JALUR MENUJU BERPIKIR FORMAL DALAM MATEMATIKA

Abdussakir
Jurusan Matematika UIN Maliki Malang

Abstrak: David Tall menyatakan bahwa terdapat tiga dunia berpikir matematika, yaitu dunia perwujudan, simbolis, dan formal. Pembelajaran matematika di sekolah menengah lebih menekankan pada dunia perwujudan dan simbolis, sedangkan di perguruan tinggi lebih menekankan pada dunia berpikir formal. Perubahan pola pembelajaran ini mengakibatkan terjadinya transisi berpikir pada mahasiswa matematika di tahun pertama perguruan tinggi. Untuk sampai pada dunia berpikir formal, hasil penelitian Pinto (1998) dan Weber (2003) menunjukkan terdapat tiga jalur yang dapat ditempuh mahasiswa, yaitu jalur alami, formal, dan prosedural. Tulisan ini mencoba menganalisis adanya kemungkinan jalur lain yang dapat ditempuh mahasiswa menuju berpikir formal.

Kata Kunci: *dunia berpikir, perwujudan, simbolis, formal, jalur.*

Pendahuluan

Sebagian besar mahasiswa matematika di tahun pertama mengalami perubahan dalam proses berpikir sebagai akibat transisi dari matematika sekolah ke pembuktian formal dalam matematika murni di universitas. Matematika sekolah dapat dipandang sebagai kombinasi dari representasi visual, termasuk geometri dan grafik, bersama-sama dengan perhitungan dan manipulasi simbolis. Matematika murni di universitas bergeser menuju kerangka formal sistem aksiomatik dan bukti matematik.

Transisi dalam berpikir dapat dirumuskan dalam kerangka *tiga dunia matematika*, yaitu

(1) dunia *perwujudan-konseptual*, berdasarkan persepsi dan refleksi pada sifat-sifat objek, pada awalnya terlihat dan dirasakan dalam dunia nyata tapi kemudian dibayangkan dalam pikiran,

(2) dunia *simbolis-proceptual*, yang tumbuh keluar dari dunia perwujudan melalui tindakan (seperti menghitung) dan disimbolkan sebagai konsep masuk akal (seperti angka) yang berfungsi sebagai proses untuk berbuat dan konsep untuk berpikir (prosep), dan

(3) dunia *formal-aksiomatik*, dari kerangka teoritik definisi konsep dan bukti matematika, yang membalik urutan konstruksi makna dari definisi yang didasarkan pada objek dikenal menuju konsep formal berdasarkan pada set-teoritik definisi (Tall, 2004:285, 2008a:5).

Setiap "dunia" mempunyai urutan pengembangan sendiri dan bentuk-bentuk bukti sendiri yang dapat dipadukan untuk menghasilkan berbagai macam cara berpikir secara matematis (Tall, 2008a:5, Tall dan Mejia-Ramos, 2006:5). Dalam dunia perwujudan, mahasiswa mulai dengan percobaan fisik untuk menemukan kecocokan antar benda, deskripsi verbal menjadi definisi dan digunakan untuk mendukung konstruksi visual terhadap bukti verbal dan membangun teori dari definisi dan bukti. Dalam dunia simbolik, argumen dimulai dari perhitungan numerik yang spesifik dan berkembang menjadi bukti manipulasi simbolik. Dalam dunia formal, bentuk bukti yang diinginkan adalah deduksi formal, seperti teorema nilai tengah dibuktikan dengan aksioma kelengkapan (Tall dan Mejia-Ramos, 2006:5).

Beberapa penelitian mengenai transisi menuju berpikir formal sudah dilakukan. Hasil penelitian Hong dkk (2009) menunjukkan bahwa guru matematika lebih cenderung pada dunia simbolis sedangkan dosen lebih cenderung pada dunia formal. Guru lebih cenderung pada gaya prosedural sedangkan dosen lebih cenderung pada gaya formal.

Penelitian oleh Stewart & Ramos (2007, 2008) pada matakuliah aljabar linear menemukan berbagai cara mahasiswa menjelaskan konsep bebas linear, nilai eigen, dan vektor eigen. Mahasiswa menggunakan representasi perwujudan dan simbolis untuk menjelaskan konsep tersebut. Namun, demikian dalam penelitian ini tidak dijelaskan alasan mengapa mahasiswa menggunakan representasi perwujudan dan simbolis. Lebih lanjut dalam disertasinya, Sepideh Stewart (2008:247) menyarankan agar dilakukan penelitian mendalam mengenai bagaimana proses berpikir mahasiswa sehingga dapat mencapai berpikir formal.

Penelitian Pinto (1998) menemukan dua jalur yang ditempuh mahasiswa dalam matakuliah analisis real, yaitu jalur alami dan jalur formal, untuk menuju berpikir formal. Jalur alami dibangun berdasarkan dunia perwujudan, simbolis atau gabungan keduanya dan membentuk jaringan dengan bayangan mental selama proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti tertulis. Jalur formal menfokuskan pada teorema-teorema dan langkah logika yang diperlukan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Berdasarkan penelitian Pinto, Weber (2004) menambahkan satu jalur, yaitu jalur procedural, ketika melaksanakan penelitian pada matakuliah analisis real. Jalur prosedural menfokuskan langkah pembuktian sebagai hasil menghapal.

Davil Tall (2008b:14-15) Menyatakan

"These transitions occur throughout the curriculum. Those that involve unhelpful met-befores include:

(a) *From counting to the whole number concept*

(b) *From whole numbers to fractions*

(c) *From whole numbers to signed numbers*

(d) *From arithmetic to algebra*

(e) *From powers to fractional and negative powers*

(f) *From finite arithmetic to the limit concept*

(g) *From description to deductive definition*

(h) *At many other transitions, such as teaching the function concept in stages (linear, quadratic, trigonometric, logarithm, exponential, etc) builds limitations at each stage that stunt long-term growth.*

Research in many of these areas still needs to be done, so I invite you to do research into the effects of met-befores in transitions in the mathematical curriculum."

Pernyataan David Tall ini menjelaskan bahwa penelitian tentang dampak *met-before* dalam transisi berpikir juga sangat perlu dilakukan.

Berdasarkan uraian di atas, maka beberapa pertanyaan yang dapat dimunculkan adalah adakah kemungkinan jalur lain selain jalur natural, formal, dan procedural serta bagaimana peran *met-before* pada saat seseorang menempuh suatu jalur tertentu.

Set-Before dan Met-Before

David Tall (2008a) menggunakan istilah *set-before* untuk merujuk kepada struktur mental manusia yang dibawa sejak lahir, yang mungkin memerlukan sedikit waktu untuk matang saat otak manusia membuat koneksi pada awal kehidupan. Sebagai contoh, struktur visual otak memiliki sistem *built-in* untuk mengidentifikasi warna dan corak, untuk melihat perubahan dalam corak, mengidentifikasi sisi, mengkoordinasikan sisi untuk melihat benda-benda dan melacak gerakan mereka. Jadi anak lahir dengan sistem biologis untuk mengenali jumlah benda-benda (satu, dua, atau mungkin tiga) yang memberikan *set-before* untuk konsep "duaan" sebelum anak belajar menghitung.

Lebih lanjut, Tall (2008a) menyatakan ada tiga *set-before* mendasar yang menyebabkan manusia berpikir secara matematis dengan cara tertentu. Ketiganya adalah:

1. *pengenalan* pola, persamaan dan perbedaan;
2. *pengulangan* rangkaian tindakan sampai menjadi otomatis.

3. *bahasa* untuk menggambarkan dan memperbaiki cara kita berpikir tentang sesuatu;

Meskipun pengenalan dan pengulangan untuk berlatih kebiasaan-kebiasaan juga ditemukan pada spesies lain, kekuatan bahasa, dan penggunaan simbol-simbol yang terkait, memungkinkan manusia untuk fokus pada ide-ide penting, untuk menamai mereka dan berbicara tentang mereka untuk memperbaiki makna. Pengenalan pola adalah fasilitas penting untuk matematika, termasuk pola dalam bentuk dan bilangan.

Pengulangan yang menjadi otomatis sangat penting untuk belajar prosedur. Namun, ada tingkat yang lebih tinggi yang tidak hanya melibatkan kemampuan untuk melakukan prosedur, tetapi juga untuk *berpikir tentang* hal ini sebagai suatu entitas. Dalam hal ini, simbol-simbol beroperasi secara dual, yakni sebagai proses dan konsep (*prosep*) yang memungkinkan manusia untuk berpikir fleksibel (Gray & Tall, 1994).

Perkembangan pribadi didasarkan pada pengalaman yang telah ditemui sebelumnya. Pengalaman sebelumnya membentuk koneksi di otak yang mempengaruhi bagaimana memahami situasi baru. David Tall (2008a) mendefinisikan *met-before* sebagai fasilitas mental sekarang berdasarkan pengalaman spesifik individu sebelumnya. Suatu *met-before* ini kadang-kadang konsisten dengan situasi baru dan kadang-kadang tidak konsisten. Kebanyakan kurikulum hanya berfokus pada perluasan pengalaman berdasarkan pada *met-before* positif, dan gagal untuk menjelaskan *met-before* yang menyebabkan banyak peserta didik mengalami kesulitan mendalam.

Tiga Dunia Matematika

Perkembangan individu dibangun atas tiga *set-before* mendasar yaitu *pengakuan, pengulangan* dan *bahasa* untuk mengkonstruksi tiga urutan perkembangan yang saling terkait dan saling terpadu untuk membangun pemikiran matematis secara penuh (Tall, 2004, 2006). Ini bukan untuk mengatakan bahwa ada korespondensi satu-satu antara *set-before* dan urutan perkembangan. *Pengakuan* dan kategorisasi gambar serta bentuk mendukung pemikiran dalam geometri dan grafik, sedangkan *pengulangan* serangkaian tindakan yang disimbolkan sebagai konsep yang dapat dipikirkan mengarah pada aritmetika dan aljabar. Masing-masing proses konstruksi ini berkembang lebih lanjut melalui penggunaan *bahasa* untuk menggambarkan, mendefinisikan dan menyimpulkan hubungan, sampai pada tingkat tertinggi, *bahasa* digunakan sebagai dasar untuk matematika formal.

Davidd Tall (2008a) selanjutnya menggambarkan cara berpikir ini ke dalam *tiga dunia matematika* yang berkembang dalam pengalaman duniawi dengan cara yang cukup berbeda. Tiga dunia matematika ini sebagai berikut.

1. *Dunia perwujudan-konseptual*, berdasarkan persepsi dan refleksi pada sifat-sifat objek, pada awalnya terlihat dan dirasakan dalam dunia nyata tapi kemudian dibayangkan dalam pikiran;
2. *Dunia simbolis-proceptual* yang tumbuh keluar dari dunia perwujudan melalui tindakan (seperti menghitung) dan disimbolkan sebagai konsep masuk akal (seperti angka) yang berfungsi sebagai proses untuk berbuat dan konsep untuk berpikir (prosep);
3. *Dunia formal-aksiomatik* (berdasarkan definisi formal dan bukti), yang membalik urutan konstruksi makna dari definisi yang didasarkan pada objek dikenal menuju konsep formal berdasarkan pada set-teoritik definisi.

Perwujudan konseptual tidak hanya mengacu pada klaim yang lebih luas dari Lakoff (1987) bahwa semua pemikiran adalah perwujudan, tapi lebih khusus untuk representasi perseptual sesuatu. Secara konseptual, kita dapat mewujudkan figur geometris, seperti segitiga yang terdiri dari tiga segmen garis lurus; kita *membayangkan* segitiga seperti itu dan menjadikan suatu segitiga khusus yang bertindak sebagai *prototipe* untuk mewakili seluruh kelas segitiga. Kita "melihat" gambaran suatu grafik tertentu yang mewakili suatu fungsi spesifik atau generik.

Proceptual simbolis mengacu pada penggunaan simbol-simbol yang muncul dari skema aksi, seperti menghitung, yang menjadi konsep-konsep, seperti bilangan (Gray & Tall, 1994). Suatu simbol seperti 3 + 2 atau $\sqrt{b^2 - 4ac}$ mewakili proses yang harus dilakukan sekaligus konsep yang dihasilkan oleh proses tersebut.

Aksiomatik formal mengacu pada formal Hilbert yang membawa kita melampaui operasi formal Piaget. Perbedaan utama dari perwujudan dan simbolis matematika dasar matematika adalah bahwa dalam matematika dasar, definisi muncul dari pengalaman dengan benda-benda yang sifatnya dijabarkan dan kemudian digunakan sebagai definisi. Dalam matematika formal, seperti ditulis dalam publikasi matematika, presentasi resmi *mulai* dari set-teori definisi dan menyimpulkan properti lainnya menggunakan bukti formal.

Ketiga dunia tersebut dapat saling berinterkasi dan bekerja secara bersama. Meletakkan dua nama secara bersama, seperti *perwujudan-konseptual aksiomatik-formal* adalah jelas tidak tepat sehingga diperlukan kompresi. Untuk tujuan ini, mengacu pada tiga dunia matematika, David Tall (2008a) hanya menyebut sebagai *perwujudan*, *simbolis* dan *formal*. Istilah ini tetap menggunakan makna untuk istilah yang telah ditetapkan. Dengan kompresi ini, maka memungkinkan untuk menggabungkan mereka dan memberikan nama seperti *perwujudan formalis* ketika berpikir formal didukung oleh perwujudan.

Matematika sekolah berkembang dari perwujudan konsepsi tindakan fisik: bermain dengan bentuk, menempatkan mereka dalam koleksi, menunjuk dan menghitung, membagi, dan mengukur. Setelah operasi ini dilakukan dan menjadi rutinitas, mereka dapat disimbolkan sebagai bilangan dan digunakan secara dual sebagai operasi atau sebagai entitas mental. Saat fokus perhatian beralih dari perwujudan ke manipulasi simbol, berpikir matematika berubah dari perwujudan ke dunia simbolik (proseptual). Melalui matematika sekolah, perwujudan memberikan arti khusus dalam berbagai konteks, sementara simbolis dalam aritmetika dan aljabar menawarkan dunia mental daya komputasi.

Kemudian transisi ke dunia aksiomatik formal didasarkan pada pengalaman perwujudan dan simbolis ini untuk merumuskan definisi formal dan untuk membuktikan teorema dengan menggunakan bukti matematis. Bukti formal yang tertulis adalah tahap akhir berpikir matematika. Hal ini didasarkan pada pengalaman teorema apa yang layak untuk membuktikan dan bagaimana mungkin pembuktian dilakukan, sering kali berkembang secara implicit dalam perwujudan dan pengalaman simbolik.

Teori-teori formal yang didasarkan pada aksioma sering mengarah pada *struktur teorema*, yang mengungkapkan bahwa sistem aksiomatik (seperti ruang vektor) mempunyai perwujudan yang lebih rumit dan simbolis yang terkait -misalnya ruang vector berdimensi hingga adalah system koordinat dimensi-n. Dengan cara ini, kerangka teoretis menjadi lingkaran penuh, berkembang dari perwujudan dan simbolis ke formal, kembali lagi ke bentuk yang lebih canggih dari perwujudan dan simbolis yang, pada gilirannya, memberikan cara-cara baru pada matematika yang lebih rumit.

Beberapa penelitian mengenai teori David Tall mengenai tiga dunia matematika telah dilakukan. Hasil penelitian Hong dkk (2009) menunjukkan bahwa guru matematika lebih cenderung pada dunia simbolis sedangkan dosen lebih cenderung pada dunia formal. Hal ini jelas akan memberikan pengaruh pada perubahan cara berpikir siswa ketika masuk ke perguruan tinggi. Penelitian Kristina Juter (2006) mengenai perkembangan konsep mahasiswa untuk topik limit fungsi menunjukkan bahwa semua mahasiswa belum mencapai berpikir formal. Penelitian oleh Stewart & Ramos (2007, 2008) pada matakuliah aljabar linear menemukan bahwa mahasiswa hanya sampai pada dunia perwujudan dan simbolis untuk menjelaskan konsep bebas linear, nilai eigen, dan vektor eigen. Lebih lanjut dalam disertasinya, Sepideh Stewart (2008:247) menyarankan agar dilakukan penelitian mendalam mengenai bagaimana mahasiswa dapat mencapai berpikir formal.

Dualitas Simbol: Proses dan Konsep

Ausubel dkk (1968) membedakan antara belajar bermakna dan belajar hapalan. Belajar yang menghasilkan skema pengetahuan yang kaya akan saling keterkaitan antara entitas pengetahuan disebut *belajar bermakna*, dan belajar yang menghasilkan entitas pengetahuan yang terisolasi dari skema pengetahuan yang ada disebut *belajar hapalan*. Hiebert dan Lefevre (dalam Hiebert, 1986;6) membedakan antara pengetahuan procedural dan konseptual. Pengetahuan mengenai fakta dan prosedur oleh disebut *pengetahuan procedural*, sedangkan pengetahuan mengenai fakta dan konsep yang saling terkait satu sama lain disebut *pengetahuan konseptual*. Skemp (1987:166) membedakan antara pemahaman instrumental, pemahaman relasional, dan pemahaman formal/logis. Kemampuan untuk melakukan rumus-rumus atau prosedur-prosedur tanpa mengetahui mengapa rumus itu dapat berfungsi disebut *pemahaman instrumental*. Kemampuan untuk menghasilkan aturan atau prosedur khusus dari saling keterkaitan konsep matematika yang lebih umum disebut *pemahaman relasional*. Kemampuan untuk menghubungkan simbol-simbol dan notasi-notasi matematika (fakta) dengan konsep matematika dan kemampuan mengkombinasikan fakta dan konsep ke dalam jaringan penalaran logis disebut *pemahaman formal* atau *pemahaman logis*.

Aspek prosedural matematika terfokus pada manipulasi rutin objek yang diwakili baik oleh benda konkret, kata-kata lisan, simbol tertulis, atau gambaran mental. Relatif mudah untuk melihat apakah prosedur tersebut dilakukan secara memadai, dan kinerja dalam tugas-tugas serupa sering diambil sebagai ukuran pencapaian dalam keterampilan ini. Pengetahuan konseptual di sisi lain lebih sulit untuk dinilai. Ini adalah pengetahuan yang kaya dalam hubungan (Gray & Tall, 1994:2).

Pembedaan antara belajar procedural dan belajar konseptual ini sebenarnya tidak bersifat eksklusif. Prosedur-prosedur dapat memberikan kesempatan untuk bekerja dalam matematika dan saling keterkaitan konseptual dapat memberikan kesempatan untuk memikirkannya. Melalui belajar aritmetika, aljabar dan kalkulus, symbol dapat berperan penting untuk melakukan suatu prosedur (misalnya penjumlahan) sekaligus sebagai hasil dari prosedur itu (yakni jumlahnya). Jadi, symbol berfungsi sebagai proses sekaligus sebagai konsep. Berikut ini beberapa contoh yang lain.

Simbol	Proses	Konsep
3 + 4	Penjumlahan	Jumlah
-3	Kurangi 3, 3 langkah ke kiri	Negatif 3
¾	Pembagian	Pecahan
3 + 2x	Evaluasi	Expresi
v = s/t	Rasio	Kecepatan
sin A = sisi depan/sisi miring	Rasio trigonometri	Fungsi trigonometri
y = f(x)	Pemasangan	Fungsi
dy/dx	Diferensiasi	Turunan
∫ f(x) dx	Integrasi	Integral

Perkembangan umum dalam matematika dimulai dengan mendapatkan pengalaman dari suatu proses, pertama sebagai prosedur yang spesifik, mungkin kemudian dengan lebih banyak fleksibilitas dalam cara-cara alternatif yang lebih efektif atau dibatasi, dan akhirnya dipahami sebagai satu kesatuan. Simbol yang pertama kali membangkitkan suatu proses menjadi dilihat juga sebagai konsep yang dihasilkan. Penggunaan simbol sebagai poros antara proses dan konsep disebut procep. Ini memberikan kekuatan yang besar yang memungkinkan individu untuk melakukan matematika (sebagai proses) dan untuk berpikir tentang hal itu (sebagai suatu konsep) (Tall, 1996:2-3).

Jalur Menuju Berpikir Formal

Ketika berhadapan dengan ide-ide matematika baru, individu bentindak dalam berbagai cara. Dalam aritmetika, siswa yang berhasil sudah memiliki struktur fleksibel yang saling mendukung penggunaan simbolis baik sebagai proses untuk mendapatkan hasil dan konsep untuk dipikirkan. Siswa yang tidak berhasil lebih menfokuskan pada ketepatan melakukan algoritma dan jarang sukses dengan masalah rutin. Saat perkembangan mereka terus berlanjut dalam matematika, perbedaan mulai berbeda bahkan lebih mencolok. Dalam menghadapi ide-ide baru, beberapa siswa memiliki sedikit struktur kognitif untuk dikembangkan dan cenderung untuk mundur lebih jauh pada belajar hafalan. Beberapa siswa yang memiliki kekayaan pertumbuhan struktur kognitif mengembangkan pendekatan pribadi yang berbeda-beda.

Salah satu metode kategorisasi pendekatan yang berbeda adalah dengan mengatakan "Apakah siswa membangun struktur yang dimiliki untuk memahami matematika baru, atau apakah pelajar mencoba untuk memahami matematika sebagai matematika itu sendiri?" Dengan kata lain, apakah siswa mensintesis pengalaman mereka untuk membangun ide-ide matematika baru atau menganalisis ide-ide matematika baru untuk membangun sistem itu sendiri yang mungkin dapat diintegrasikan dengan pengetahuan sebelumnya. Duffin & Simpson (1993) menyebut yang pertama sebagai siswa "alami" dan yang terakhir sebagai siswa "asing". David Tall (1997) menyebut yang pertama sebagai siswa “alami” dan yang kedua sebagai siswa “formal”. Siswa alami mencoba untuk memahami ide baru menggunakan pengetahuan saat ini, sedangkan siswa formal memberikan kesempatan pada pengetahuan baru untuk mengembangkan arti tersendiri tanpa merasa perlu untuk menghubungkannya dengan pengetahuan lainnya (Tall, 1997:11-12).

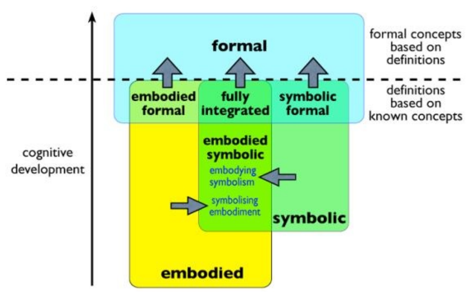
Apa yang terjadi pada siswa alami dan formal ketika mereka menghadapi definisi dan deduksi pada matematika lanjut? Siswa alami harus menggunakan pengetahuan yang dimilikinya dan berusaha menempatkan definisi sesuai fungsinya. Ini memerlukan sejumlah besar refleksi dan reorganisasi pengetahuan yang memuat banyak kelemahan. Sesungguhnya "pelajar alami" yang belum memahami peran definisi sebagai formalisasi konsep baru dan mendeduksi sifat-sifatnya, benar-benar "mengetahui" banyak sifat dan dibingungkan oleh seluruh masalah. Namun, yang lainnya bisa sukses dan ditandai dengan kemampuan memberikan arti definisi berdasarkan kekayaan pengalaman mereka. Di sisi lain, siswa formal adalah mereka yang berusaha untuk menggunakan definisi verbal sesuai fungsinya dan menggunakannya untuk mengekstrak makna. Sekali lagi, ada yang berhasil dan beberapa gagal (Tall, 1997:11-12).

Dikaitkan dengan transisi berpikir dari dunia perwujudan dan simbolis menuju dunia formal, Maria Pinto (1998) mengemukakan dua jalur yang ditempuh mahasiswa dalam matakuliah analisis real, yaitu jalur alami dan jalur formal. Jalur alami dibangun berdasarkan dunia perwujudan, simbolis atau gabungan keduanya dan membentuk jaringan dengan bayangan mental selama proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti tertulis. Jalur formal menfokuskan pada teorema-teorema dan langkah logika yang diperlukan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Penelitian Pinto ini dilakukan pada materi analisis real khususnya topik limit barisan.

Berangkat dari hasil penelitian Pinto, pertanyaan yang dapat diajukan untuk diteliti lebih lanjut adalah mengapa mahasiswa memilih jalur alami atau jalur formal. Pemilihan jalur oleh mahasiswa ini dapat ditinjau dari *met-before* mahasiswa. Pinto tidak memberikan penjelasan mengenai *met-before* mahasiswa terutama jika dikaitkan dengan metode pembelajaran yang dilakukan dosen untuk materi yang diteliti.

Melengkapi penelitian Pinto, penelitian Weber (2003 dan 2004) memberikan penjelasan yang lebih detil. Weber tidak hanya ingin menjelaskan berbagai jalur yang ditempuh mahasiswa, tetapi juga melihat *met-before* mahasiswa berkaitan dengan gaya mengajar dosen pada matakuliah analisis real. Selian jalur alami dan formal, Weber menambahkan satu jalur baru, yaitu jalur procedural. Jalur prosedural menfokuskan langkah pembuktian sebagai hasil menghapal tanpa pembenaran secara formal. Data penelitian Weber juga menunjukkan bahwa mahasiswa dapat menggunakan berbagai jalur bergantung pada konteks materi yang mereka hadapi. Dari 6 mahasiswa yang diteliti, semua menggunakan jalur alami untuk pertanyaan tentang topologi. Perkuliahan topologi ini dilakukan dengan gaya semantik. Meskipun demikian, untuk pertanyaan tentang fungsi dan limit, hanya satu siswa yang menjawab secara alami. Respon yang lain, 4 formal dan 1 prosedural (untuk soal fungsi) serta 2 formal dan 3 prosedural (untuk soal limit). Perkuliahan materi fungsi dilakukan dengan gaya logiko-struktural dan materi limit barisan dengan gaya procedural.

David Tall (2008a) menggunakan istilah perwujudan untuk perwujudan-konseptual, simbolis untuk simbolis-proseptual, dan formal untuk formal-aksiomatik. Penggunaan istilah ini dilakukan untuk menyederhanakan istilah ketika terjadi penggabungan antara dua dunia, misalnya formal dan simbolis, sehingga dapat disebut simbolis formal bukan simbolis-proseptual formal-aksiomatik. Penyederhanaan ini memberikan kemungkinan adanya penggabungan dua dunia atau lebih yang pada akhirnya dapat memberikan kemungkinan adanya penggabungan dua jalur atau lebih pada transisi berpikir mahasiswa.



Gambar 1. Perkembangan Kognitif melalui Tiga Dunia Matematika (David Tall, 2008a)

Berdasarkan Gambar 1, maka penulis dapat merinci bahwa terdapat minimal 4 (empat) jalur menuju pembuktian formal, (1) jalur melalui dunia perwujudan menuju pembuktian formal, (2) jalur melalui dunia simbolik menuju pembuktian formal, (3) jalur dari dunia perwujudan dan simbolik, dan akhirnya menuju pembuktian formal, dan (4) jalur dari dunia formal menuju pembuktian formal. Pinto (1998) menyebut jalur (1), (2), dan (3) dengan jalur natural, dan jalur (4) dengan jalur formal.

Kompresi jalur (1), (2), dan (3) menjadi satu jalur masih perlu penghalusan. Jalur (1) dan jalur (2) tentunya akan melewati aktivitas mental yang sangat berbeda. Jalur (1) membangun bukti formal melalui manipulasi atau tindakan fisik seperti bermain dengan bentuk, menempatkan mereka dalam koleksi, menunjuk dan menghitung, membagi, dan mengukur sedangkan jalur (2) membangun bukti formal melalui manipulasi simbol. Dengan demikian, penulis merasa masih diperlukan penghalusan dalam pengkategorian jalur natural.

Pinto (1998:302-303) menyatakan bahwa

> "*From the analysis of data collected, and also on basis of our own experience learning mathematics, it is more likely that an individual builds mathematical knowledge constantly combining the two identified strategies of learning. It seems to be important to follow the development of students who present such a variation to the routes of learning which are already identified. In addition, there might be other strategies used by the learners when building their mathematical knowledge, which are worth to be known and understood*.

Penelitian Hahkiöniemi (2006:74-75) menemukan bahwa terdapat beberapa jalur yang ditempuh mahasiswa dalam memahami konsep turunan, yaitu jalur perwujudan, jalur simbolik, dan beberapa variasi gabungan dari dua jalur tersebut. Nampak disini, bahwa Hahkiöniemi (2006) tidak menyatakan jalur tersebut sebagai jalur natural menurut Pinto (1998), tetapi merincinya sebagai jalur tersendiri. Observasi awal penulis menunjukkan bahwa ada mahasiswa yang menggunakan bentuk formal dan perwujudan ketika diminta menjawab pertanyaan tentang materi fungsi komposisi. Hal ini semakin menguatkan dugaan bahwa masih ada jalur lain selain jalur alami, formal, dan procedural. Berdasarkan kajian teoritik dan gejala empirik yang ada, maka adanya jalur lain selain jalur natural, formal, dan procedural sangat dimungkinkan dan perlu diteliti lebih lanjut.

Penutup

Transisi berpikir dari matematika sekolah ke matematika formal di perguruan tinggi masih menyisakan banyak pertanyaan jika dikaitkan dengan jalur yang dilalui mahasiswa dari dunia perwujudan dan simbolis menuju dunia formal. Penelitian lebih lanjut masih dapat dilakukan untuk menjawab kemungkinan adanya jalur lain selain jalur alami, formal, dan procedural. Selain itu, dalam menempuh suatu jalur, penelitian tentang proses berpikir mahasiswa masih perlu dilakukan untuk melihat peran *met-before*. Apakah *met-before* berperan positif atau justru berperan negatif.

Referensi

Duffin, J. M. & Simpson. A. P. 1993. Natural, Conflicting, and Alien. *Journal of Mathematical Behavior*, 12 4: 313–328.

Gray, E. & Tall, D. O. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2):115–141.

Hiebert, James. 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Hahkiöniemi, M. 2006. *Tools for Studying the Derivative*. Unpublished PhD, Jyväskylä, Finland.

Hong, YY., Kerr, S.. Klymchuk, S.. McHardy, J.. Murphy, P.. Spencer, S.. Thomas, M.. & Watson, P.. 2009. *Modelling the Transition from Secondary to Tertiary Mathematics Education: Teacher and Lecturer Perspectives*. Article from Group Research, Auckland University of Technology, New Zealand.

Lakoff, G. 1987. *Women, Fire and Dangerous Things*. Chicago: Chicago University Press.

Pinto, M. M. F. 1998. *Students' Understanding of Real Analysis*. Unpublished PhD Thesis, University of Warwick. UK.

Skemp, Richard R.. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics*. New Jersey: Lawrence Earlbaum Associates.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. 2007. *Eigenvalues and Eigenvectors:Formal, Symbolic and Embodied Thinking*. Dipresentasikan pada *the 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California, USA.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. 2008. *Linear Algebra Thinking: Embodied, Symbolic and Formal Aspects of Linear Independence*. Dipresentasikan pada *the 11th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, San Diego, California, USA.

Stewart, S.. 2008. *Understanding Linear Algebra Concepts Through the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking*. Unpublished PhD. Thesis, Department of Mathematics, The University of Auckland. New Zealand.

Tall, D.O. 1996. Advanced Mathematical Thinking & The Computer. *Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference*, Shell Centre, Nottingham, Halaman: 1-8

Tall, D.O. 1997. *From School to University: the Transition from Elementary to Advanced*

Mathematics Thinking. Dipresentasikan pada *the Australasian Bridging Conference in Mathematics* di Auckland University, New Zealand, 13 Juli 1997.

Tall, D. O. 2004. Thinking through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Norway. Vol 4 Hal: 281-288.

Tall, D. O. 2006. *A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Irem de Strasbourg. 11, 195–215.

Tall, D.O. 2008a. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 20 No. 2 Hal: 5-24.

Tall, D.O.. 2008b. *The Historical & Individual Development of Mathematical Thinking: Ideas that are Set-Before and Met-Before*. Plenary Presented at Colóquio de Histório e Tecnologia no Ensino Da Mathemática. UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil, May 5th.

Tall, D. O., & Mejia-Ramos, J. P. 2006. *The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof*. Dipresentasikan pada *the Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* di Universität Duisburg-Essen, Essen, Germany.

Weber, K. 2003. A procedural route toward understanding the concept of proof. *Proceedings of the Twenty-third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, HI. Vol 4 Hal: 395 - 401

Weber, K. 2004. Traditional Instruction in Advanced Mathematics Courses: A Case Study of One Professor's Lectures and Proofs in an Introductory Real Analysis Course. *Journal of Mathematical Behavior* 23 Halaman 115–133.