

# Graf, Radius, Diameter, Matriks dari Graf, Matrix-Tree Formula

Posted by Abdussakir on November 17, 2009

Pada tulisan ini akan disajikan beberapa topik kajian yang dapat diangkat sebagai penelitian atau tugas akhir berkaitan dengan teori graf. Topik-topik kajian ini merupakan topik yang sederhana yang dapat dijangkau oleh mahasiswa sarjana matematika atau pendidikan matematika.

## A. Radius dan Diameter

Permasalahan yang banyak dibahas dalam teori graf berkaitan dengan radius dan diameter adalah menentukan order minimum (*minimum order*) suatu graf unisentral atau bisentral dengan radius  $r$  dan diameter  $d$ . Berdasarkan hubungan

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G)$$

untuk setiap graf  $G$ , maka akan diperoleh beberapa kemungkinan berikut.

1.  $\text{rad}(G) = \text{diam}(G)$ .
2.  $\text{diam}(G) = 2 \text{rad}(G)$ .
3.  $\text{rad}(G) < \text{diam}(G) < 2 \text{rad}(G)$ .

Untuk kemungkinan pertama dan kedua pada graf unisentral, telah dibahas dengan hasil berikut.

- a. Jika  $G$  graf unisentral dengan  $\text{rad}(G) = \text{diam}(G) = r$ , maka order  $G$  adalah  $p = 1$ .
- b. Jika  $G$  graf unisentral dengan  $\text{rad}(G) = r$  dan  $\text{diam}(G) = 2r$ , maka order minimum dari  $G$  adalah  $p = 2r + 1$ , untuk  $r$  bilangan asli.

*Dengan demikian, masih ada kasus yang perlu diselesaikan yaitu menentukan order minimum graf unisentral atau disentral  $G$  dengan  $\text{rad}(G) = r$  dan  $r < \text{diam}(G) < 2r$ , untuk bilangan asli  $r$ .*

## B. Graf dan Matriks

Jika  $G$  graf, maka dapat dibuat matriks adjacency titik  $A(G)$ , matriks incidence  $I(G)$ , dan matriks adjacency sisi  $B(G)$ . Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah nilai eigen berbeda dari  $A(G)$ , dengan  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ , dan misalkan  $b_1, b_2, \dots, b_n$  adalah banyaknya basis yang bersesuaian untuk masing-masing  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  maka matriks berukuran  $2 \times n$  dengan baris pertama berisi nilai eigen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dan baris kedua berisi  $b_1, b_2, \dots, b_n$  disebut SPECTRUM dari  $G$ .

Permasalahan yang dapat diteliti adalah tentukan spectrum dari berbagai jenis graf. Sampai sejauh ini, penelitian yang dilakukan mahasiswa matematika UIN Malang adalah spectrum dari graf komplit  $K_n$ , graf bipartisi komplit  $K(m,n)$ , graf lintasan  $P_n$ , dan graf sikel  $C_n$ . Silahkan dicoba untuk graf roda  $W_n$ , graf garis suatu graf, atau graf dual suatu graf.

### C. Matrix-Tree Formula

Jika  $G$  graf dengan order  $n$  dan himpunan titik  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , maka dapat dibuat matriks adjacency titik  $A(G)$  berorder  $n \times n$  sesuai urutan pelabelan titik. Selain itu, dapat juga dibuat matriks diagonal  $D(G) = [d_{ij}]$  berordo  $n \times n$  dengan unsur diagonal utama  $d_{ii} = \deg(v_i)$ .  $\deg(v_i)$  adalah derajat titik  $v_i$  di  $G$ . Matriks  $B = D(G) - A(G)$  disebut matrix-tree, dan sebarang mengambil nilai kofaktor dari  $B$ , akan sama dengan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree number*) di  $G$ . Cara ini dikenal dengan sebutan Matrix-Tree Formula.

Permasalahan yang dapat diteliti adalah tentukan spanning tree number berbagai jenis graf. Sampai sejauh ini, penelitian yang dilakukan mahasiswa matematika UIN Malang adalah spanning tree number graf komplit  $K_n$ , graf bipartisi komplit  $K(m,n)$ , graf lintasan  $P_n$ , graf sikel  $C_n$ , dan graf roda  $W_n$ . Silahkan dicoba untuk graf yang lain, graf garis suatu graf, graf dual suatu graf, atau pada graf hasil operasi dua graf atau lebih.

Selamat Mencoba.