleh disebut *pengetahuan procedural*, sedangkan pengetahuan mengenai fakta dan konsep yang saling terkait satu sama lain disebut *pengetahuan konseptual*. Skemp (1987:166) membedakan antara pemahaman instrumental, pemahaman relasional, dan pemahaman formal/logis. Kemampuan untuk melakukan rumus-rumus atau prosedur-prosedur tanpa mengetahui mengapa rumus itu dapat berfungsi disebut *pemahaman instrumental*. Kemampuan untuk menghasilkan aturan atau prosedur khusus dari saling keterkaitan konsep matematika yang lebih umum disebut *pemahaman relasional*. Kemampuan untuk menghubungkan simbol-simbol dan notasi-notasi matematika (fakta) dengan konsep matematika dan kemampuan mengkombinasikan fakta dan konsep ke dalam jaringan penalaran logis disebut *pemahaman formal* atau *pemahaman logis*.

Aspek prosedural matematika terfokus pada manipulasi rutin objek yang diwakili baik oleh benda konkret, kata-kata lisan, simbol tertulis, atau gambaran mental. Relatif mudah untuk melihat apakah prosedur tersebut dilakukan secara memadai, dan kinerja dalam tugas-tugas serupa sering diambil sebagai ukuran pencapaian dalam keterampilan ini. Pengetahuan konseptual di sisi lain lebih sulit untuk dinilai. Ini adalah pengetahuan yang kaya dalam hubungan (Gray & Tall, 1994:2).

Pembedaan antara belajar procedural dan belajar konseptual ini sebenarnya tidak bersifat eksklusif. Prosedur-prosedur dapat memberikan kesempatan untuk bekerja dalam matematika dan saling keterkaitan konseptual dapat memberikan kesempatan untuk memikirkannya. Melalui belajar aritmetika, aljabar dan kalkulus, symbol dapat berperan penting untuk melakukan suatu prosedur (misalnya penjumlahan) sekaligus sebagai hasil dari prosedur itu (yakni jumlahnya). Jadi, symbol berfungsi sebagai proses sekaligus sebagai konsep. Berikut ini beberapa contoh yang lain.

Simbol	Proses	Konsep
3 + 4	Penjumlahan	Jumlah
-3	Kurangi 3, 3 langkah ke kiri	Negatif 3
3/4	Pembagian	Pecahan
3 + 2x	Evaluasi	Expresi
v = s/t	Rasio	Kecepatan
sin A = sisi depan/sisi miring	Rasio trigonometri	Fungsi trigonometri
y = f(x)	Pemasangan	Fungsi
dy/dx	Diferensiasi	Turunan
$\int$ f(x) dx	Integrasi	Integral

Perkembangan umum dalam matematika dimulai dengan mendapatkan pengalaman dari suatu proses, pertama sebagai prosedur yang spesifik, mungkin kemudian dengan lebih banyak fleksibilitas dalam cara-cara alternatif yang lebih efektif atau dibatasi, dan akhirnya dipahami sebagai satu kesatuan. Simbol yang pertama kali membangkitkan suatu proses menjadi dilihat juga sebagai konsep yang dihasilkan. Penggunaan simbol sebagai poros antara proses dan konsep disebut procep. Ini memberikan kekuatan yang besar yang memungkinkan individu untuk melakukan matematika (sebagai proses) dan untuk berpikir tentang hal itu (sebagai suatu konsep) (Tall, 1996:2-3).

Jalur Transisi Berpikir Menuju Berpikir Formal

Ketika berhadapan dengan ide-ide matematika baru, individu bentindak dalam berbagai cara. Dalam aritmetika, siswa yang berhasil sudah memiliki struktur fleksibel yang saling mendukung penggunaan simbolis baik sebagai proses untuk mendapatkan hasil dan konsep untuk dipikirkan. Siswa yang tidak berhasil lebih menfokuskan pada ketepatan melakukan algoritma dan jarang sukses dengan masalah rutin. Saat perkembangan mereka terus berlanjut dalam matematika, perbedaan mulai berbeda bahkan lebih mencolok. Dalam menghadapi ide-ide baru, beberapa siswa memiliki sedikit struktur kognitif untuk dikembangkan dan cenderung untuk mundur lebih jauh pada belajar hafalan. Beberapa siswa yang memiliki kekayaan pertumbuhan struktur kognitif mengembangkan pendekatan pribadi yang berbeda-beda.

Salah satu metode kategorisasi pendekatan yang berbeda adalah dengan mengatakan "Apakah siswa membangun struktur yang dimiliki untuk memahami matematika baru, atau apakah pelajar mencoba untuk memahami matematika sebagai matematika itu sendiri?" Dengan kata lain. apakah siswa mensintesis pengalaman mereka untuk membangun ide-ide matematika baru atau menganalisis ide-ide matematika baru untuk membangun sistem itu sendiri yang mungkin dapat diintegrasikan dengan pengetahuan sebelumnya. Duffin & Simpson (1993) menyebut yang pertama sebagai siswa "alami" dan yang terakhir sebagai siswa "asing". David Tall (1997) menyebut yang pertama sebagai siswa “alami” dan yang kedua sebagai siswa “formal”. Saat aku berjuang dengan ide-ide ini sendiri, saya lebih suka "alami" dan "formal" nama. Siswa alami mencoba untuk memahami ide baru menggunakan pengetahuan saat ini, sedangkan siswa formal memberikan kesempatan pada pengetahuan baru untuk mengembangkan arti tersendiri tanpa merasa perlu untuk menghubungkannya dengan pengetahuan lainnya (Tall, 1997:11-12).

Apa yang terjadi pada siswa alami dan formal ketika mereka menghadapi definisi dan deduksi pada matematika lanjut? Siswa alami harus menggunakan pengetahuan yang dimilikinya dan berusaha menempatkan definisi sesuai fungsinya. Ini memerlukan sejumlah besar refleksi dan reorganisasi pengetahuan yang memuat banyak kelemahan. Sesungguhnya "pelajar alami" yang belum memahami peran definisi sebagai formalisasi konsep baru dan mendeduksi sifat-sifatnya, benar-benar "mengetahui" banyak sifat dan dibingungkan oleh seluruh masalah. Namun, yang lainnya bisa sukses dan ditandai dengan kemampuan memberikan arti definisi berdasarkan kekayaan pengalaman mereka. Di sisi lain, siswa formal adalah mereka yang berusaha untuk menggunakan definisi verbal sesuai fungsinya dan menggunakannya untuk mengekstrak makna. Sekali lagi, ada yang berhasil dan beberapa gagal (Tall, 1997:11-12).

Dikaitkan dengan transisi berpikir dari dunia perwujudan dan simbolis menuju dunia formal, Maria Pinto (1998) mengemukakan dua rute yang ditempuh mahasiswa dalam matakuliah analisis real, yaitu rute alami dan rute formal. Rute alami dibangun berdasarkan dunia perwujudan, simbolis atau gabungan keduanya dan membentuk jaringan dengan bayangan mental selama proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti tertulis. Rute formal menfokuskan pada teorema-teorema dan langkah logika yang diperlukan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Penelitian Pinto ini dilakukan pada materi analisis real khususnya topik limit barisan.

Berangkat dari hasil penelitian Pinto, pertanyaan yang dapat diajukan untuk diteliti lebih lanjut adalah mengapa mahasiswa memilih jalur alami atau jalur formal. Pemilihan jalur oleh mahasiswa ini dapat ditinjau dari *set-before* dan *met-before* mahasiswa. *Set-before* mahasiswa dapat diperluas dengan mengkaji gaya belajar dikaitkan teori Howard Gadner tentang *Multiple Intelegency*. Pinto tidak memberikan penjelasan mengenai *met-before* mahasiswa terutama jika dikaitkan dengan metode pembelajaran yang dilakukan dosen untuk materi yang diteliti.

Melengkapi penelitian Pinto, penelitian Weber (2004) memberikan penjelasan yang lebih detil. Weber tidak hanya ingin menjelaskan berbagai rute yang ditempuh mahasiswa, tetapi juga melihat *met-before* mahasiswa berkaitan dengan gaya mengajar dosen pada matakuliah analisis real. Selian rute alami dan formal, Weber menambahkan satu rute baru, yaitu rute procedural. Rute prosedural menfokuskan langkah pembuktian sebagai hasil menghapal tanpa pembenaran secara formal. Data penelitian Weber juga menunjukkan bahwa siswa dapat menggunakan berbagai rute bergantung pada konteks materi yang mereka hadapi. Dari 6 mahasiswa yang diteliti, semua menggunakan rute alami untuk pertanyaan tentang topologi. Perkuliahan topologi ini dilakukan dengan gaya semantik. Meskipun demikian, untuk pertanyaan tentang fungsi dan limit, hanya satu siswa yang menjawab secara alami. Respon yang lain, 4 formal dan 1 prosedural (untuk soal fungsi) serta 2 formal dan 3 prosedural (untuk soal limit). Perkuliahan materi fungsi dilakukan dengan gaya logiko-struktural dan materi limit barisan dengan gaya procedural.

Penelitian Weber ini menjawab pengaruh *met-before* terhadap pemilihan rute. Nampak bahwa gaya mengajar dan materi yang berbeda menghasilkan rute yang berbeda. Pertanyaan yang dapat dimunculkan adalah berbedanya rute ini karena gaya mengajarnya, materinya, atau kombinasi keduanya. *Jika materi sama dan gaya mengajar berbeda, bagaimana rute yang ditempuh mahasiswa*? serta *jika materi berbeda dan gaya mengajar sama, bagaimana rute yang ditempuh mahasiswa*? adalah pertanyaan yang perlu dijawab melalui penelitian mendalam.

David Tall, menggunakan istilah perwujudan untuk perwujudan-konseptual, simbolis untuk simbolis-proseptual, dan formal untuk formal-aksiomatik. Penggunaan istilah ini dilakukan untuk menyederhanakan istilah ketika terjadi penggabungan antara dua dunia, misalnya formal dan simbolis, sehingga dapat disebut simbolis formal bukan simbolis-proseptual formal-aksiomatik. Penyederhaan ini memberikan kemungkinan adanya penggabungan dua dunia atau lebih yang pada akhirnya dapat memberikan kemungkinan adanya penggabungan dua rute atau lebih pada transisi berpikir mahasiswa. Observasi awal penulis menunjukkan bahwa ada mahasiswa yang menggunakan bentuk formal dan perwujudan ketika diminta menjawab pertanyaan materi fungsi. Hal ini melahirkan pertanyaan kalau hanya ada tiga rute (alami, formal, dan procedural) mengapa ada mahasiswa yang menggunakan cara formal dan alami sekaligus. Dengan demikian, kemungkinan adanya rute lain perlu diteliti lebih lanjut.

Penutup

Transisi berpikir dari matematika sekolah ke matematika formal di perguruan tinggi masih menyisakan banyak pertanyaan jika dikaitkan dengan rute yang dilalui mahasiswa dari dunia perwujudan dan simbolis menuju dunia formal. Penelitian lebih lanjut masih dapat dilakukan untuk menjawab pengaruh set-before atau met-before untuk pemilihan rute serta mencari kemungkinan adanya rute lain selain rute alami, formal, dan procedural.

Referensi

Duffin, J. M. & Simpson. A. P. 1993. Natural, Conflicting, and Alien. *Journal of Mathematical Behavior*, 12 4: 313–328.

Gray, E. & Tall, D. O. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2):115–141.

Hiebert, James. 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Hong, YY., Kerr, S.. Klymchuk, S.. McHardy, J.. Murphy, P.. Spencer, S.. Thomas, M.. & Watson, P.. 2009. *Modelling the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education: Teacher and Lecturer Perspectives*. Article from Group Research, Auckland University of Technology, New Zealand.

Lakoff, G. 1987. *Women, Fire and Dangerous Things*. Chicago: Chicago University Press.

Pinto, M. M. F. 1998. *Students' Understanding of Real Analysis*. Unpublished PhD Thesis, University of Warwick. UK.

Skemp, Richard R.. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics*. New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. 2007. *Eigenvalues and Eigenvectors:Formal, Symbolic and Embodied Thinking*. Dipresentasikan pada *the 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on*

Research in Undergraduate Mathematics Education, San Diego, California, USA.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. 2008. *Linear Algebra Thinking: Embodied, Symbolic and Formal Aspects of Linear Independence*. Dipresentasikan pada *the 11th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California, USA.

Stewart, S.. 2008. *Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking*. Unpublished PhD. Thesis, Department of Mathematics, The University of Auckland. New Zealand.

Tall, D.O. 1996. Advanced Mathematical Thinking & The Computer. *Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference*, Shell Centre, Nottingham, Halaman: 1-8

Tall, D.O. 1997. *From School to University: the Transition from Elementary to Advanced Mathematics Thinking*. Dipresentasikan pada *the Australasian Bridging Conference in Mathematics* di Auckland University, New Zealand, 13 Juli 1997.

Tall, D. O. 2004. Thinking through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Norway. Vol 4 Hal: 281-288.

Tall, D. O. 2006. *A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Irem de Strasbourg. 11, 195–215.

Tall, D.O. 2008a. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 20 No. 2 Hal: 5-24.

Tall, D.O.. 2008b. *The Historical & Individual Development of Mathematical Thinking: Ideas that are Set-Before and Met-Before*. Plenary Presented at Colóquio de Histório e Tecnologia no Ensino Da Mathemática. UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil, May 5th.

Tall, D. O., & Mejia-Ramos, J. P. 2006. *The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof*. Dipresentasikan pada *the Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* di Universität Duisburg-Essen, Essen, Germany.

Weber, K. 2004. Traditional Instruction in Advanced Mathematics Courses: A Case Study of One Professor's Lectures and Proofs in an Introductory Real Analysis Course. *Journal of Mathematical Behavior* 23 Halaman 115–133.