

**PROSES BERPIKIR MAHASISWA  
DALAM MENYUSUN BUKTI MATEMATIS  
DENGAN STRATEGI SEMANTIK**

**DISERTASI**

**OLEH  
ABDUSSAKIR  
NIM 109671630446**



**UNIVERSITAS NEGERI MALANG  
PASCASARJANA  
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FEBRUARI 2014**

**PROSES BERPIKIR MAHASISWA  
DALAM MENYUSUN BUKTI MATEMATIS  
DENGAN STRATEGI SEMANTIK**

DISERTASI  
Diajukan kepada  
Universitas Negeri Malang  
untuk memenuhi salah satu persyaratan  
dalam menyelesaikan program Doktor

Oleh  
Abdussakir  
NIM 109671630446

**UNIVERSITAS NEGERI MALANG  
PASCASARJANA  
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FEBRUARI 2014**

## **LEMBAR PERSETUJUAN PEMBIMBING DISERTASI**

Disertasi oleh Abdussakir ini telah diperiksa dan disetujui untuk diuji.

Malang, 7 Februari 2014  
Pembimbing I

Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si  
NIP. 19671130 199103 1 001

Malang, 7 Februari 2014  
Pembimbing II

Dr. Subanji, M.Si  
NIP. 19710605 199802 1 001

Malang, 7 Februari 2014  
Pembimbing III

Dr. Sisworo, M.Si  
NIP. 19670408 199302 1 001

## **LEMBAR PERSETUJUAN DAN PENGESAHAN DISERTASI**

Disertasi oleh Abdussakir ini telah dipertahankan di depan Dewan Penguji  
Disertasi

Pada tanggal 28 Februari 2014

Dewan Penguji

Dr. Subanji, M.Si , Ketua

Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si , Anggota

Dr. Sisworo, M.Si , Anggota

Dr. I Nengah Parta, M.Si , Anggota

Prof. Dr. I Nyoman S. Degeng, M.Pd , Anggota

Dr. Imam Sujadi, M.Si , Anggota

Mengetahui,  
Direktur Pascasarjana,

Prof. Dr. I Nyoman S. Degeng, M.Pd  
NIP 195809231985021001

## **PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Abdussakir  
NIM : 109671630446  
Jurusan/Program Studi : Pendidikan Matematika  
Fakultas/Program : Pascasarjana

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa disertasi yang saya tulis ini benar-benar tulisan saya, dan bukan merupakan plagiasi baik sebagian atau seluruhnya.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa disertasi ini hasil plagiasi, baik sebagian atau seluruhnya, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut sesuai dengan ketentuan yang berlaku.

Malang, Februari 2014  
Yang membuat pernyataan

Abdussakir

## ABSTRAK

Abdussakir. 2013. Proses Berpikir Mahasiswa dalam Menyusun Bukti Matematis dengan Strategi Semantik. *Disertasi*, Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Malang. Pembimbing (I) Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si, (II) Dr. Subanji, M.Si, (III) Dr. Sisworo, M.Si

**Kata kunci:** proses berpikir, bukti matematis, menyusun bukti, strategi semantik, tiga dunia berpikir matematis.

Fakta menunjukkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan untuk memahami dan menyusun bukti. Kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti tidak cukup jika dilihat dari bukti yang dihasilkan. Proses yang terjadi dalam kegiatan menyusun bukti justru akan memberi petunjuk yang lebih baik untuk mengetahui kesulitan mahasiswa. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk melihat proses pembuktian di level mahasiswa. Meskipun demikian, penelitian tersebut lebih menekankan pada prosedur pembuktian daripada proses berpikir yang terjadi dalam pembuktian.

Penelitian ini ditujukan untuk mengungkap secara detil proses berpikir mahasiswa ketika menyusun bukti dengan strategi semantik. Proses berpikir mahasiswa dianalisis menggunakan kerangka teori tiga dunia berpikir matematis. Penelitian ini menjelaskan jalur berpikir yang ditempuh mahasiswa dalam menyusun bukti, penyebab mahasiswa keluar dari dunia formal, proses berpikir yang terjadi di luar dunia formal, dan perpindahan kembali menuju dunia formal.

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dan masuk ke dalam jenis penelitian deskriptif-eksploratif. Penelitian dilakukan pada mahasiswa tahun keempat di jurusan matematika melalui kegiatan *think alouds*. Subjek penelitian dipilih dari mahasiswa yang menggunakan strategi semantik saat menyelesaikan lembar tugas. Wawancara berbasis tugas dilakukan pada subjek penelitian untuk mendapatkan data yang lebih banyak dan akurat. Pemilihan subjek terus dilakukan sampai diperoleh kejemuhan data. Data yang dipaparkan berasal dari subjek yang berhasil dalam menyusun bukti dengan mempertimbangkan syarat minimal dua subjek untuk masing-masing kategori yang ditetapkan, yaitu (1) menemukan definisi konsep, (2) melakukan refleksi, dan (3) mencari petunjuk langkah non definisi.

Berdasarkan kajian teori dan analisis data dapat disimpulkan bahwa terdapat tiga jalur berpikir dalam strategi semantik, yaitu (1) bermula dari dunia formal (RSP) lalu pindah ke dunia wujud-simbolik atau dunia simbolik (non RSP) dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau luar dunia formal, (2) bermula dari dunia wujud-simbolik atau simbolik (non RSP) lalu pindah ke dunia formal dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau luar dunia formal, dan (3) semua proses berpikir terjadi di luar dunia formal sehingga tidak pernah menghasilkan bukti yang diminta.

Kegiatan menemukan definisi konsep *terjadi karena* struktur kognitif tidak lengkap. Komponen penting berupa definisi konsep fungsi injektif tidak ada dalam struktur kognitif. Dorongan kuat untuk menemukan definisi konsep ini muncul karena

pemikiran formal bahwa pembuktian harus berdasar pada definisi. Kegiatan menemukan definisi konsep *terjadi* dengan berpikir wujud-simbolik memanfaatkan bayangan konsep fungsi injektif untuk membuat contoh spesifik yang dipandang sebagai contoh generik. Aksi fisik atau mental dilakukan pada contoh spesifik. Aksi kemudian diinteriorisasi menjadi proses dengan menangkap suatu makna dari aksi. Proses selanjutnya dienkapsulasi menjadi objek, yaitu definisi konsep fungsi injektif. Objek selanjutnya disatukan dalam skema dan dijadikan landasan untuk berpikir formal pada proses pembuktian selanjutnya.

Kegiatan melakukan refleksi *terjadi karena* penarikan kesimpulan yang spontan (sekedar menebak) yang tidak didasarkan pada koordinasi secara formal antara komponen struktur kognitif yang sebenarnya sudah lengkap. Dorongan kuat untuk melakukan refleksi muncul karena rasa ragu pada kesimpulan yang dibuat tanpa adanya koordinasi antara komponen yang ada. Ketidakmampuan untuk mengkoordinasikan komponen yang ada dalam struktur kognitif dalam dunia berpikir formal mendorong subjek menggunakan berpikir wujud-simbolik. Kegiatan melakukan refleksi *terjadi* dengan cara berpikir wujud-simbolik mengenai premis dan kesimpulan. Aksi dilakukan untuk menangkap makna antara premis dan kesimpulan. Makna yang diperoleh kemudian dicocokkan dengan komponen yang ada dalam struktur kognitif yang dimiliki untuk menentukan kebenaran kesimpulan. Dalam hal ini, hasil berpikir wujud-simbolik dijadikan penentu kebenaran kesimpulan formal sebelumnya.

Kegiatan mencari petunjuk langkah non definisi *terjadi karena* ketidakmampuan (atau ketidakmauan) menarik kesimpulan secara formal dengan mengkoordinasikan komponen struktur kognitif yang sebenarnya sudah lengkap. Dorongan untuk berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik muncul karena tidak mampu (atau tidak mau) bekerja dalam dunia formal. Ketidakmauan berpikir formal juga dipengaruhi kemudahan bekerja di luar dunia formal dan menghindari beban kognitif yang berat di dalam dunia formal. Kegiatan mencari petunjuk langkah non definisi *terjadi* dengan berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik. Aksi fisik atau mental dilakukan dalam berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik yang selanjutnya diinteriorisai menjadi proses. Proses kemudian dienkapsulasi menjadi objek yang diambil sebagai kesimpulan (subkesimpulan). Kesimpulan (subkesimpulan) selanjutnya disatukan dalam skema sebagai komponen baru dalam struktur kognitif yang dapat digunakan dalam langkah pembuktian selanjutnya.

Penelitian lanjutan dapat dilakukan untuk mengidentifikasi penyebab kegagalan dalam strategi semantik dan menentukan *scaffolding* yang tepat untuk masing-masing penyebab kegagalan. Selain itu, penelitian dapat dilakukan untuk membandingkan beban kognitif antara mahasiswa yang menggunakan strategi semantik dan strategi sintaksis dalam menyusun bukti.

## ABSTRACT

Abdussakir. 2013. Students' Thinking Process in Constructing Mathematical Proof Using Semantics Strategy. *Dissertation*, Department of Mathematics Education, Graduate, State University of Malang. Advisor (I) Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si, (II) Dr. Subanji, M.Si, (III) Dr. Sisworo, M.Si

**Keywords:** thinking process, mathematical proof, proof construction, semantic strategy, three world of mathematical thinking.

In fact students encounter many difficulty understanding and constructing a proof. We argue that the difficulty of students in constructing a proof cannot be determined only by viewing the proof constructed. Furthermore, the process they do in constructing a proof will give a better clue of difficulties they encounter. Several studies have been conducted to investigate the proving processes of students. However, those studies emphasize the proving procedures rather than the thinking process in proving.

This study is aimed to reveal the thinking process in proof construction performed by students with semantic strategy. The thinking process of students will be analyzed using theoretical framework of David Tall about the three worlds of mathematical thinking. This study describe the way the students constructing proofs, the reasons of students to think out of formal world, the thinking processes that occur outside of formal world, and the return processes to the formal world.

This study is one of descriptive-exploratory study and use qualitative approach. The sources of the research are fourth-year students that selected through *think aloud* process when completing the given tasks. The subjects of the research are students who used the semantic strategy and then performed a task-based interview to get more data and accuracy. The subjects are continuously selected until saturation of data obtained. For data presentation, at least two subjects selected for each of the following categories: (1) finding concept definitions, (2) reflecting, and (3) finding non-definition clues.

Based on the theoretical study and data analysis it can be concluded that there are three ways of thinking in semantic strategy, namely (1) started from formal world then move into the symbolic or embodied-symbolic world with possibility of more than once and ends within or outside of the formal world, (2) started from symbolic world or embodied-symbolic world then move to the formal world with possibility of more than once and ends within or outside of the formal world, and (3) all thinking processes performed outside of formal world that does not obtain formal proof.

The activity of finding concept definitions occurs because the cognitive structure is not complete. An important component of concept definition of injective function does not exist in cognitive structure. The strong encouragement of finding the definition of this concept rises because of formal thinking that proving has to be based on definitions. This finding concept definitions processes occurred by thinking in embodied-symbolic world using the concept image of injective function to have specific example that seen as generic example. Physical or mental actions are performed on specific examples. That action then interiorized into process by capturing a sense of the action. The process then encapsulated into object, namely the concept definition of injective function. The object merged into scheme and used as a basis for proving in formal thinking.

Reflections occur because of spontaneous inferences (just guessing) that are not based on formal coordination among components of cognitive structure that is already complete. Strong encouragement to perform reflection arises because of doubt on the conclusion that made without coordination of the components. For not being able to coordinate components in the cognitive structure of the formal thinking, the subjects encouraged to use embodied-symbolic thinking. The reflection occurs by embodied-symbolic thinking about premises and conclusions. The sense that obtained then matched with components in the cognitive structure to determine the truth of the conclusion. In this case the result of embodied-symbolic thinking used as a determinant of the truth of the previous formal conclusion.

Finding non-definition clues occurs because of the inability (or unwillingness) to draw conclusions formally by coordinating cognitive structure components that is already complete. Encouragement to do in embodied-symbolic or symbolic thinking rises because they are unable (or unwilling) to work in the formal world. Unwillingness of formal thinking is also influenced by the ease of working outside the formal world. Finding clues occurs by embodied-symbolic or symbolic thinking. Physical or mental actions performed in embodied-symbolic or symbolic thinking which is will be interiorized into processes later. The process then encapsulated into objects that drawn as a conclusion (sub-conclusion). Conclusion (sub-conclusion) then merged into the scheme as new component in cognitive structure that can be used in the next step of proving.

Further research can be conducted to identify the cause of failure in the semantic strategy and determining the appropriate scaffolding for each of the causes of failure. In addition, the research can be conducted to compare the cognitive load among students that use semantic and syntactic strategy in proof construction.

## DAFTAR ISI

	Halaman
Abstrak .....	i
Abstract .....	iii
Kata Pengantar .....	v
Daftar Isi .....	viii
Daftar Tabel .....	x
Daftar Gambar .....	xi
Daftar Lampiran .....	xiii
 <b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	 <b>1</b>
A. Latar Belakang .....	1
B. Rumusan Masalah .....	9
C. Tujuan .....	10
D. Manfaat .....	10
E. Definisi Operasional .....	11
 <b>BAB II LANDASAN TEORI .....</b>	 <b>13</b>
A. Bukti Matematis .....	13
1. Definisi Bukti .....	13
2. Fungsi Bukti Matematis .....	15
3. Kesulitan Siswa/Mahasiswa Mengenai Bukti dan Pembuktian ...	17
B. Teori David Tall: Tiga Dunia Berpikir Matematis .....	20
1. Tiga Dunia Berpikir Matematis .....	20
2. Teori APOS dan Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis .....	24
3. Bukti dalam Kerangka Tiga Dunia Berpikir Matematis .....	28
4. Jalur Berpikir dalam Menyusun Bukti Matematis.....	30
C. Kerangka Teoritis Penelitian .....	33
1. Strategi Semantik .....	33
2. Strategi Semantik dalam Kerangka Tiga Dunia Berpikir Matematis .....	38
3. Terjadinya Strategi Semantik dalam Kerangka Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis .....	42
4. Proses Berpikir dalam Strategi Semantik .....	44
5. Masalah Pembuktian yang Digunakan .....	49
6. Garis Besar Penelitian .....	51

<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>56</b>
A. Pendekatan dan Jenis Penelitian .....	56
B. Subjek Penelitian .....	58
C. Instrumen Penelitian .....	60
D. Prosedur Pengumpulan Data .....	62
E. Analisis Data .....	64
F. Pengecekan Keabsahan Temuan .....	68
G. Tahap-tahap Penelitian .....	69
<b>BAB IV PAPARAN DATA DAN TEMUAN PENELITIAN .....</b>	<b>71</b>
A. Paparan Data .....	71
1. Strategi Semantik S1 .....	74
2. Strategi Semantik S2 .....	94
3. Strategi Semantik S3 .....	107
4. Strategi Semantik S4 .....	119
B. Temuan Penelitian .....	130
1. Strategi Semantik Kategori Menemukan Definisi Konsep .....	132
2. Strategi Semantik Kategori Melakukan Refleksi .....	135
3. Strategi Semantik Kategori Mencari Petunjuk Langkah.....	142
<b>BAB V PEMBAHASAN .....</b>	<b>150</b>
A. Jalur Berpikir dalam Menyusun Bukti .....	150
B. Terjadinya Strategi Semantik dalam Menyusun Bukti .....	160
C. Strategi Semantik Dikaitkan dengan Kesulitan dalam Menyusun Bukti .....	164
D. Implikasi Pembelajaran .....	169
<b>BAB VI PENUTUP .....</b>	<b>171</b>
A. Simpulan .....	171
B. Saran .....	173
<b>DAFTAR RUJUKAN .....</b>	<b>176</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN .....</b>	<b>186</b>
<b>RIWAYAT HIDUP .....</b>	<b>224</b>

## **DAFTAR TABEL**

Tabel	Halaman
2.1 Perbedaan Antara Soal Moore dengan Masalah Penelitian ini .....	51
3.1 Satuan dan <i>Coding</i> untuk Aspek Pernyataan .....	66
3.2 Komponen Proses Berpikir .....	66
3.3 Satuan dan <i>Coding</i> untuk Aspek Sumber Pernyataan .....	67
4.1 Ringkasan Pembuktian Keempat Subjek .....	72
4.2 Penyebab dan Proses Menemukan Definisi Konsep pada S1 dan S4 .....	134
4.3 Penyebab dan Proses Melakukan Refleksi pada S1, S2, dan S4 .....	140
4.4 Penyebab dan Proses Mencari Petunjuk pada S1, S2, S3, dan S4 .....	147

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Teori APOS dalam Dunia Wujud dan Simbolik (Sumber Tall, 2008a) .....	27
2.2 Jalur Berpikir dalam Menulis Bukti dalam Kerangka Tiga Dunia Berpikir Matematis (Sumber Tall, 2008a) .....	31
2.3 Strategi Semantik dan Sintaksis Diillustrasikan dalam Penggunaan RSP, Selain RSP, dan Produk Buktinya (Sumber Alcock & Inglis, 2008:118) ....	34
2.4 Strategi Sintaksis dan Semantik Ditinjau dari Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis dan Teori RSP .....	40
2.5 Diagram yang Dibuat KA .....	48
2.6 Jalur Strategi Semantik Berdasarkan Alcock dan Inglis (2009) .....	52
2.7 Jalur Strategi Semantik yang Mungkin .....	53
3.1 Skema Pemilihan Subjek Penelitian .....	59
3.2 Proses Pengumpulan Data .....	64
4.1 Skema Berpikir S1 .....	75
4.2 Langkah Persiapan dalam Kerangka RSP dan Non RSP .....	77
4.3 Langkah Inti Pembuktian dalam Kerangka RSP dan Non RSP .....	78
4.4 Diagram Panah Fungsi Injektif yang Dibuat S1 .....	80
4.5 Diagram Panah Fungsi Komposisi yang Dibuat S1 .....	83
4.6 Bukti yang Dihasilkan S1 .....	85
4.7 Proses Berpikir S1 Saat Menentukan Domain dan Kodomain <i>gof</i> .....	87
4.8 Struktur Kognitif S1 Sebelum dan Sesudah Refleksi .....	93
4.9 Skema Berpikir S2 .....	95
4.10 Langkah Pembuktian S2 dalam Kerangka RSP dan Non RSP .....	96
4.11 Diagram Panah Fungsi <i>gof</i> yang Dibuat S2 .....	98

4.12	Bukti yang Dihasilkan S2 .....	101
4.13	Skema Berpikir S2 Saat Menentukan Domain dan Kodomain <i>gof</i> .....	103
4.14	Skema Berpikir S3 .....	108
4.15	Langkah Pembuktian S3 dalam Kerangka RSP dan Non RSP .....	109
4.16	Diagram Panah Fungsi <i>gof</i> yang Dibuat S3 .....	110
4.17	Penyimbolan Nilai Fungsi yang Dibuat S3 .....	113
4.18	Menipulasi Simbolik oleh S3 .....	113
4.19	Bukti yang Dihasilkan S3 .....	114
4.20	Struktur Berpikir S3 Saat Menentukan Domain dan Kodomain <i>gof</i> .....	116
4.21	Skema Berpikir S4 .....	120
4.22	Langkah Pembuktian S4 dalam Kerangka RSP dan Non RSP .....	121
4.23	Diagram Panah Fungsi Injektif oleh S4 .....	127
4.24	Aksi-Proses-Objek S1 Saat Menentukan Domain dan Kodomain <i>gof</i> .....	143
4.25	Aksi-Proses-Objek S2 Saat Menentukan Domain dan Kodomain <i>gof</i> .....	144
4.26	Aksi-Proses-Objek S3 Saat Menentukan Domain dan Kodomain <i>gof</i> .....	145
5.1	Jalur Pembuktian Menurut Pinto (1998) .....	150
5.2	Jalur Berpikir Subjek Penelitian .....	151
5.3	Jalur Berpikir dalam Pembuktian .....	156
5.4	Diagram Panah Fungsi <i>gof</i> yang Dibuat M10 .....	157
5.5	Bukti yang Dihasilkan M10 .....	158

## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
1. Lembar Soal .....	186
2. Lembar Jawaban .....	187
3. Lembar Coretan .....	188
4. Hasil Validasi Ahli Pendidikan Matematika .....	189
5. Hasil Validasi Ahli Matematika .....	190
6. Hasil Validasi Ahli Perancangan Soal .....	192
7. Lembar Jawaban S1 .....	193
8. Lembar Coretan S1 .....	194
9. Lembar Jawaban S2 .....	195
10. Lembar Coretan S2 .....	196
11. Lembar Jawaban S3 .....	197
12. Lembar Coretan S3 .....	198
13. Lembar Jawaban S4 .....	199
14. Lembar Coretan S4 .....	201
15. Lembar Jawaban M10 .....	202
16. Lembar Coretan M10 .....	204
17. Lembar Jawaban M14 .....	205
18. Lembar Coretan M14 .....	206
19. Transkrip Catatan Lapangan dan <i>Think Alouds</i> S1 .....	207
20. Transkrip Wawancara S1 .....	208
21. Transkrip Catatan Lapangan dan <i>Think Alouds</i> S2 .....	209
22. Transkrip Wawancara S2 .....	210
23. Transkrip Catatan Lapangan dan <i>Think Alouds</i> S3 .....	211
24. Transkrip Wawancara S3 .....	212
25. Transkrip Catatan Lapangan dan <i>Think Alouds</i> S4 .....	213
26. Transkrip Wawancara S4 .....	214
27. Transkrip dan Koding Skema Berpikir S1 .....	216

28. Transkrip dan Koding Skema Berpikir S2 .....	218
29. Transkrip dan Koding Skema Berpikir S3 .....	220
30. Transkrip dan Koding Skema Berpikir S4 .....	222

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

#### **A. Latar Belakang**

Matematika yang bersifat deduktif (Hudojo, 1979) sangat berbeda dengan sains yang mendasarkan kebenaran pada asumsi empirik (de Villiers, 2010:218). Kebenaran suatu pernyataan atau teorema dalam matematika diakui setelah dibuktikan benar berdasarkan pada definisi, aksioma, atau teorema yang sudah ada sebelumnya. Tidaklah berlebihan jika kemudian Healy dan Hoyles (1998) menyebut bukti dalam matematika sebagai inti bernalar secara deduktif. Bahkan, Davis & Hersh (1981:147) serta Dreyfus (1990:126) menyatakan bahwa bukti adalah karakteristik utama matematika yang paling membedakan matematika dari ilmu lainnya. Jadi, bukti adalah komponen utama dalam matematika yang membedakannya dengan ilmu yang lain.

Bukti mempunyai peran yang sangat penting dalam matematika dan dalam pendidikan matematika. Bukti diakui sebagai inti berpikir matematis (Hanna, dkk., 2009) dan bernalar deduktif (Cheng & Lin, 2009:124). Bukti dipercaya sebagai pemersatu berbagai konsep matematika (Michael Atiyah dalam Dunham, 1994:15). Bukti merupakan komponen kunci dalam pendidikan matematika (Tsamir, dkk., 2009:58). Grabiner (2009) menyatakan bahwa bukti memberi kesempatan untuk membedakan antara hasil yang benar dan hasil yang nampak masuk akal tetapi secara umum tidak benar. Wu (1996:222) juga menyatakan bahwa bukti adalah senjata dalam matematika dan seseorang yang ingin mengetahui matematika harus belajar

bagaimana menulis bukti atau setidaknya memahami bukti. Seseorang tidak dapat mempelajari matematika tanpa belajar bukti matematis dan bagaimana membuatnya (Balacheff, 2010:115). Bahkan, bukti dianggap sebagai komponen penting untuk bekerja, berkomunikasi, mengetahui, dan memahami matematika (Schoenfeld, 1998:76, Cirillo, 2009:130, dan Kögce, dkk., 2010:2544).

Bukti matematis menjadi salah satu topik yang paling banyak dibicarakan dalam bidang pendidikan matematika. Berbagai penelitian mengenai bukti dilakukan pada tingkat pendidikan yang berbeda dan dari perspektif yang berbeda. Raman (2003) dan Housman & Porter (2003) meneliti perspektif mahasiswa dan dosen. Balacheff (1988), Healy & Hoyles (2000), Knuth (2002a, 2002b), Jones (1997), Cyr (2004), Chin, dkk. (2009), Gondek, dkk. (2009), Furinghetti & Morselli (2009), Kotelandala (2009), dan Kögce, dkk. (2010) meneliti perspektif siswa, guru dan calon guru sekolah menengah. Martin & Harel (1989), Lo & McCrory (2009), dan Turker, dkk. (2010) meneliti perspektif calon guru sekolah dasar.

Penelitian mengenai bukti dan pembuktian lebih difokuskan pada level siswa sekolah menengah sehingga penelitian pada level mahasiswa masih perlu dilakukan (Marrades & Gutiérrez, 2000:121 dan Nichols, 2008:5). Perbedaan kunci antara siswa sekolah menengah dan mahasiswa adalah bahwa siswa di sekolah menengah masih belajar untuk menggunakan penalaran deduktif sedangkan mahasiswa sudah siap untuk melakukan pembuktian formal (Rodríguez & Gutiérrez, 2006:443 dan Tall, 2011:19). Dengan demikian, penelitian mengenai bukti dan pembuktian pada level mahasiswa masih perlu untuk dilakukan.

Ahli matematika dan pendidikan matematika sama-sama sepakat tentang pentingnya bukti dan perlunya mahasiswa untuk mengembangkan kemampuan yang dibutuhkan dalam menyusun bukti (Blanton, dkk., 2003). Hal ini sangat beralasan jika mengacu pada pendapat Balacheff (2010) bahwa mahasiswa tidak dapat mempelajari matematika tanpa belajar bukti matematis dan bagaimana menyusun bukti. Faktanya mahasiswa mengalami kesulitan serius dalam menyusun bukti. Bukti matematis merupakan konsep matematika yang sulit bagi mahasiswa (Pfeiffer, 2011:3) baik untuk mempelajari maupun menyusunnya. Jadi, bukti matematis yang memegang peran penting dalam matematika dan merupakan sarana untuk mempelajari matematika ternyata masih menjadi konsep yang sulit bagi mahasiswa.

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam menyusun bukti. Martin dan Harel (1989) menemukan bahwa 52% dari mahasiswa matematika dalam penelitian mereka menerima argumen yang salah sebagai bukti. Moore (1994:264) menemukan bahwa beberapa mahasiswa telah bergantung pada menghafal bukti karena tidak mampu menyusun bukti. Epp (2003:886) menceritakan pengalaman mengajarnya dan menyatakan bahwa kemampuan mahasiswa dalam menyusun bukti sangat buruk. Kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti dapat menjadi penghalang untuk memahami matematika dan hal ini perlu dicari jalan keluarnya.

Weber (2004a) menyatakan bahwa penelitian mengenai kemampuan mahasiswa dalam menyusun bukti lebih difokuskan pada bukti yang dihasilkan mahasiswa. Bukti dipilah ke dalam bukti yang valid dan tidak valid. Rasio antara bukti yang valid dan tidak valid digunakan sebagai alat ukur mengenai kemampuan

menyusun bukti (Senk, 1985). Bukti yang tidak valid digunakan untuk mengklasifikasikan kesulitan mahasiswa dan untuk mengetahui konsepsi mahasiswa mengenai bukti (Selden & Selden, 1987 dan Gholamazad, dkk., 2003). Menurut penulis, untuk mengetahui kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti tidak cukup dilihat dari bukti yang dihasilkan. Lebih dari itu, proses berpikir yang terjadi dalam menyusun bukti justru dapat memberi petunjuk yang lebih baik untuk mengetahui kesulitan mahasiswa.

Beberapa peneliti telah mulai memfokuskan perhatian pada proses dalam menyusun bukti. Hart (1994) menggambarkan proses yang digunakan mahasiswa ketika menyusun bukti yang dikaitkan dengan pemahaman konseptual mereka. Weber (2001) melukiskan proses yang digunakan mahasiswa dan menunjukkan bahwa strategi pembuktian yang digunakan mahasiswa belum cukup untuk menyusun bukti. Raman (2003) menggambarkan beberapa pendekatan yang dapat digunakan untuk membuktikan teorema dalam kalkulus dan berpendapat bahwa seseorang harus mendasarkan bukti yang mereka tulis pada ide-ide kunci. VanSpronsen (2008) meneliti proses pembuktian yang dilakukan oleh mahasiswa ditinjau dari strategi-strategi dalam pemecahan masalah. Meskipun demikian, penelitian-penelitian ini lebih menekankan pada prosedur pembuktian daripada proses berpikir dalam pembuktian.

Proses berpikir dalam menyusun bukti dapat berbeda dengan prosedur pembuktian yang dilakukan. Dalam penelitian pendahuluan pada tanggal 23 Februari 2012, ditemukan mahasiswa yang melakukan prosedur pembuktian secara formal deduktif tetapi proses berpikirnya tidak formal, yaitu didasarkan pada bantuan

gambar dan pemahaman intuitif. Sebagai contoh, untuk membuktikan pernyataan “jika  $g \circ f$  injektif, maka  $f$  injektif”, mahasiswa ini memulai dengan  $f(x) = f(y)$  sesuai definisi. Selanjutnya mahasiswa ini menyimpulkan bahwa  $g(f(x)) = g(f(y))$  setelah berpikir intuitif dengan bantuan diagram bukan berdasarkan definisi konsep fungsi  $g$ . Nampak bahwa prosedur pembuktian yang dilakukan bersifat formal tetapi proses berpikirnya tidak formal. Dengan demikian, penelitian mengenai proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti sangat penting dilakukan untuk mengetahui apa yang sebenarnya terjadi pada mahasiswa saat menyusun bukti.

Proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti dapat diteliti menggunakan kerangka teori tiga dunia berpikir matematis. David Tall (2008a) menyatakan bahwa berpikir matematis dapat dikelompokkan menjadi tiga dunia berpikir, yaitu wujud-konseptual, simbolik-proseptual, dan formal-aksiomatik. Wujud-konseptual mengacu pada representasi perceptual. Simbolik-proseptual mengacu pada penggunaan simbol-simbol yang berfungsi sebagai proses sekaligus konsep. Formal-aksiomatik mengacu pada formalisme Hilbert, yaitu berdasarkan aksioma untuk membangun sistem, berdasarkan definisi untuk membuat konsep baru, dan berdasarkan bukti formal untuk membangun teori-teori yang koheren. Ketiga dunia berpikir itu kemudian dikompresi menjadi dunia wujud, simbolik, dan formal.

Setiap dunia berpikir mempunyai bentuk-bentuk bukti sendiri yang dapat dipadukan untuk menghasilkan berbagai macam cara berpikir matematis (Tall dan Mejia-Ramos, 2006:5 dan Tall, 2008a:14). Dalam dunia wujud, mahasiswa memulai dengan percobaan fisik untuk menemukan kecocokan sifat antar benda. Sifat itu kemudian dideskripsikan secara verbal menjadi definisi dan digunakan untuk

mendukung bukti dan untuk membangun teori. Dalam dunia simbolik, argumen dimulai dari manipulasi numerik yang spesifik dan berkembang menjadi bukti dengan manipulasi simbolik. Dalam dunia formal, bentuk bukti yang diinginkan adalah formal deduktif (Tall dan Mejia-Ramos, 2006:5). Tall (2008a:10) menyatakan bahwa bukti formal yang tertulis adalah tahap akhir berpikir matematika.

Penelitian berkaitan dengan teori tiga dunia berpikir matematis juga telah dilakukan untuk melihat proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti. Pinto (1998) mengemukakan ada dua jalur yang ditempuh mahasiswa dalam menyusun bukti, yaitu jalur alami dan jalur formal. Jalur alami dibangun berdasarkan pada dunia wujud, simbolik atau gabungan keduanya yang dilanjutkan dengan proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti tertulis. Jalur formal memfokuskan pada sistem aksiomatis untuk menghasilkan bukti yang diinginkan. Berdasar pada penelitian Pinto, Weber (2004a, 2004b) menambahkan satu jalur baru, yaitu jalur prosedural atau hafalan. Jalur prosedural atau hafalan memfokuskan pada langkah-langkah atau prosedur pembuktian dengan cara menghafal tanpa mampu memberikan pbenaran secara deduktif.

Beberapa istilah berbeda mengenai jalur alami dan formal juga ditemukan dalam literatur lain. Weber & Alcock (2004:210) dan Weber (2004a:428-429) menggunakan istilah produksi bukti sintaksis dan produksi bukti semantik. Alcock & Weber (2005:33) menyebut pendekatan referensial dan pendekatan sintaksis. Dalam jalur alami, produksi bukti semantik, atau pendekatan referensial mahasiswa pertama kali menyusun bukti menggunakan bayangan konsep atau representasi objek matematika yang terdapat dalam masalah. Mahasiswa pertama kali menggunakan

bayangan konsep yang dimiliki atau representasi objek untuk menuntun ke arah kesimpulan yang diinginkan dalam pembuktian.

Berdasarkan penelitian pendahuluan terhadap mahasiswa tahun keempat pada tanggal 12 Januari 2012, ditemukan mahasiswa yang menggunakan bayangan konsep atau representasi objek setelah sempat berpikir secara formal. Ketika membuktikan pernyataan bahwa “jika fungsi  $f$  dan  $g$  injektif, maka  $gof$  juga injektif”, seorang mahasiswa memulai dengan mengekstrak makna fungsi  $f$  dan makna  $gof$  injektif. Selanjutnya mahasiswa ini menggunakan diagram untuk menuntunnya pada kesimpulan akhir pembuktian. Hal ini menunjukkan bahwa adakalanya mahasiswa sudah berpikir dalam dunia formal di awal pembuktian, tetapi kemudian kembali ke dunia wujud atau dunia simbolik dan selanjutnya berpindah lagi ke dunia formal. Proses ini tidak dapat dikategorikan sebagai jalur alami atau jalur formal. Dengan demikian, kategori jalur alami dan jalur formal belum memadai untuk menjelaskan proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti (Abdussakir, 2010a).

Pinto (1998:302-303) menyatakan dua hal yaitu (1) kemungkinan adanya kombinasi antara jalur alami dan jalur formal yang penting untuk diikuti prosesnya dan (2) kemungkinan adanya strategi lain (selain jalur alami dan formal) yang perlu diketahui dan dipahami. Saran Pinto (1998) ini semakin memperkuat dugaan penulis mengenai adanya jalur berpikir lain dan pentingnya penelitian untuk mengetahui dan memahami proses berpikir ini. Selain itu, pendapat Tall (2001:203) yang menyatakan bahwa sebagian besar matematisi menggunakan perpaduan kedua jalur tersebut juga dimungkinkan terjadi pada level mahasiswa. Hal ini mempunyai arti bahwa masih ada jalur lain selain jalur alami dan formal yang perlu diketahui (Abdussakir, 2010b).

Alcock & Inglis (2008:114) mendefinisikan sistem representasi bukti (*representation system of proof* (RSP)) sebagai rangkaian pernyataan-pernyataan simbolik yang berlaku umum yang dapat dikombinasikan ke dalam konfigurasi yang diperbolehkan melalui aturan logika proposisi dan kerangka kerja bukti yang diterima. Selanjutnya, Alcock & Inglis (2008:115) mendefinisikan strategi sintaksis dan strategi semantik dalam menyusun bukti matematis. Strategi sintaksis terjadi ketika seluruh proses pembuktian terjadi dalam RSP sedangkan strategi semantik terjadi ketika proses pembuktian melibatkan aspek di luar RSP meskipun hanya sebagian kecil. Definisi Alcock & Inglis (2008) ini memberikan kerangka teori untuk meneliti proses berpikir yang melibatkan gabungan antara jalur alami dan jalur formal.

Alcock & Inglis (2008) sudah mengenalkan istilah strategi sintaksis dan strategi semantik tetapi belum menjelaskan proses berpikir yang terjadi selama strategi itu berlangsung. Demikian juga pada jalur alami dan jalur formal yang dikenalkan Pinto (1998), produksi bukti sintaksis dan produksi bukti semantik yang dikenalkan Weber & Alcock (2004), serta pendekatan sintaksis dan pendekatan referensial yang dikenalkan Alcock & Weber (2005) belum menjelaskan secara spesifik proses berpikir yang terjadi selama pembuktian. Dengan demikian, penelitian mengenai proses berpikir yang terjadi pada pembuktian dengan strategi semantik perlu dilakukan.

Strategi semantik perlu dikaji karena dalam strategi ini dilibatkan dunia berpikir matematis yang berbeda ketika ditinjau dari kerangka teori tiga dunia berpikir matematis. Proses berpikir yang melibatkan perpindahan dari satu dunia

berpikir ke dunia berpikir yang lain sangat penting untuk diketahui. Hal ini sesuai dengan saran Sepideh Stewart (2008:248) berikut.

*“... the theory of the three worlds of mathematical thinking as yet has not been investigated in practice very much. Hence, it would be valuable to follow university students’ thinking processes as they move from one world of mathematical thinking to another for each concept.”*

Mengacu pada saran Pinto (1998) maka proses berpikir dalam strategi semantik perlu diketahui karena melibatkan gabungan antara jalur alami dan jalur formal.

Strategi semantik melibatkan perpindahan antara RSP dan non RSP yang perlu diketahui prosesnya (Alcock & Inglis, 2009). Alcock & Inglis (2008) menyebut penalaran semantik ketika bekerja di luar RSP dan penalaran sintaksis ketika bekerja di RSP. Weber (2009) menggunakan istilah pendekatan semantik dan pendekatan sintaksis sedangkan Iannone & Nardi (2007) menyebut pengetahuan semantik dan pengetahuan sintaksis. Strategi semantik melibatkan kedua jenis penalaran tersebut dalam pembuktian (Weber, 2009) dan ini merupakan hal yang penting untuk diteliti.

## B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diajukan dalam penelitian ini adalah bagaimana proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Secara lebih khusus, masalah yang dicakup dalam penelitian ini adalah:

1. bagaimana jalur berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik dilihat dari kerangka teori tiga dunia berpikir matematis?
2. bagaimana karakteristik proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik?

### C. Tujuan

Tujuan utama penelitian ini adalah menjelaskan secara rinci proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Secara lebih khusus, tujuan yang dicakup dalam penelitian ini adalah:

1. menjelaskan jalur berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik dilihat dari kerangka teori tiga dunia berpikir matematis.
2. menjelaskan karakteristik proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik.

### D. Manfaat

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Kepentingan teoritis: penelitian ini memberikan sumbangan teori mengenai proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Sumbangan teori ini berupa jalur berpikir yang terjadi, faktor yang menyebabkan mahasiswa menggunakan strategi semantik, dan proses berpikir yang terjadi saat bekerja di luar dunia formal dan kembali ke dunia formal.
2. Kepentingan praktis: penelitian ini memberikan informasi kepada guru/dosen mengenai proses berpikir yang dapat dilakukan siswa/mahasiswa dalam menyusun bukti matematis sehingga guru/dosen dapat memilih metode pembuktian yang disesuaikan dengan kemungkinan proses berpikir siswa/mahasiswa. Selain itu, hasil penelitian ini dapat memberikan sumbangan pemikiran mengenai pemilihan metode pembelajaran yang disesuaikan dengan kemungkinan proses berpikir siswa/mahasiswa.

## E. Definisi Operasional

Konsep adalah ide abstrak yang memungkinkan seseorang untuk mengklasifikasi objek atau kejadian dan kemudian menentukan apakah objek atau kejadian itu merupakan contoh dan bukan contoh dari ide abstrak tersebut (Bell, 1978:108-109).

Bayangan konsep (*concept image*) adalah keseluruhan struktur kognitif yang berasosiasi dengan konsep, yang memuat semua gambaran mental beserta sifat-sifat dan proses yang terkait (Tall & Vinner, 1981:152; Tall, 2004:8).

Definisi konsep (*concept definition*) adalah istilah yang digunakan untuk menjelaskan suatu konsep (Tall & Vinner, 1981:152).

Berpikir wujud adalah berpikir dalam dunia wujud yang ditandai hanya dengan penggunaan representasi atau visualisasi suatu konsep matematika baik secara konkret maupun abstrak dengan memanfaatkan bayangan konsep.

Berpikir simbolik adalah berpikir dalam dunia simbolik yang ditandai hanya dengan penggunaan kalkulasi dan manipulasi simbol yang dianggap sebagai proses sekaligus sebagai konsep.

Berpikir wujud-simbolik adalah berpikir dalam gabungan dunia wujud dan simbolik yang ditandai dengan penggunaan objek fisik atau mental dari suatu konsep matematika sekaligus penggunaan simbol yang berfungsi sebagai proses sekaligus sebagai konsep.

Berpikir formal adalah berpikir dalam dunia formal yang mendasarkan pada aksioma, definisi konsep, dan teorema-teorema yang telah dibuktikan sebelumnya (Tall, 2009).

Bukti matematis adalah rangkaian pernyataan-pernyataan benar yang saling dihubungkan secara logis yang berguna untuk meyakinkan dan menjelaskan kebenaran suatu pernyataan matematis.

Sistem representasi bukti (*representation system of proof* (RSP)) adalah suatu sistem yang terdiri pernyataan-pernyataan simbolik yang berlaku umum yang dapat dikombinasikan ke dalam konfigurasi yang diperbolehkan melalui aturan logika proposisi dan kerangka kerja bukti yang diterima.

Menyusun bukti matematis adalah kegiatan untuk menghasilkan bukti matematis yang tertulis.

Strategi sintaksis adalah kegiatan pembuktian yang seluruhnya berlangsung di dalam RSP dan dimungkinkan sempat keluar dari RSP tetapi hanya untuk menjelaskan konsep/ide dan tidak menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan.

Strategi semantik adalah kegiatan pembuktian yang sempat berlangsung di luar RSP dan menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan.

## **BAB II**

### **LANDASAN TEORI**

#### **A. Bukti Matematis**

##### **1. Definisi Bukti**

Bukti sangat fundamental dalam matematika (Varghese, 2009:3). Bukti menempati inti berpikir matematis dan bernalar secara deduktif (Healy & Hoyles, 1998) karena bukti adalah penentu kebenaran klaim matematis (Hanna & Barbeau, 2010:85). Kebenaran suatu proposisi matematis ditentukan setelah dibuktikan benar. Meskipun demikian, menjawab pertanyaan “apa yang dimaksud dengan bukti matematis?” bukanlah pekerjaan yang mudah (CadwalladerOlsker, 2011:34). Bukti matematis merupakan suatu konsep yang sulit didefinisikan (Nichols, 2008:1). Bahkan Reid (2002) mengklaim bahwa istilah bukti matematis tidak terdefinisi dengan baik (*unwell defined*) dan tidak dapat didefinisikan karena maknanya akan berbeda untuk orang yang berbeda. Dengan demikian, maka bukti adalah konsep yang tidak dapat didefinisikan tetapi dapat dideskripsikan berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki.

Beberapa deskripsi mengenai bukti matematis telah diberikan oleh para ahli. Bukti matematis adalah suatu demonstrasi yang menyatakan kebenaran suatu pernyataan berdasarkan asumsi yang diberikan (Alcock & Inglis, 2010:44). Bukti matematis memuat rantai inferensi yang eksplisit mengikuti aturan deduksi yang disepakati dan dicirikan dengan penggunaan notasi, sintak, dan aturan manipulasi formal (Hanna, dkk., 2009). Bukti matematis dapat melibatkan sekumpulan hal yang

diketahui secara eksplisit (seperti aksioma, prinsip, atau hasil yang telah dibuktikan sebelumnya) dan menggunakannya untuk menghasilkan argumen deduktif yang valid dengan mengaplikasikan prinsip-prinsip logika (Hanna, dkk., 2004:82).

Mingus & Grassl (1999:441) mendeskripsikan bukti sebagai serangkaian pernyataan-pernyataan benar yang saling dihubungkan secara logis yang berguna sebagai argumen untuk meyakinkan kebenaran suatu pernyataan matematis. Hanna & Barbeau (2002:38) menyatakan bahwa bukti adalah sejumlah berhingga langkah-langkah logis yang berawal dari yang diketahui menuju suatu kesimpulan dengan menggunakan aturan inferensi. Deskripsi ini mengacu pada satu pemikiran bahwa bukti adalah argumen logis dan deduktif yang berfungsi untuk meyakinkan kebenaran pernyataan matematis.

CadwalladerOlsker (2011:34) membedakan arti bukti matematis dari segi formal dan praktis. Arti formal bukti matematis mengacu pada definisi yang dibuat Gian Carlo Rota (1997:183) yaitu serangkaian langkah logis untuk menuju pada kesimpulan yang diinginkan. Arti praktis bukti matematis mengacu pada pendapat Hersh (1993:389) yaitu argumen untuk meyakinkan kebenaran.

Bukti matematis dapat dilihat dalam dua cara yaitu sebagai suatu proses yang berlangsung selama menyusun bukti dan sebagai hasil akhir. Proses untuk menghasilkan bukti disebut pembuktian atau menyusun bukti. Harel & Sowder (2005:33) menyatakan pembuktian adalah proses yang dilakukan oleh seseorang untuk menolak keraguan mengenai kebenaran suatu hasil pengamatan. Senada dengan ini, Weber (2005:352) menyatakan bahwa menyusun bukti adalah tugas

matematis yang bermula dari yang diketahui menuju kesimpulan yang diinginkan dengan menerapkan aturan inferensi.

Mengacu pada beberapa deskripsi sebelumnya maka bukti matematis dapat dideskripsikan sebagai serangkaian pernyataan-pernyataan benar yang saling dihubungkan secara logis yang berguna untuk meyakinkan sekaligus menjelaskan kebenaran suatu pernyataan matematis. Menyusun bukti matematis adalah kegiatan untuk menghasilkan bukti matematis, yaitu kegiatan yang dilakukan seseorang untuk merangkai pernyataan-pernyataan benar yang dihubungkan secara logis untuk meyakinkan sekaligus menjelaskan kebenaran suatu pernyataan matematis.

## 2. Fungsi Bukti Matematis

Beberapa fungsi bukti matematis sudah banyak dijelaskan dalam literatur. Bell (1976) membedakan tiga fungsi bukti, yaitu verifikasi, iluminasi dan sistematisasi. Pembedaan fungsi bukti ini kemudian diperluas oleh de Villiers (1990:18 dan 1999:3) menjadi (a) verifikasi (berkaitan dengan kebenaran pernyataan), (b) penjelasan (memberikan wawasan mengapa hal ini benar), (c) sistematisasi (organisasi berbagai hasil menjadi sistem deduktif), (d) penemuan (pencarian atau penemuan hasil baru), (e) komunikasi (penyampaian pengetahuan matematika), dan (f) tantangan intelektual (realisasi diri atau kepuasan diri dari membangun bukti)

Hanna (2000:8) memperluas fungsi bukti matematis menjadi (a) *verifikasi* (berkaitan dengan kebenaran pernyataan), (b) *penjelasan* (memberikan wawasan mengapa hal ini benar), (c) *sistematisasi* (organisasi berbagai hasil menjadi sistem deduktif dari aksioma, konsep utama dan teorema), (d) *penemuan* (pencarian atau

penemuan hasil baru), (e) *komunikasi* (penyampaian pengetahuan matematika), (f) *konstruksi* suatu fakta empiris, (g) *eksplorasi* makna suatu definisi atau konsekuensi suatu asumsi, dan (h) *inkorporasi* fakta yang telah dipahami ke dalam suatu kerangka kerja baru dan melihatnya dari perspektif yang baru.

Mengacu pada Bell (1976), de Villiers (1990, 1999), Hersch (1993), Mingus & Grassl (1999), Pinto & Tall (1999), Hanna (2000), Hanna dan Barbeau (2002), Almeida (2003), Weber (2003), Varghese (2009), dan Hemmi (2010), maka fungsi bukti dan pembuktian dapat dibedakan sebagai berikut, yaitu (a) memverifikasi dan menjustifikasi: menvalidasi kebenaran suatu pernyataan, (b) menjelaskan dan menerangkan: menyatakan mengapa suatu pernyataan itu benar, (c) meyakinkan: menghilangkan keraguan, (d) mensistematiskan: menyusun hasil-hasil ke dalam suatu sistem deduktif aksiomatik, (e) mengomunikasikan: menyampaikan pengetahuan dan penalaran matematika pada orang lain, (f) menemukan atau membangun: menemukan hasil baru, (g) mengembangkan intuisi: mengembangkan pengetahuan konseptual dan intuitif melalui saling keterkaitan definisi konsep, (h) menyenangkan: menghadapi suatu tantangan intelektual secara elegan, dan (i) mentransfer: menawarkan teknik untuk menghadapi masalah lain dan cara untuk memahami sesuatu dalam konteks yang berbeda.

Berdasarkan berbagai fungsi bukti matematis tersebut maka kemampuan untuk menyusun bukti sangat diperlukan bagi siswa/mahasiswa. Dengan menyusun bukti diharapkan siswa/mahasiswa mampu menjelaskan secara deduktif mengapa suatu pernyataan itu benar, mengembangkan pemahaman mengenai matematika,

mengembangkan kemampuan berkomunikasi secara matematis mengenai kebenaran suatu pernyataan, dan mengembangkan kemampuan mengekplorasi teori-teori baru.

### **3. Kesulitan Siswa/Mahasiswa Mengenai Bukti dan Pembuktian**

Matematika tidak dapat dipisahkan dari aktivitas pemecahan masalah (*problem solving*). Nunokawa (2010) mendefinisikan aktivitas pemecahan masalah matematis sebagai proses berpikir seseorang yang berusaha membuat makna dari situasi masalah yang dihadapi menggunakan pengetahuan matematika yang dimiliki dan berusaha memperoleh informasi baru sampai dapat memecahkan ketegangan dan keraguan terhadap situasi tersebut, yang pada akhirnya dapat diformulasikan sebagai solusi atau bukti. Definisi ini jelas menyatakan bahwa bukti matematis tidak lain adalah hasil pemecahan masalah matematis dan pembuktian termasuk proses pemecahan masalah. Hal ini sesuai Harel & Sowder (2005:29) yang menyatakan bahwa pembuktian termasuk dalam proses pemecahan masalah.

Matematikawan dan peneliti berpendapat bahwa bukti merupakan bagian penting dari matematika (Schoenfeld, 1998). NCTM (2000) menyatakan bahwa bukti merupakan bagian penting dari pemahaman matematika dan merekomendasikan bahwa setiap siswa mulai K-12 harus dapat mengenal, mengembangkan, dan menggunakan berbagai metode pembuktian. Meskipun rekomendasi ini untuk tingkat K-12, standar ini menekankan pentingnya peran bukti dan harus dilaksanakan dalam pendidikan matematika.

Penelitian Healy & Hoyles (2000) dan Erh-Tsung Chin, dkk. (2009) menunjukkan bahwa standar ini sering tidak terpenuhi pada tingkat sekolah menengah. Siswa sekolah menengah masih menggunakan argumen empiris sebagai

bukti. Tidak terpenuhinya standar ini tidak hanya terjadi di tingkat sekolah menengah. Penelitian Segal (2000), Almeida (2000), dan Recio & Godino (2001) juga menunjukkan bahwa terdapat masalah dengan pembuktian di tingkat perguruan tinggi. Kenyataan ini menarik perhatian para peneliti untuk melalukan penelitian mengenai bukti dan pembuktian di level siswa atau mahasiswa.

Beberapa penelitian mengenai bukti ditujukan untuk menentukan skema bukti yang berbeda dari siswa sekolah menengah dan mahasiswa matematika. Harel & Sowder (1998) mengembangkan tiga klasifikasi skema bukti, yaitu (1) keyakinan eksternal, (2) empiris, dan (3) analisis. Mereka memberikan contoh setiap skema bukti dan berpendapat bahwa skema ini bukan model hierarkis dan bahwa siswa tidak selalu bekerja dalam skema bukti yang tunggal. Knuth & Elliott (1998) mengajukan klasifikasi skema bukti yang dilakukan siswa SMA untuk membantu guru yang mengajar bukti.

Penelitian lain mempelajari persepsi siswa/mahasiswa mengenai bukti serta proses menyusun bukti. Penelitian ini menyimpulkan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam membangun bukti matematis. Segal (2000) tertarik mempelajari persepsi mahasiswa dan menyimpulkan bahwa mahasiswa tidak dapat membedakan antara bukti benar dan tidak benar. Recio & Godino (2001) mempelajari skema bukti mahasiswa dan menemukan bahwa mahasiswa yang memberikan bukti secara benar kurang dari 50%.

Coe & Ruthven (1994) meneliti mahasiswa tahun pertama dan menyimpulkan bahwa pembuktian yang dilakukan mahasiswa cenderung bersifat induktif dan sangat sedikit yang berkaitan dengan deduksi. Almeida (2000) mempelajari persepsi sarjana

mengenai bukti dan praktik pembuktian. Ia menemukan bahwa mahasiswa bergantung pada metode informal dan visual dalam pembuktian. Dia menduga bahwa bayangan konsep yang kuat merupakan kunci untuk meningkatkan produksi bukti. Healy & Hoyles (2000) menemukan bahwa siswa cenderung menggunakan argumen empiris ketika mereka menyusun bukti. Erh-Tsung Chin, dkk. (2009) melakukan penelitian serupa di Taiwan dan menemukan bahwa lebih dari 40% siswa memberikan argumen empiris sebagai bukti.

Beberapa penelitian lainnya dilakukan untuk mengetahui penyebab kesulitan mahasiswa dalam menyusun bukti atau menunjukkan strategi yang dapat membantu mahasiswa dalam proses menyusun bukti. Hart (1994) membandingkan mahasiswa yang pintar dengan mahasiswa yang lemah untuk memahami mengapa mahasiswa lemah mengalami kesulitan dengan bukti. Dia menemukan bahwa mahasiswa berprestasi tinggi memiliki kemampuan untuk menerapkan dan memodifikasi strategi pemecahan masalah sedangkan mahasiswa yang lemah menunjukkan kebingungan terkait dengan skema konseptual atau bayangan konsep yang tidak stabil. Mirip dengan penelitian Hart (1994), Weber (2001) membandingkan strategi bukti ahli matematika (dosen dan mahasiswa doktoral) dengan mahasiswa sarjana. Dia menemukan bahwa mahasiswa sering mengetahui fakta-fakta yang diperlukan untuk menyusun bukti tetapi tidak dapat membuktikan dugaan tersebut sedangkan mahasiswa doktoral mengetahui bagaimana memilih fakta dan teorema yang dapat diterapkan dalam pembuktian.

Smith (2006) berusaha untuk memahami bagaimana pembelajaran dapat mempengaruhi persepsi mahasiswa mengenai bukti dan strategi pembuktian. Dia

membandingkan mahasiswa dalam kelas konvensional dengan mahasiswa dalam kelas berorientasi inkuiiri. Dia menemukan perbedaan yang berarti antara kedua kelas itu dan mahasiswa di kelas berorientasi inkuiiri cenderung memiliki pemahaman yang lebih matang mengenai bukti matematika. Dia menduga bahwa kuliah berorientasi inkuiiri dapat mendorong pendekatan yang lebih bermakna untuk bukti dan pembuktian.

Berbagai literatur penelitian yang melihat pemahaman siswa/mahasiswa mengenai bukti cenderung masuk ke dalam tiga kategori, yaitu (1) mencari kategori skema bukti mahasiswa, (2) menunjukkan ketidakmampuan mahasiswa untuk membangun bukti, dan (3) mencari atau memahami mengapa mahasiswa mengalami kesulitan dengan bukti matematis. Kategori (1) dan (2) sudah banyak dilakukan dalam penelitian pendidikan matematika bahkan dapat dianggap sudah berlebihan (Nichols, 2008). Dengan demikian, penelitian mengenai mengapa mahasiswa mengalami kesulitan dalam menyusun bukti matematis masih perlu dilakukan.

Beberapa temuan yang menarik diperoleh dari penelitian Coe & Ruthven (1994), Hart (1994), dan Almeida (2000). Penelitian Coe & Ruthven (1994) menyimpulkan bahwa pembuktian yang dilakukan mahasiswa cenderung bersifat induktif dan sangat sedikit yang berkaitan dengan deduksi. Penelitian Hart (1994) menyatakan bahwa berprestasi tinggi memiliki kemampuan untuk menerapkan dan memodifikasi strategi pemecahan masalah sedangkan mahasiswa yang lemah menunjukkan kebingungan terkait dengan skema konseptual atau bayangan konsep yang tidak stabil. Penelitian Almeida (2000) menemukan bahwa mahasiswa bergantung pada metode informal dan visual dalam pembuktian dan menghasilkan

dugaan bahwa bayangan konsep yang kuat merupakan kunci untuk meningkatkan produksi bukti. Penulis menganggap temuan ini menarik karena penelitian-penelitian tersebut memberi wawasan mengenai peran bayangan konsep yang merupakan unsur utama dari strategi semantik.

## B. Teori David Tall: Tiga Dunia Berpikir Matematis

### 1. Tiga Dunia Berpikir Matematis

David Tall (2008a) menggunakan istilah *set-before* untuk merujuk kepada struktur mental manusia yang dibawa sejak lahir dan menyatakan ada tiga *set-before* mendasar yang menyebabkan manusia berpikir secara matematis. Ketiga *set-before* ini yaitu (1) *pengenalan* pola, persamaan dan perbedaan, (2) *pengulangan* rangkaian tindakan sampai menjadi otomatis, dan (3) *bahasa* untuk menggambarkan dan memperbaiki cara berpikir tentang sesuatu. Kekuatan bahasa dan penggunaan simbol-simbol memungkinkan manusia untuk memusatkan perhatian pada ide-ide penting, memberi nama, dan memperbaiki makna. Kekuatan bahasa inilah yang menjadi keunggulan manusia dibanding spesies lain yang juga memiliki kemampuan pengenalan dan pengulangan.

Perkembangan individu dibangun atas tiga *set-before* untuk mengonstruksi tiga urutan perkembangan yang saling terkait dan saling terpadu dalam membangun pemikiran matematis secara penuh (Tall, 2004, 2006). *Pengenalan* dan kategorisasi gambar serta bentuk mendukung pemikiran dalam geometri dan grafik, sedangkan *pengulangan* serangkaian tindakan yang disimbolkan sebagai konsep yang dapat dipikirkan mengarah pada aritmetika dan aljabar. Masing-masing proses konstruksi

ini berkembang lebih lanjut melalui penggunaan *bahasa* yang pada akhirnya *bahasa* digunakan sebagai dasar untuk matematika formal.

David Tall (2008a) menggambarkan pemikiran ke dalam tiga dunia berpikir matematis berikut.

- a. *Dunia wujud-konseptual* yang bermula dari interaksi dengan objek dunia nyata dan berkembang berdasarkan pengalaman-pengalaman inderawi melalui deskripsi dan definisi verbal.
- b. *Dunia simbolik-proseptual* yang berkembang dari aksi (seperti menghitung) menuju kalkulasi dan manipulasi berbentuk simbol yang berfungsi secara dual sebagai proses dan konsep (prosep).
- c. *Dunia formal-aksiomatik* yang berdasarkan aksioma untuk membangun sistem, berdasarkan definisi untuk membuat konsep baru, dan berdasarkan bukti formal untuk membangun teori-teori yang koheren (Tall, 2009).

*Wujud-konseptual* tidak mengacu pada klaim Lakoff (1987) bahwa semua pemikiran adalah wujud. Menurut Tall (2008a), wujud konseptual lebih khusus untuk representasi perceptual sesuatu. Perwujudan adalah memberikan bentuk pada suatu ide abstrak. Ini meliputi semua kasus konsepsi istilah visuo-spasial dan tidak hanya yang berasal dari persepsi pada objek aktual (Tall, 2004:9). *Simbolik-proceptual* mengacu pada penggunaan simbol-simbol yang muncul dari aksi-skema. Dari aksi menghitung kemudian menjadi konsep bilangan (Gray & Tall, 1994). Suatu simbol seperti  $3 + 2$  mewakili proses yang harus dilakukan sekaligus konsep yang dihasilkan oleh proses tersebut. *Formal-aksiomatik* mengacu pada formalisme Hilbert.

Perbedaan utama antara dunia wujud dan simbolik dengan dunia formal adalah

bahwa dalam dunia wujud dan simbolik, definisi muncul dari pengalaman dengan benda-benda yang sifatnya dijabarkan dan kemudian digunakan sebagai definisi.

Dalam dunia formal, presentasi resmi dimulai dari definisi konsep dan sifat-sifat lainnya disimpulkan menggunakan bukti matematis yang bersifat formal deduktif.

Ketiga dunia berpikir matematis dapat saling berinteraksi dan bekerja secara bersama. Meletakkan dua nama secara bersama, seperti *wujud-konseptual formal-aksiomatik* adalah jelas tidak tepat sehingga diperlukan kompresi. Untuk tujuan ini, David Tall (2008a) hanya menyebut sebagai *wujud, simbolik, dan formal*. Kompresi ini memungkinkan untuk menggabungkan dan memberikan nama seperti *wujud formal* ketika berpikir formal didukung oleh berpikir wujud.

Sebagai contoh, himpunan bilangan real dapat dipikirkan secara berbeda dalam dunia wujud, simbolik, dan formal. Dalam dunia wujud, himpunan bilangan real dapat dipikirkan dengan menggeser jari pada garis bilangan real. Dalam dunia simbolik, himpunan bilangan real dapat dipikirkan sebagai desimal berulang atau tidak berulang. Dalam dunia formal, himpunan bilangan real dipikirkan sebagai lapangan terurut (*ordered field*) yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Matematika sekolah berkembang dari dunia wujud berupa tindakan fisik seperti bermain dengan bentuk, membuat koleksi, menghitung, membagi, dan mengukur. Setelah kegiatan ini dilakukan dan menjadi rutinitas, maka dapat disimbolkan sebagai bilangan dan digunakan secara dual sebagai operasi atau sebagai entitas mental. Berpikir matematis berubah dari dunia wujud ke dunia simbolik saat fokus perhatian beralih dari bentuk ke manipulasi simbol (Tall, 2008a). Transisi ke dunia formal didasarkan pada pengalaman dunia wujud dan simbolik untuk

merumuskan definisi formal dan untuk membuktikan teorema menggunakan bukti matematis. Bukti matematis yang bersifat formal deduktif dan tertulis adalah tahap akhir berpikir matematis (Tall, 2008a).

Beberapa penelitian terkait teori David Tall mengenai tiga dunia berpikir matematis telah dilakukan. Hasil penelitian Hong, dkk. (2009) menunjukkan bahwa guru matematika lebih cenderung pada dunia simbolik sedangkan dosen lebih cenderung pada dunia formal. Penelitian Kristina Juter (2006) mengenai perkembangan konsepsi mahasiswa untuk topik limit fungsi menunjukkan bahwa semua mahasiswa belum mencapai berpikir formal. Penelitian Stewart & Ramos (2007, 2008) pada matakuliah aljabar linear menemukan bahwa mahasiswa hanya sampai pada dunia wujud dan simbolik untuk konsep bebas linear, nilai eigen, dan vektor eigen. Stewart (2008) menyarankan pentingnya penelitian mengenai bagaimana mahasiswa dapat mencapai berpikir formal khususnya pada proses berpikir yang melibatkan perpindahan antar dunia berpikir.

## **2. Teori APOS dan Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis**

Teori APOS dibangun berdasarkan teori Piaget mengenai tiga macam abstraksi, yaitu (a) abstraksi empiris, yang memusatkan pada sifat-sifat objek, (b) abstraksi empiris semu, yang memusatkan pada aksi atas objek dan sifat-sifat dari aksi, dan (c) abstraksi reflektif, yang memusatkan pada ide bagaimana aksi dan operasi dapat menjadi objek baru melalui proses asimilasi (Stewart, 2008:21). Sebagaimana dinyatakan Dubinsky dan McDonald (2001), teori APOS dikembangkan sebagai usaha untuk memahami mekanisme abstraksi reflektif yang dikenalkan oleh Piaget untuk menjelaskan perkembangan berpikir logis anak dan

untuk menjelaskan proses berpikir pada materi matematika lanjut. Dengan demikian, teori APOS diakui sebagai salah satu teori konstruktivis mengenai cara belajar konsep matematika (Dubinsky, 2000).

Teori ini dimulai dengan hipotesis bahwa pengetahuan matematika berada pada kecenderungan anak untuk merespon masalah matematis. Anak melakukan konstruksi mental berupa *aksi*, *proses*, dan *objek* yang selanjutnya diorganisasikan ke dalam *skema* untuk memberi makna pada masalah dan menyelesaiakannya. Teori ini kemudian disebut teori APOS (Dubinsky & McDonald, 2001) sebagai akronim dari *action* (aksi), *process* (proses), *object* (objek), dan *schems* (skema).

Menurut teori APOS, memahami konsep matematika dimulai dengan melakukan aksi pada objek mental atau fisik dan mentransformasikannya menjadi objek baru atau objek yang sama dengan atribut yang baru (Dubinsky, 2000). Aksi adalah transformasi objek (Dubinsky & McDonald, 2001) dengan melakukan manipulasi mental atau fisik (Breidenbach, dkk., 1994:249). Untuk melakukan transformasi ini diperlukan serangkaian langkah khusus yang disadari oleh anak. Langkah-langkah ini dirasakan anak sebagai sesuatu yang bersifat eksternal dan dapat berasal dari orang lain, dituliskan, atau diingat dari memori.

Ketika suatu aksi dilakukan berulang-ulang dan melakukan refleksi pada aksi, anak dapat membuat konstruksi mental yang bersifat internal yang disebut proses (Dubinsky & McDonald, 2001). Konstruksi mental ini dapat dipandang sebagai penggerjaan aksi yang sama tetapi tidak lagi memerlukan stimulus eksternal. Jadi, proses adalah interiorisasi aksi menjadi konstruksi mental yang tidak lagi memerlukan stimulus eksternal untuk melakukan aksi yang sama.

Ketika suatu proses dapat ditransformasikan dengan beberapa aksi maka sudah terjadi enkapsulasi proses menjadi objek (Breidenbach, dkk., 1994:250). Objek dikonstruksi dari proses ketika anak menyadari proses sebagai suatu totalitas dan transformasi dapat dilakukan padanya (Dubinsky & McDonald, 2001). Objek dapat dikembalikan lagi menjadi proses semula dengan melakukan de-enkapsulasi (Dubinsky, 2000). Aktivitas matematis seringkali menuntut kegiatan bolak-balik antara proses dan objek. Sebagai contoh pada konsep fungsi komposisi, anak dapat memikirkannya sebagai dua fungsi yang dikombinasikan dengan cara tertentu untuk memperoleh fungsi baru. Ketiga fungsi ini dapat dinyatakan sebagai objek.

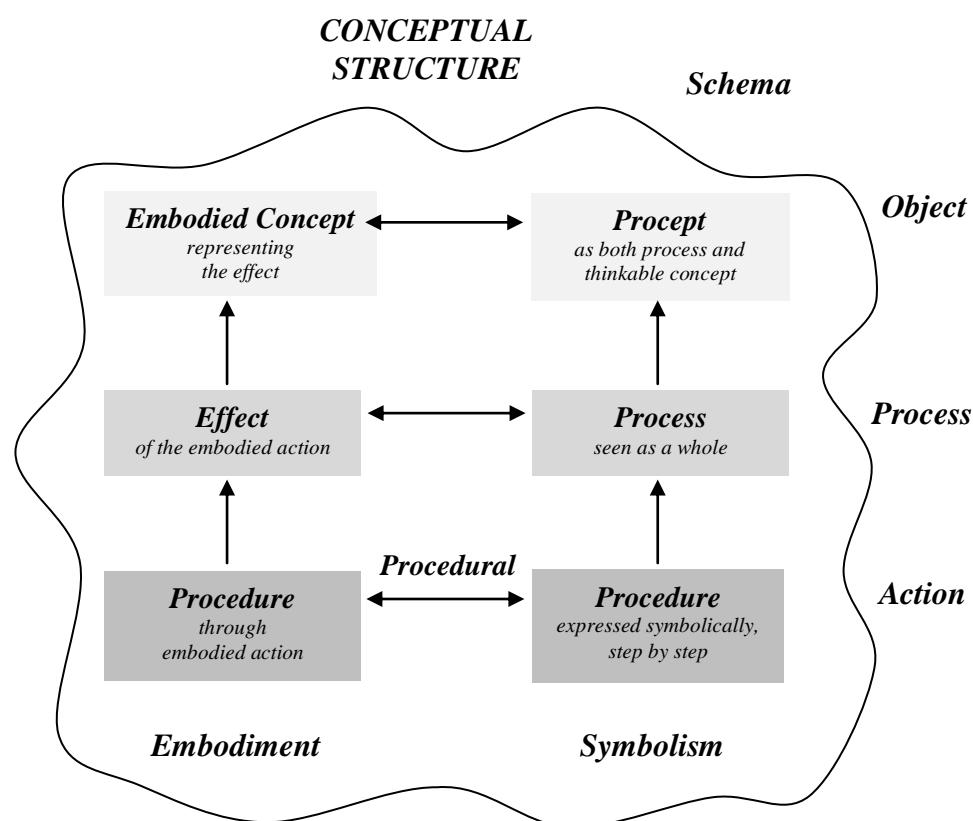
Terakhir, semua interpretasi suatu konsep matematis bersama semua sifat dan saling keterkaitannya yang dipahami oleh individu mengenai konsep diorganisasikan dalam skema individu untuk konsep itu. Skema adalah koleksi aksi, proses, objek, dan skema lainnya bersamaan dengan semua sifat dan saling keterkaitannya dengan suatu konsep (Dubinsky, 2000) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan konsep tersebut (Dubinsky & McDonald, 2001). Lebih lanjut, Dubinsky & McDonald (2001) menyatakan bahwa ide skema ini sangat mirip dengan istilah bayangan konsep yang dikenalkan oleh Tall dan Vinner (1981).

David Tall (2008a) menyatakan bahwa teori APOS dapat digunakan untuk menunjukkan bagaimana gabungan dunia wujud dan simbolik digunakan untuk mengembangkan kemampuan berpikir matematis. Tall (2008a:7) menyatakan bahwa pengembangan teori APOS lebih memusatkan pada pendekatan simbolik. Menurut Tall (2008a) meskipun anak dapat melakukan aksi dan dapat menyadari aksi ini sebagai proses, enkapsulasi proses menjadi objek ternyata seringkali gagal. Penyebab

kegagalan ini tidak lain ketika berpikir lebih difokuskan pada berpikir simbolik dan tidak menghubungkannya dengan berpikir wujud.

Kompresi di dunia simbolik dari aksi ke proses menuju objek terjadi secara serupa di dunia wujud (Tall, 2008a). Jika dikaitkan dengan teori APOS, dalam dunia wujud terdapat kesejajaran mengenai kompresi yaitu mulai dengan langkah-langkah aksi lalu menuju efek dari aksi dan selanjutnya membayangkan efek aksi ini sebagai konsep yang bersifat wujud. Gabungan antara dunia wujud dan simbolik dapat memberikan makna wujud pada enkapsulasi objek yang diinginkan. Pencarian objek yang belum dienkapsulasi secara simbolik juga dapat dimulai dari dunia wujud.

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Teori APOS dalam Dunia Wujud dan Simbolik (Sumber Tall, 2008a)

Berdasarkan Gambar 2.1 dan penjelasan sebelumnya mengenai kegiatan aksi, proses, dan objek dalam dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya diperoleh dasar teoritik bahwa untuk memperoleh objek wujud atau objek simbolik (proses) dilakukan dengan melakukan aksi, yang diinteriorisasi menjadi proses, kemudian dienkapsulasi menjadi objek, dan selanjutnya menyatu dalam skema. Dengan demikian, proses berpikir yang terjadi dalam dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya dapat ditinjau dari teori APOS.

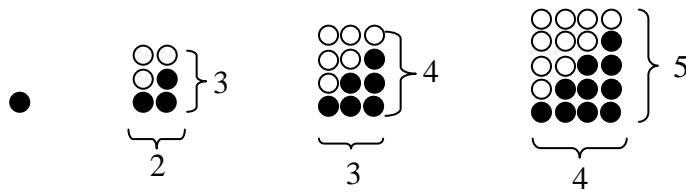
### **3. Bukti dalam Kerangka Tiga Dunia Berpikir Matematis**

Setiap dunia berpikir mempunyai urutan pengembangan sendiri dan bentuk-bentuk bukti sendiri yang dapat dipadukan untuk menghasilkan berbagai macam cara berpikir matematis (Tall, 2008a:5 dan Tall & Mejia-Ramos, 2006:5). Dalam dunia wujud, mahasiswa memulai dengan percobaan fisik untuk menemukan kecocokan sifat antar benda. Sifat kemudian dideskripsikan secara verbal menjadi definisi dan digunakan untuk mendukung konstruksi bukti dan untuk membangun teori. Dalam dunia simbolik, argumen dimulai dari manipulasi numerik yang spesifik dan berkembang menjadi bukti dengan manipulasi simbolik. Dalam dunia formal, bentuk bukti yang diterima harus bersifat formal deduktif (Tall & Mejia-Ramos, 2006:5).

Bukti untuk pernyataan bahwa

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$$

dalam masing-masing dunia dilakukan dengan cara yang berbeda (Tall, 2007:6-7). Pembuktian dalam dunia wujud dapat dilakukan dengan melakukan percobaan fisik misalnya dengan objek berikut ini.



Melalui pengamatan diperoleh bahwa banyaknya objek hitam pada gambar paling kanan dapat dipandang sebagai  $1 + 2 + 3 + 4$  dan totalnya adalah setengah dari total susunan yaitu  $4 \times 5$ . Berdasarkan percobaan fisik ini, kemudian secara intuitif disimpulkan bahwa  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pada pembuktian ini, gambar spesifik dapat dipandang sebagai gambar generik.

Pembuktian dalam dunia simbolik dilakukan dengan melihat pola berikut.

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + 100 \\ & \underline{100 + 99 + 98 + \dots + 1} + \\ & 101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 100 \times 101. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh kesimpulan  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2}$ . Melihat pola ini kemudian disimpulkan secara umum bahwa  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Pada dunia formal, pernyataan  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  dibuktikan dengan induksi matematika yang berdasar pada aksioma Peano. Pembuktian dilakukan sebagai berikut.

Misalkan  $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \}$

- a.  $1 \in A$ , karena  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .
- b. Asumsikan bahwa  $k \in A$ , artinya  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ .

$$\text{Maka } 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dengan demikian, jika  $k \in A$  berakibat  $(k + 1) \in A$ .

Sesuai prinsip induksi matematika, disimpulkan bahwa  $A = \mathbb{N}$ , yang berarti bahwa

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Tiga contoh ini menawarkan tiga cara untuk meyakinkan kebenaran suatu pernyataan, yaitu (a) pola dalam gambar (wujud), (b) pola dalam kalkulasi aritmetika (simbolik), dan (c) bukti induksi (formal) (Tall, 2002). Jaminan untuk kebenaran suatu pernyataan sangat bergantung pada komunitas. Argumen (a) dan (b) sangat meyakinkan untuk sebagian besar mahasiswa tetapi argumen (c) tidak. Argumen (c) adalah bukti bagi matematisi sedangkan (a) dan (b) bukan bukti (Tall, 2002).

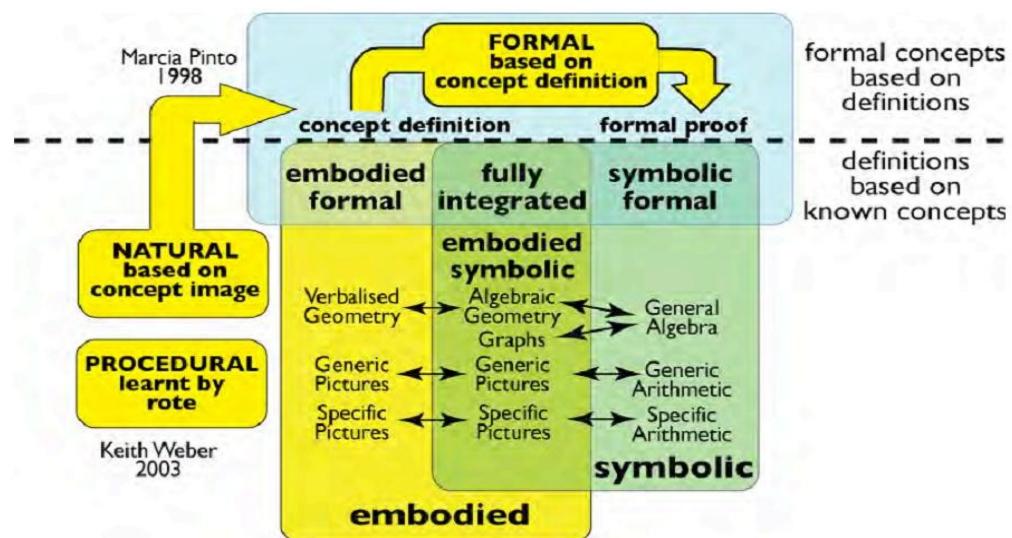
Mengacu pada Tall (2009), bukti matematis harus berada dalam dunia formal sehingga argumen (a) dan (b) tidak termasuk bukti dalam matematika.

#### **4. Jalur Berpikir dalam Menyusun Bukti Matematis**

David Tall (2009) menempatkan bukti matematis dalam dunia formal, dan menyatakan bahwa bukti matematis yang bersifat formal deduktif dan tertulis adalah tahap akhir berpikir matematis (Tall, 2008a). Dengan demikian, menyusun bukti matematis dapat dipandang sebagai proses yang seluruhnya berada dalam dunia formal atau proses yang dapat melibatkan dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya untuk menghasilkan bukti matematis dalam dunia formal.

Pinto (1998) mengemukakan dua jalur yang ditempuh mahasiswa dalam menyusun bukti, yaitu jalur alami dan jalur formal. Jalur alami dibangun berdasarkan dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya dengan proses menerjemahkan

bayangan mental menjadi bukti tertulis. Jalur formal memfokuskan pada teorema-teorema dan langkah logika yang diperlukan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Jalur alami ditandai dengan penggunaan bayangan konsep sedangkan jalur formal ditandai dengan penggunaan definisi konsep. Pada jalur alami, mahasiswa memberi makna sedangkan pada jalur formal, mahasiswa mengekstrak makna. Memberi makna dimaksudkan sebagai kegiatan yang dimulai dari bayangan konsep untuk membangun pengetahuan baru melalui eksplorasi dan refleksi. Mengekstrak makna dimaksudkan sebagai kegiatan kerja dalam konten materi dan menggunakan sebagi suatu konstruk formal (Pinto, 1998:298-299). Weber (2001) menambahkan satu jalur baru, yaitu jalur prosedural atau hafalan. Jalur prosedural memfokuskan langkah pembuktian sebagai hasil menghafal tanpa pemberian secara formal. Jalur alami, formal, dan prosedural dalam kerangka tiga dunia berpikir matematis dapat dilihat pada Gambar 2.2 berikut.



**Gambar 2.2 Jalur Berpikir dalam Menulis Bukti dalam Kerangka Tiga Dunia Berpikir Matematis (Sumber David Tall, 2008a)**

Beberapa istilah berbeda mengenai jalur alami dan formal juga ditemukan dalam beberapa literatur, yaitu produksi bukti semantik dan produksi bukti sintaksis (Weber & Alcock, 2004:210; Weber, 2004a), pendekatan referensial dan pendekatan sintaksis (Alcock & Weber, 2005:33), serta bukti relasional dan bukti instrumental (Weber, 2002). Weber (2004a) menyatakan dalam produksi bukti semantik, seseorang pertama kali berusaha memahami kebenaran pernyataan menggunakan representasi objek matematika yang relevan dan kemudian menggunakan argumen intuitif ini sebagai dasar untuk mengonstruksi bukti. Nampak bahwa dalam produksi bukti semantik, seseorang memulai dari dunia wujud atau simbolik menuju dunia formal.

Observasi awal penulis menunjukkan bahwa ada mahasiswa yang memulai pembuktian dengan mengekstrak makna dan kemudian berpindah ke gambar serta membuat kesimpulan akhir menggunakan bayangan konsep. Ketika diminta membuktikan pernyataan “jika fungsi  $f$  dan  $g$  injektif, maka  $gof$  juga injektif”, mahasiswa ini memulai dengan mengekstrak makna fungsi  $f$  dan  $g$  injektif. Selanjutnya mahasiswa menggunakan diagram dan memberi makna pada gambar untuk menuntunnya pada kesimpulan akhir pembuktian. Fakta ini tidak termasuk jalur alami (produksi bukti semantik) karena pertama kali bekerja di dunia formal dan bukan jalur formal (produksi bukti sintaksis) karena kesimpulan diambil secara intuitif berdasarkan bayangan konsep. Dengan demikian, kategori jalur pembuktian ke dalam jalur alami dan formal belum mewakili keseluruhan jalur yang dapat ditempuh mahasiswa dalam menyusun bukti.

## C. Kerangka Teoritis Penelitian

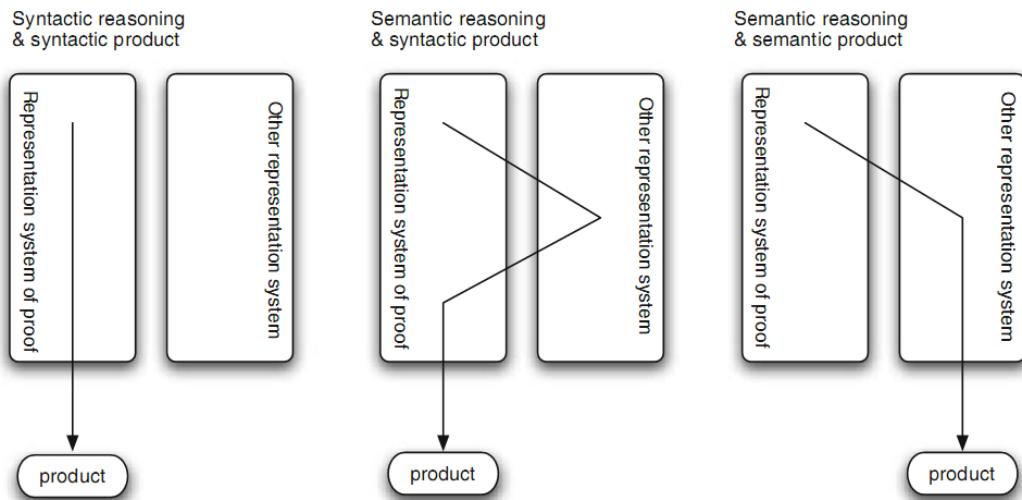
### 1. Strategi Semantik

Alcock & Inglis (2008:114) mendefinisikan sistem representasi bukti (*representation system of proof* (RSP)) sebagai rangkaian pernyataan-pernyataan simbolik yang berlaku umum yang dapat dikombinasikan ke dalam konfigurasi yang diperbolehkan melalui aturan logika proposisi dan kerangka kerja bukti yang diterima. Dalam sistem representasi inilah pernyataan-pernyataan yang akan dibuktikan (*to-be-proved statements*) dalam matematika diformulasikan. Selanjutnya, Alcock & Inglis (2008:115) mendefinisikan dua strategi dalam produksi bukti, yaitu strategi sintaktis dan strategi semantik. Dalam strategi sintaktis, penyusun bukti secara keseluruhan bekerja dalam RSP. Dalam strategi semantik, penyusun bukti sempat bekerja di luar RSP meskipun hanya sebagian kecil.

Berdasarkan definisi strategi semantik dan strategi sintaksis dari Alcock dan Inglis (2008), jalur alami termasuk ke dalam strategi semantik tetapi strategi semantik belum tentu jalur alami. Penyusun bukti yang sempat bekerja di dunia formal lalu kembali ke dunia wujud atau dunia simbol dan akhirnya kembali ke dunia formal masuk kategori membuktikan dengan strategi semantik tetapi bukan jalur alami. Dengan demikian, kerangka teori mengenai strategi semantik dan strategi sintaksis ini memiliki cakupan yang lebih luas dan lebih memadai untuk membuat kategori jalur berpikir mahasiswa ketika menyusun bukti.

Alcock & Inglis (2008) selanjutnya menggambarkan kemungkinan proses yang digunakan dalam menyusun bukti dan bukti yang dihasilkan. Kemungkinan pertama, seluruh proses dalam menyusun bukti terjadi di dalam RSP dan

kemungkinan ini masuk kategori strategi sintaksis. Kemungkinan kedua, pembuktian bermula dari RSP kemudian keluar dari RSP dan akhirnya kembali ke RSP lagi sampai menghasilkan bukti. Kedua kemungkinan ini pada akhirnya menghasilkan bukti walaupun prosesnya berbeda. Kemungkinan ketiga, pembuktian berasal dari RSP kemudian keluar dari RSP sampai menghasilkan bukti. Kemungkinan kedua dan ketiga ini masuk kategori strategi semantik. Kemungkinan proses dan bukti yang dihasilkan seperti terlihat pada Gambar 2.3 berikut.



**Gambar 2.3 Strategi Semantik dan Sintaksis Diilustrasikan dalam Penggunaan RSP, Selain RSP, dan Produk Buktinya (Sumber Alcock & Inglis, 2008:118).**

Berdasarkan Gambar 2.3, terlihat bahwa semua proses pembuktian selalu dimulai dari dalam RSP. Alasan untuk hal ini dinyatakan oleh Alcock dan Inglis (2009) bahwa mahasiswa sudah berada dalam RSP walaupun hanya sekedar membaca pernyataan yang akan dibuktikan.

Definisi yang disampaikan Alcock dan Inglis (2008, 2009) mengenai strategi semantik dan strategi sintaksis memuat kelemahan. Strategi semantik yang

didefinisikan dengan “saat mahasiswa berada di luar RSP meskipun hanya sebagian kecil” tidak selamanya benar. Adakalanya mahasiswa menggunakan sesuatu di luar RSP, misalnya contoh, gambar, atau diagram, tetapi hanya sebagai penjelasan ide dan bukan sebagai sumber ide. Hal ini sesuai yang dinyatakan Pinto (1998) bahwa pada jalur formal, seseorang dapat menggunakan gambar untuk menjelaskan konsep.

Weber & Mejia-Ramos (2009) mengajukan kritik dengan menunjukkan fakta seorang mahasiswa (Kevin) yang sempat menggunakan contoh tetapi tidak pernah mempertimbangkan contoh ini. Kevin memproduksi bukti dalam penalaran sintaksis. Mengacu pada Alcock & Inglis (2008) seharusnya strategi Kevin termasuk semantik, tetapi Weber & Mejia-Ramos (2009) menyatakan sangat ganjil untuk menyebut strategi Kevin sebagai strategi semantik.

Kelemahan kedua definisi Alcock & Inglis (2008) adalah bahwa semua produksi bukti pasti dimulai dari dalam RSP meskipun sekedar membaca pernyataan yang akan dibuktikan. Kritik terhadap ini disampaikan oleh Weber & Mejia-Ramos (2009) dengan menyajikan fakta berikut.

Andy : [Setelah membaca pernyataan] Baik saya, ini yang akan kita kerjakan. Dan saya tidak mampu untuk melanjutkannya.

Alcock : Baik, kerjakan saja sesuai yang kamu bisa. Tidak apa-apa.

Andy : [Diam] Jujur, saya benar-benar tidak tahu bagaimana harus memulai.

Dalam dialog tersebut, Andy sudah membaca pernyataan yang akan dibuktikan dan nampak bahwa Andy tidak pernah keluar dari RSP sehingga dapat dikodekan sebagai strategi sintaksis sesuai Alcock & Inglis (2008). Menurut Weber & Mejia-Ramos (2009), ini bukan strategi semantik dan bukan strategi sintaksis karena Andy belum bekerja sama sekali. Kritik dari Weber & Mejia-Ramos (2009) ini menunjukkan

bahwa definisi yang diberikan Alcock & Inglis (2008) mengenai strategi sintaksis dan semantik mempunyai kelemahan.

Weber (2009:201) mendefinisikan dua metode dalam mengonstruksi bukti.

*Produksi bukti sintaktik* berlangsung ketika seseorang bekerja *sebagian besar* dalam RSP, yakni pembuat bukti memfokuskan pada definisi dan aturan-aturan untuk mendeduksi konsekuensi logis tanpa mengacu pada representasi informal lainnya.

*Produksi bukti semantik* berlangsung ketika pembuat bukti *sebagian besar* bekerja dengan memperhatikan representasi lain dari konsep matematika, misalnya grafik, diagram, gerakan kinestetik, atau contoh prototip. Selanjutnya, Weber (2009:201) menyebut penalaran dalam RSP sebagai penalaran sintaksis dan penalaran dalam representasi lain sebagai penalaran semantik.

Kerangka kerja yang diberikan Weber (2009) ini mendapat kritikan dari Alcock & Inglis (2009) dengan mengajukan dua kelemahan. Pertama, tidak akan ada solusi untuk permasalahan rumit dalam menentukan suatu ukuran untuk persentase produksi bukti yang berlangsung dalam masing-masing representasi. Kedua, berkaitan dengan asimetri dasar antara sistem representasi karena bukti harus berada dalam RSP.

Berdasarkan kanjian pada beberapa kerangka kerja mengenai jalur pembuktian yang ditempuh mahasiswa dapat disimpulkan bahwa masih terdapat kelemahan pada kerangka kerja yang ada. Kerangka kerja yang disajikan oleh Pinto (1998), Weber (2004a, 2004b), Weber & Alcock (2004), dan Alcock & Weber (2005) tentang jalur alami (produksi bukti semantik) dan jalur formal (produksi bukti sintaksis) memuat kelemahan karena belum mampu mengakomodasi semua jalur

yang mungkin. Kerangka kerja Alcock & Inglis (2008, 2009) tentang strategi semantik dan strategi sintaksis memuat kelemahan sebagaimana disampaikan Weber & Mejia-Ramos (2009). Kerangka kerja Weber (2009) tentang produksi bukti semantik dan produksi bukti sintaksis memuat kelemahan sebagaimana disampaikan Alcock & Inglis (2009).

Penulis merasa perlu untuk membuat kerangka kerja baru berdasarkan pada kerangka kerja yang sudah ada dengan mengantisipasi kelemahan yang dimiliki. Kerangka kerja baru ini mengacu pada kerangka kerja Alcock & Inglis (2008, 2009) dengan memperhatikan kritik dari Weber & Mejia-Ramos (2009). Pemilihan kerangka kerja Alcock & Inglis (2008, 2009) sebagai acuan utama karena kerangka kerja ini paling memadai dibandingkan kerangka kerja yang lain ditinjau dari cakupan jalur yang mungkin terjadi dan kelemahan yang dimiliki.

Penulis mendefinisikan *strategi sintaksis* sebagai kegiatan pembuktian yang seluruhnya berlangsung di dalam RSP dan dimungkinkan sempat keluar dari RSP tetapi hanya untuk menjelaskan konsep/ide dan tidak menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Dalam strategi sintaksis, penyusun bukti menggunakan pernyataan yang telah diketahui dan menggunakan langkah pembuktian formal deduktif. *Strategi semantik* didefinisikan sebagai kegiatan pembuktian yang sempat berlangsung di luar RSP dan menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Dalam strategi semantik, penyusun bukti dapat menggunakan pernyataan yang telah diketahui, menggunakan kerangka kerja pembuktian formal, dan menggunakan logika deduktif tetapi juga melibatkan penggunaan contoh, gerakan, visualisasi, intuisi, atau pernyataan tidak formal. Dalam

penelitian ini, kategori strategi sintaksis atau strategi semantik digunakan sejak penyusun bukti sudah membaca soal dan memulai pembuktian. Dengan kriteria “memulai pembuktian” maka mahasiswa yang sudah membaca soal tetapi belum bekerja sama sekali tidak dapat dikategorikan.

## 2. Strategi Semantik dalam Kerangka Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis

Definisi Alcock & Inglis (2008:114) tentang sistem representasi bukti (*representation system of proof* (RSP)) tidak lain adalah sistem matematika formal. Dengan demikian, maka berpikir dalam RSP adalah berpikir dalam dunia formal sesuai teori David Tall (2008a). Berpikir di luar RSP, menurut Alcock & Inglis (2008:116) ditandai dengan penggunaan contoh, penggunaan bahasa informal untuk menyatakan ide matematika, dan penggunaan gerakan. Dalam teori tiga dunia berpikir matematis (Tall, 2008a), penggunaan gerakan atau contoh berupa gambar termasuk ke dalam dunia wujud. Penggunaan grafik (gambar sekaligus simbol) termasuk dalam dunia wujud-simbolik, penggunaan contoh spesifik berupa simbol termasuk dalam dunia simbolik, dan penggunaan bahasa informal untuk suatu konsep yang disebut bayangan konsep belum termasuk dalam dunia formal. Jika dikaitkan dengan teori David Tall mengenai tiga dunia berpikir matematis, maka berpikir di luar RSP adalah berpikir di dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya.

Berdasarkan keterkaitan antara RSP dan selain RSP dengan teori tiga dunia berpikir matematis, maka strategi semantik dan strategi sintaksis dapat diformulasikan dalam kerangka teori tiga dunia berpikir matematis. Strategi sintaksis adalah kegiatan pembuktian yang seluruhnya berlangsung dalam dunia berpikir formal dan dimungkinkan sempat keluar dari dunia berpikir formal tetapi hanya

untuk menjelaskan konsep/ide dan tidak menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Strategi semantik adalah kegiatan pembuktian yang sempat berlangsung di luar dunia berpikir formal dan menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan.

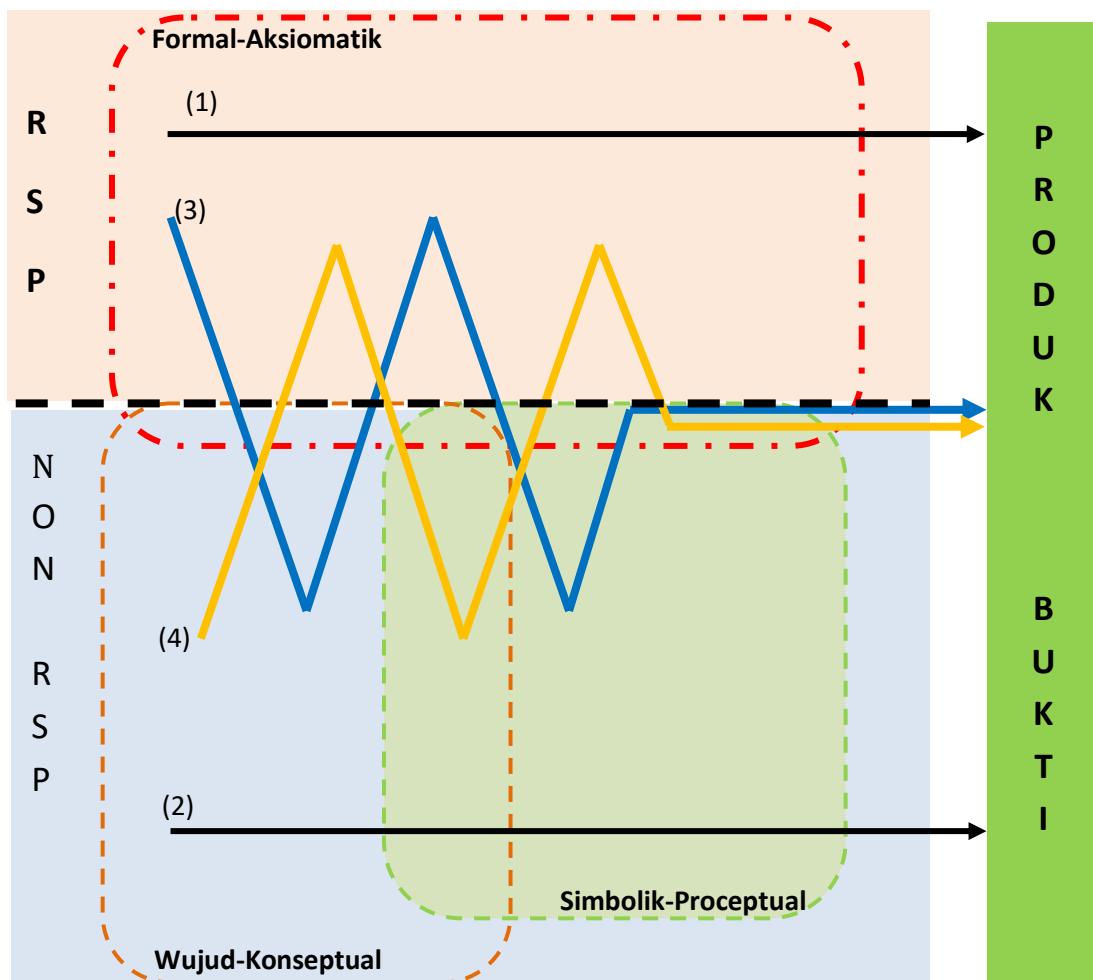
Berdasarkan kerangka teori RSP, maka kemungkinan proses pembuktian dapat dipilih menjadi 4, yaitu (1) seluruh proses berlangsung dalam RSP, (2) seluruh pembuktian berlangsung di luar RSP, (3) proses melibatkan RSP dan selain RSP serta dimulai dari RSP, dan (4) proses melibatkan RSP dan selain RSP serta dimulai dari luar RSP. Keempat kemungkinan ini jika dinyatakan dalam kerangka teori tiga dunia berpikir matematis akan menghasilkan kemungkinan berikut.

- (1) Seluruh proses berlangsung dalam dunia formal.
- (2) Seluruh proses berlangsung di dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya.
- (3) Proses melibatkan dunia formal, wujud, atau simbolik tetapi dimulai dari dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya.
- (4) Proses melibatkan dunia formal, wujud, atau simbolik tetapi dimulai dari formal.

Keempat kemungkinan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.4.

Kemungkinan (1) masuk ke dalam kategori strategi sintaksis dan lainnya masuk ke dalam kategori strategi semantik. Penelitian ini difokuskan pada strategi semantik, sehingga kemungkinan (1) tidak dilaporkan dalam penelitian ini. Pemilihan strategi semantik pada penelitian ini berdasarkan alasan bahwa penelitian ini ingin melihat proses berpikir mahasiswa yang melibatkan perpindahan antara RSP dan selain RSP (antara dunia berpikir matematis). Penelitian ini berusaha mendeskripsikan proses berpikir dalam strategi semantik untuk menjawab pertanyaan

mengapa mahasiswa melakukan perpindahan dunia berpikir dan untuk apa melakukannya. Hal ini tidak terjadi dalam strategi sintaksis, karena strategi sintaksis hanya melibatkan RSP (satu dunia berpikir, yaitu dunia formal).



**Gambar 2.4 Strategi Sintaksis dan Semantik Ditinjau dari Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis dan Teori RSP.**

Kemungkinan (2) masuk ke dalam kategori strategi semantik, karena seluruh proses berpikir dalam menyusun bukti terjadi di luar RSP (di luar dunia formal). Pembuktian ini dapat melibatkan dunia berpikir wujud (misalnya gerakan, percobaan fisik, atau penggunaan gambar), dunia berpikir simbolik (misalnya contoh khusus

atau contoh umum), atau gabungan keduanya (misalnya penggunaan diagram dan grafik). Proses yang terjadi di luar RSP ini dapat berlangsung secara sederhana, yaitu hanya melibatkan salah satu dari dunia wujud, dunia simbolik, atau gabungan keduanya. Pada kemungkinan ini tidak pernah sampai menghasilkan bukti matematis formal yang diinginkan.

Kemungkinan (3) masuk ke dalam kategori strategi semantik, karena proses berpikir dalam menyusun bukti sempat terjadi di luar RSP (di luar dunia formal) tetapi dimulai dari RSP (dunia formal). Pada awal pembuktian, mahasiswa bekerja dalam RSP (dunia formal) tetapi kemudian berpindah ke luar RSP (dunia wujud, dunia simbolik, atau gabungan keduanya) untuk menuntun langkah pembuktian menuju kesimpulan yang diinginkan. Proses yang terjadi di luar RSP ini dapat berlangsung secara sederhana, yaitu hanya melibatkan salah satu dari dunia wujud, dunia simbolik, atau gabungan keduanya. Namun, dimungkinkan juga terjadi proses bolak-balik antara dunia wujud, dunia simbolik, dan gabungan keduanya untuk menghasilkan bukti yang diinginkan. Selain itu, proses perpindahan antara RSP dan luar RSP dapat berlangsung satu kali atau bahkan beberapa kali.

Kemungkinan (4) masuk ke dalam kategori strategi semantik, karena proses berpikir dalam menyusun bukti sempat terjadi di luar RSP (di luar dunia formal). Pada awal pembuktian, mahasiswa bekerja di luar RSP (dunia wujud, dunia simbolik, atau gabungan keduanya) untuk menuntun langkah pembuktian dan kemudian menuju RSP (dunia formal) untuk menghasilkan bukti yang diinginkan. Proses yang terjadi di luar RSP ini dapat berlangsung secara sederhana, yaitu hanya melibatkan salah satu dari dunia wujud, dunia simbolik, atau gabungan keduanya. Namun,

dimungkinkan juga terjadi proses bolak-balik antara dunia wujud, dunia simbolik, atau gabungan keduanya untuk menghasilkan bukti yang diinginkan. Selain itu, proses perpindahan antara luar RSP dan RSP dapat berlangsung satu kali atau bahkan beberapa kali. Perbedaan kemungkinan (4) dengan kemungkinan (3) adalah pada kemungkinan (4) proses dimulai dari luar RSP sedangkan pada kemungkinan (3) dimulai dari dalam RSP (dunia formal).

Mengacu pada Pinto (1998), Weber (2004a, 2004b), Weber & Alcock (2004), dan Alcock & Weber (2005), maka hanya ada kemungkinan (1) dan (4). Mengacu pada Alcock & Inglis (2008, 2009), maka hanya ada kemungkinan (1) dan (3). Dengan demikian, kerangka kerja yang dikembangkan oleh penulis mempunyai cakupan yang lebih luas dibandingkan kerangka kerja sebelumnya.

### **3. Terjadinya Proses Berpikir Strategi Semantik dalam Kerangka Teori Tiga Dunia Berpikir Matematis**

Telah dijelaskan sebelumnya, bahwa strategi semantik dapat terjadi dalam tiga kemungkinan yaitu, (1) seluruh proses pembuktian berlangsung di dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya, (2) proses pembuktian melibatkan dunia formal, wujud, atau simbolik tetapi dimulai dari dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya, dan (3) proses pembuktian melibatkan dunia formal, wujud, atau simbolik tetapi dimulai dari formal. Kemungkinan tersebut terjadi setelah mahasiswa membaca masalah pembuktian dan mulai memikirkan bukti yang akan ditulis. Pertanyaan yang muncul adalah mengapa mahasiswa bekerja di luar dunia formal untuk menyelesaikan tugas pembuktian. Meskipun pertanyaan ini berkaitan dengan

penyebab terjadinya strategi semantik, namun jawabannya dapat dicari dengan melihat tujuan mahasiswa saat bekerja di luar dunia formal.

Bekerja di luar dunia formal misalnya dengan menggunakan gerakan, contoh khusus atau umum, gambar, grafik, atau bayangan konsep. Contoh spesifik atau visualisasi dapat digunakan untuk mengecek kebenaran, memahami masalah, mengeksplorasi ide, dan menuntun langkah pembuktian (Alcock & Inglis, 2008). Matematisi juga sering mengacu pada contoh ketika ragu mengenai kebenaran pernyataan (Inglis, dkk., 2007). Weber (2009:205) menyatakan bahwa contoh konkret dapat membantu untuk memahami ide abstrak, memahami makna definisi formal atau pernyataan, memberikan kejelasan benar tidaknya suatu pernyataan, membantu memahami mengapa pernyataan itu benar, dan menjadi dasar untuk mengonstruksi bukti formal.

Alcock & Weber (2005) pernah mewawancara subjek bernama Brad yang menggunakan pendekatan referensial (semantik) dalam menyusun bukti. Brad menyatakan bahwa ia menggunakan gambar, diagram, atau contoh untuk memahami masalah, meyakinkan bahwa langkah yang digunakan benar, menentukan jenis pembuktian yang harus dilakukan, dan mencari ide ketika mengalami kebuntuan langkah. Gibson (1998) menyatakan bahwa secara umum penggunaan diagram, sebagai bagian dari aspek di luar RSP, adalah untuk (1) menentukan kebenaran pernyataan, (2) memahami informasi, (3) menemukan ide, dan (4) menjelaskan ide. Berdasarkan beberapa pendapat ini dan berdasarkan studi pendahuluan tanggal 23-25 Februari 2012 terhadap 18 mahasiswa dapat disimpulkan bahwa mahasiswa keluar dari dunia formal (RSP) untuk (1) memperbaiki pemahaman, (2) mencari atau

menemukan ide, (3) meyakinkan kebenaran langkah, dan (4) menjelaskan ide (Abdussakir, 2012).

Strategi semantik tidak semata-mata terjadi karena mahasiswa sempat bekerja di luar RSP. Bekerja di luar RSP akan masuk kategori strategi semantik jika hal itu digunakan untuk mengarahkan pada bukti yang diinginkan. Mengacu pada pendapat Pinto (1998), seseorang dapat menggunakan gambar untuk menjelaskan konsep pada jalur formal. Mengacu pada pendapat Weber & Mejia-Ramos (2009), ketika representasi di luar RSP hanya digunakan untuk menjelaskan masalah atau mengonkretkan masalah, maka masih termasuk kategori strategi sintaksis. Dengan demikian, maka dalam penelitian ini digunakan 3 kategori dalam strategi semantik, yaitu (1) menemukan definisi konsep untuk memperbaiki pemahaman, (2) melakukan refleksi untuk meyakinkan kebenaran pernyataan atau langkah pembuktian, dan (3) mencari petunjuk untuk menuntun langkah pembuktian.

#### **4. Proses Berpikir dalam Strategi Semantik**

Studi awal pada tanggal 23-25 Februari 2012 dilakukan untuk mengetahui mengapa mahasiswa menempuh strategi semantik dan untuk apa mereka melakukannya. Studi awal ini sekaligus sebagai ujicoba instrumen yang digunakan dalam penelitian.

Mahasiswa diminta menyelesaikan masalah pembuktian dan selanjutnya dilakukan wawancara berbasis tugas kepada beberapa mahasiswa yang menempuh strategi semantik. Dalam wawancara ini, mahasiswa diberi kesempatan melanjutkan proses pembuktian sampai menghasilkan bukti atau mereka benar-benar tidak dapat melanjutkan. Di akhir wawancara, ditanyakan mengapa mahasiswa menggunakan

representasi di luar RSP (diagram atau contoh) pada saat membuktikan. Berikut ini akan digambarkan potongan tiga proses yang terjadi dalam strategi semantik pada studi awal ini.

#### a. Menemukan Definisi Konsep

Pada beberapa kasus dalam studi awal, kemungkinan mahasiswa bekerja di luar RSP terjadi hampir di semua langkah. Mulai dari menyatakan fungsi  $f$  dan  $g$  dalam bentuk diagram atau melalui contoh, menyatakan fungsi  $gof$  dalam bentuk diagram atau mencari rumusnya melalui contoh, atau menyatakan fungsi injektif. Alasan utama yang muncul tentang penggunaan gambar atau contoh ini adalah menuntun langkah pembuktian dan menjelaskan situasi permasalahan.

Hal yang berbeda terjadi ketika mahasiswa lupa definisi fungsi injektif sehingga tidak dapat berbuat apa-apa. Pada situasi inilah mahasiswa menggunakan diagram, mengeksplorasi gambar, dan mencoba melihat sifat fungsi injektif. Selanjutnya mahasiswa menyimpulkan bahwa  $f$  injektif  $\Leftrightarrow [x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$  dan menggunakan untuk menyelesaikan tugas pembuktian.

Kejadian ini terjadi pada mahasiswa berinisial AM. Setelah membaca soal, AM berkata bahwa ada rumus yang pernah dipelajari sebelumnya, yaitu definisi konsep fungsi injektif. Selanjutnya AM menggambar diagram fungsi injektif. Melalui observasi dan eksplorasi pada diagram, akhirnya AM dapat menemukan definisi konsep fungsi injektif. AM telah menggunakan strategi semantik meskipun tidak mampu untuk menyelesaikan tugas pembuktian yang diberikan. Dalam hal ini gambar atau diagram digunakan untuk mencari sifat atau definisi konsep untuk dapat menyelesaikan masalah pembuktian.

AM berpikir wujud-simbolik dengan membuat diagram panah berdasarkan bayangan konsep fungsi injektif. Selanjutnya AM melakukan aksi untuk mengeksplorasi sifat yang ada pada fungsi injektif. Dari kegiatan aksi ini, AM kemudian menginteriorisasi aksi menjadi proses. Proses yang diperoleh adalah bahwa unsur berbeda mempunyai peta berbeda pada fungsi injektif. Proses ini kemudian dikompresi menjadi simbol dan dienkapsulasi menjadi objek. Objek ini berupa “jika  $x$  dan  $y$  berbeda, maka  $f(x)$  dan  $f(y)$  berbeda”. Objek ini kemudian disatukan ke dalam skema yang ada setelah proses generalisasi objek menjadi definisi konsep fungsi injektif.

### **b. Melakukan Refleksi**

Mahasiswa berinisial ANA ketika mengerjakan masalah pembuktian pertama kali langsung menggambar diagram panah fungsi satu-satu dan fungsi tidak satu-satu serta langsung menyatakan definisi fungsi satu-satu secara formal. ANA kemudian menggunakan definisi ini untuk pembuktian. Pertama ANA menulis  $f(x) = f(y)$  dan mengerjakannya sebagai berikut.

$$f(x) = f(y)$$

$$(gof)(x) = (gof)(y)$$

$$g(f(x)) = g(f(y))$$

$$x = y.$$

ANA hanya tersenyum ketika penulis bertanya darimana mendapatkan  $(gof)(x) = (gof)(y)$ . Penulis memberitahukan bahwa langkah yang diambil harus ada dasarnya. ANA mengakui bahwa jawabannya salah dan memulai pekerjaannya lagi. ANA memfokuskan pada pernyataan  $f(x) = f(y)$  dan langsung menulis  $g(f(x)) =$

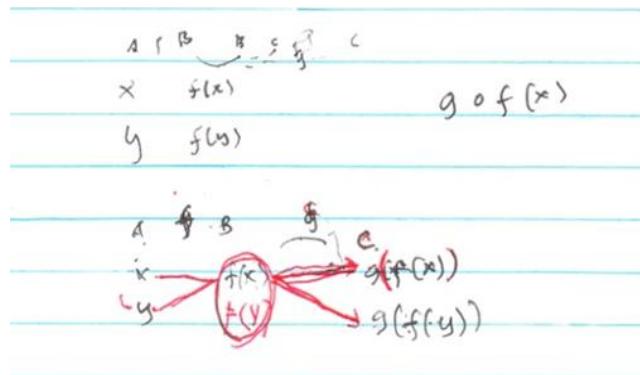
$g(f(y))$ . Kemudian ia menggambar diagram panah fungsi  $gof$  dan menjelaskan bahwa memang benar  $g(f(x))$  harus sama dengan  $g(f(y))$  karena  $g$  fungsi. Nampak di sini bahwa gambar digunakan ANA untuk meyakinkan kebenaran langkah yang telah dibuatnya. Selanjutnya ANA meneruskan pekerjaan dan akhirnya memperoleh bahwa  $x = y$ . Akhirnya ANA menyimpulkan bahwa  $f$  injektif karena jika  $f(x) = f(y)$ , maka diperoleh  $x = y$ .

ANA dikategorikan menggunakan strategi semantik karena ANA sempat bekerja di luar RSP dan menggunakannya dalam pembuktian. Pada langkah penggeraan ANA, strategi semantik yang digunakan bertujuan untuk melakukan refleksi. Proses melakukan refleksi yang dilakukan ANA terjadi ketika ANA langsung menyimpulkan secara formal bahwa  $g(f(x)) = g(f(y))$  hanya berdasar pengetahuan  $f(x) = f(y)$  tanpa proses koordinasi antara hal-hal lain yang telah diketahui. Kesimpulan yang dibuat secara singkat ini tidak cukup kuat untuk meyakinkan dirinya sendiri dan mendorong dirinya untuk melakukan refleksi.

Kegiatan melakukan refleksi dilakukan dalam dunia berpikir wujud-simbolik. ANA berpikir wujud-simbolik menggunakan diagram panah untuk melihat permasalahan secara lebih konkret. Ketika berada dalam dunia wujud-simbolik, ANA kemudian melakukan aksi dengan menempatkan  $f(x)$  dan  $f(y)$  di  $B$  dan melihat bahwa  $f(x)$  dan  $f(y)$  akan dipetakan oleh  $g$  ke  $C$ . Aksi ini kemudian menghasilkan proses bahwa unsur yang sama harus mempunyai peta sama karena  $g$  adalah fungsi. Proses ini menghasilkan objek bahwa jika  $f(x) = f(y)$ , maka  $g(f(x)) = g(f(y))$  karena  $g$  adalah fungsi. Akhirnya ANA memperoleh keyakinan bahwa kesimpulan yang dibuat sebelumnya memang benar.

### c. Mencari Petunjuk Langkah

Mahasiswa berinisial KA saat menyelesaikan masalah yang diberikan menggunakan strategi sintaktis sejak awal. Untuk membuktikan fungsi  $f$  injektif jika diketahui  $g \circ f$  injektif, pertama KA mengambil  $x, y \in A$  dengan  $f(x) = f(y)$ . KA menulis akan ditunjukkan  $x = y$ . KA melihat yang diketahui, yaitu  $f(x) = f(y)$  dan kemudian berhenti lama sekali untuk melanjutkan pekerjaannya, dan tangannya bergerak-gerak seolah menggambar sesuatu. Ketika penulis menanyakan apa yang sedang dibayangkan KA, KA tersenyum dan bertanya apakah boleh menggunakan gambar. KA kemudian menggambar himpunan  $A, B$ , dan  $C$  serta fungsi  $f$  dan  $g$ .



**Gambar 2.5 Diagram yang Dibuat KA**

Berdasarkan gambar kemudian KA menyatakan bahwa  $g(f(x))$  harus sama dengan  $g(f(y))$  karena  $f(x) = f(y)$  dan  $g$  adalah fungsi. Dari sinilah kemudian KA melanjutkan pekerjaan dengan menulis sebagai berikut.

$$f(x) = f(y)$$

$$g(f(x)) = g(f(y))$$

$$g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

$$x = y.$$

Akhirnya, KA dapat menyelesaikan masalah pembuktian yang diberikan. Terlihat bahwa berpikir wujud-simbolik yang dilakukan KA berfungsi untuk membantunya menemukan petunjuk untuk menuntun langkah pembuktian yang dilakukan.

Perbedaan pekerjaan KA dengan ANA adalah KA membuat kesimpulan setelah berpikir wujud-simbolik menggunakan gambar sedangkan ANA membuat kesimpulan sebelum berpikir wujud-simbolik menggunakan gambar. KA menggunakan berpikir wujud-simbolik untuk menuntunnya menghasilkan kesimpulan yang diinginkan sedangkan ANA menggunakan berpikir wujud-simbolik untuk meyakinkan kebenaran kesimpulan yang telah dibuat.

Pada saat berpikir wujud-simbolik menggunakan bantuan diagram, KA melakukan aksi dengan menempatkan  $f(x) = f(y)$  di B dan menempatkan  $g(f(x))$  dan  $g(f(y))$  di C. KA terus melakukan aksi melihat kemungkinan yang terjadi dengan  $g(f(x))$  dan  $g(f(y))$ . KA berpikir bagaimana jika  $g(f(x)) \neq g(f(y))$ . Dengan aksi pada gambar, KA melihat bahwa jika  $g(f(x)) \neq g(f(y))$  maka  $g$  bukan fungsi karena grafiknya bercabang dua. Aksi ini kemudian diinternalisasi menjadi proses bahwa objek yang sama harus memiliki peta yang sama. Akhirnya proses ini dienkapsulasi menjadi objek, yaitu jika  $f(x) = f(y)$  di B maka  $g(f(x)) = g(f(y))$ .

## 5. Masalah Pembuktian yang Digunakan

Untuk tujuan melihat proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti dengan strategi semantik, penelitian ini mengambil materi komposisi fungsi. Alasan pemilihan materi ini adalah (1) konsep fungsi komposisi dapat direpresentasikan dalam tiga dunia berpikir matematis sesuai teori David Tall, yaitu dalam bentuk

gambar atau diagram, dalam bentuk simbol, atau dalam bentuk definisi formal fungsi komposisi serta (2) banyak teorema yang berkaitan dengan fungsi komposisi yang dapat digunakan untuk menggambarkan proses berpikir mahasiswa menuju berpikir formal, misalnya teorema bahwa komposisi dua fungsi bijektif adalah bijektif.

Moore (1994:261-262) menyajikan suatu soal ujian final berikut.

*Let  $f$  and  $g$  be functions on  $A$ . If  $fog$  is one-to-one, then  $g$  is one-to-one.*

Dari hasil ujian ini, diperoleh bahwa hanya satu mahasiswa yang menjawab benar sedangkan yang lain menjawab salah. Mahasiswa cenderung memulai pembuktian dengan hipotesis  $fog$  injektif, daripada menggunakan asumsi  $g(x) = g(y)$ , untuk  $x, y$  di  $A$ . Soal Moore digunakan dalam penelitian ini dengan merumuskan kembali menjadi:

*Misalkan  $f$  fungsi dari  $A$  ke  $B$ ,  $g$  fungsi dari  $B$  ke  $C$ , dan  $gof$  injektif. Bukti bahwa  $f$  injektif.*

Perumusan ulang ini dilakukan untuk menurunkan derajat kesulitan soal Moore (1994). Penurunan derajat kesulitan soal dilakukan karena penelitian ini difokuskan pada proses pembuktian bukan pada hasil akhir pembuktian. Pada hasil penelitian Moore hanya satu mahasiswa yang mampu menjawab benar. Dengan demikian, jika derajat kesulitan soal tidak diturunkan, maka dimungkinkan proses berpikir mahasiswa tidak terungkap dengan baik. Perbedaan masalah penelitian ini dengan soal Moore dapat dirangkum pada Tabel 2.1.

Masalah pembuktian ini menarik untuk diajukan karena melibatkan tiga konsep penting mengenai fungsi, yaitu konsep fungsi, konsep fungsi injektif, dan konsep fungsi komposisi. Dengan demikian, maka mahasiswa perlu memahami ketiga konsep tersebut agar dapat memberikan bukti yang diminta dalam

permasalahan. Selain itu, masalah pembuktian ini memungkinkan mahasiswa untuk berpikir dalam dunia berbeda. Konsep fungsi, fungsi injektif, dan fungsi komposisi dapat dipikirkan secara wujud, simbolik, wujud-simbolik, atau secara formal menggunakan definisi konsep.

**Tabel 2.1 Perbedaan Antara Soal Moore Dengan Masalah Penelitian Ini**

No	Soal Moore	Masalah Pembuktian Penelitian ini
1.	Hanya melibatkan satu himpunan, yaitu $A$ . Akibatnya <ol style="list-style-type: none"> <li>Komposisi <math>fog</math> dan <math>gof</math> dapat ditentukan</li> <li>Memberikan kesulitan tersendiri untuk membedakan <math>A</math> sebagai domain dan kodomain.</li> </ol>	Melibatkan tiga himpunan, yaitu $A$ , $B$ , dan $C$ . Akibatnya <ol style="list-style-type: none"> <li>Komposisi <math>gof</math> dapat ditentukan sedangkan <math>fog</math> belum tentu.</li> <li>Memberikan kemudahan untuk membedakan domain dan kodomain.</li> </ol>
2.	Diketahui $fog$ injektif.	Diketahui $gof$ injektif. Hal ini karena hanya $gof$ yang terdefinisi, dan memberikan kemudahan untuk melihat fungsi $f$ terlebih dahulu, baru fungsi $g$ .
3.	Membuktikan fungsi $g$ injektif.	Membuktikan fungsi $f$ injektif. Hal ini dilakukan karena mahasiswa lebih terbiasa dengan fungsi $f$ daripada fungsi $g$ .

## 6. Garis Besar Penelitian

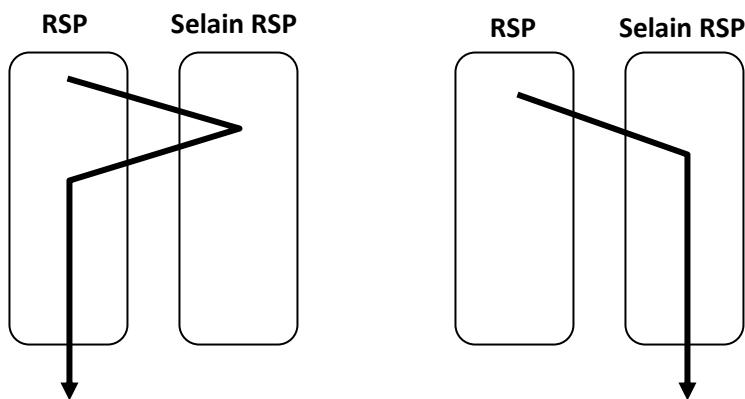
Mengakhiri uraian pada bagian ini, penulis menyajikan garis besar penelitian yang dilakukan. Hal pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah membuat definisi strategi semantik dan strategi sintaksis mengacu pada Alcock & Inglis (2008) serta berdasarkan kelemahan yang ada ditinjau dari definisi jalur alami dan jalur formal oleh Pinto (1998) dan kritik dari Weber & Mejia-Ramos (2009).

Penulis mendefinisikan *strategi sintaksis* sebagai kegiatan pembuktian yang seluruhnya berlangsung di dalam RSP (dunia berpikir formal) dan dimungkinkan sempat keluar dari RSP tetapi hanya untuk menjelaskan konsep/ide dan tidak menggunakan untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. *Strategi semantik*

didefinisikan sebagai kegiatan pembuktian yang sempat berlangsung di luar RSP (di dunia berpikir wujud, simbolik, atau gabungan keduanya) dan menggunakannya untuk mencapai kesimpulan yang diinginkan. Pengkategorian strategi sintaksis atau strategi semantik dalam penelitian ini dilakukan sejak mahasiswa sudah membaca soal dan memulai pembuktian.

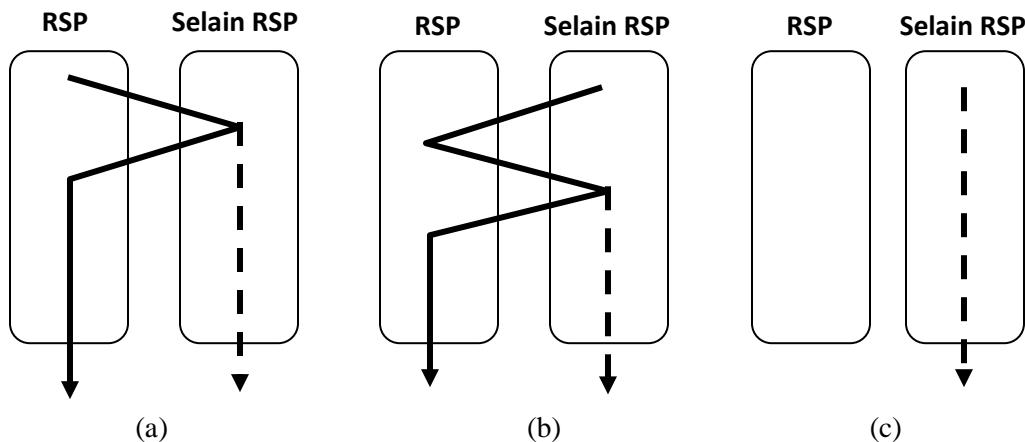
Berdasarkan definisi ini, maka mahasiswa yang hanya membaca soal dan belum memulai proses pembuktian belum dapat dikategorikan ke dalam strategi sintaksis atau strategi semantik. Hal ini berbeda dengan Alcock dan Inglis (2009) yang menyatakan bahwa dengan membaca soal saja sudah termasuk strategi sintaksis. Dengan penegasan *sudah membaca soal dan memulai pembuktian*, maka definisi ini memberikan kerangka kerja yang jelas untuk menentukan sejak kapan harus mulai melihat proses berpikir mahasiswa.

Mengacu pada Alcock & Inglis (2009) maka strategi semantik hanya akan memuat dua kemungkinan jalur berpikir yang dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 2.6 Jalur Strategi Semantik berdasarkan Alcock dan Inglis (2009)**

Dengan penegasan *sudah membaca soal dan memulai pembuktian*, maka kemungkinan jalur strategi semantik dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 2.7 Jalur Strategi Semantik yang Mungkin**

Pada kemungkinan (a) dan (b), perpindahan antara RSP dan selain RSP dapat berlangsung satu kali atau lebih untuk menghasilkan bukti yang diinginkan. Kemungkinan (a) dan (b) dapat berhasil atau gagal menghasilkan bukti sedangkan kemungkinan (c) selalu gagal dalam menghasilkan bukti.

Jalur berpikir yang ditempuh pada kegiatan pembuktian digambarkan dengan kerangka teori tiga dunia berpikir matematis yang dibuat David Tall (2008a). Dengan kerangka teori ini, maka berpikir di luar RSP dapat dijelaskan lebih rinci, yaitu berpikir wujud, berpikir simbolik, atau berpikir wujud-simbolik. Dengan demikian, penggunaan kerangka teori tiga dunia berpikir memberikan gambaran yang lebih spesifik untuk membedakan kegiatan berpikir yang terjadi dibandingkan sekedar disebut berpikir di luar RSP.

Proses penentuan jalur berpikir yang digunakan mahasiswa dimulai dengan menyatakan komponen berpikir ke dalam kategori berpikir wujud, simbolik, wujud-simbolik, atau formal. Struktur berpikir selanjutnya digambarkan dalam suatu skema berpikir yang utuh mulai awal menulis bukti sampai selesai membuktikan ditandai

dengan menghasilkan bukti yang diinginkan dalam soal. Struktur berpikir digambar menggunakan bentuk-bentuk berikut.



: menggambarkan berpikir formal



: menggambarkan berpikir simbolik



: menggambarkan berpikir wujud-simbolik



: menggambarkan berpikir wujud

Dari skema berpikir yang melibatkan bentuk-bentuk gambar tersebut dengan mudah dapat dilihat kapan mahasiswa bekerja di dalam RSP dan di luar RSP. Penggambaran skema berpikir ke dalam struktur menggunakan bentuk-bentuk gambar tersebut merupakan cara baru yang belum dilakukan peneliti sebelumnya.

Berdasarkan saran Sepideh Stewart (2008:248) mengenai pentingnya mengetahui proses berpikir yang terjadi saat mahasiswa berpindah dari satu dunia berpikir ke dunia berpikir yang lain, maka penelitian ini juga menjelaskan mengapa mahasiswa melakukan perpindahan dan bagaimana proses berpikir yang terjadi. Untuk melihat alasan mengapa mahasiswa melakukan perpindahan, maka penulis membuat kategori berdasarkan tujuan keluar dari dunia berpikir formal.

Berdasarkan kajian teoritis dan studi empiris, kategori yang ditetapkan mengenai terjadinya strategi semantik adalah (1) menemukan definisi konsep untuk memperbaiki pemahaman, (2) melakukan refleksi untuk meyakinkan kebenaran pernyataan atau langkah pembuktian, dan (3) mencari petunjuk langkah non definisi untuk menuntun langkah pembuktian. Selanjutnya penulis membuat karakterisasi proses berpikir yang terjadi pada masing-masing kategori. Mengacu pada pendapat Tall (2008a) bahwa pembentukan konsep dalam dunia wujud dan dunia simbolik

berlangsung melalui serangkaian kegiatan aksi, proses, objek, dan skema maka proses berpikir yang terjadi pada masing-masing kategori dikarakterisasi berdasarkan teori APOS. Penggunaan teori APOS untuk menjelaskan proses berpikir yang terjadi juga didasarkan pada studi awal yang menunjukkan bahwa pada masing-masing kategori secara konsisten mahasiswa melakukan kegiatan aksi, proses, dan objek. Dengan menggunakan teori APOS, diharapkan dapat terlihat bagaimana mahasiswa bekerja di luar dunia formal dan akhirnya kembali lagi ke dunia formal.

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **A. Pendekatan dan Jenis Penelitian**

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan secara rinci proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Jalur berpikir mahasiswa digambarkan dalam skema berpikir berdasarkan kerangka teori David Tall tentang tiga dunia berpikir matematis, yaitu dunia wujud, dunia simbolik, dan dunia formal. Untuk melihat proses berpikir yang terjadi, pembuktian dikategorikan menjadi tiga, yaitu (1) menemukan definisi konsep untuk memperbaiki pemahaman, (2) melakukan refleksi untuk meyakinkan kebenaran pernyataan atau langkah pembuktian, dan (3) mencari petunjuk langkah non definisi untuk menuntun proses pembuktian.

Untuk mengungkap atau memperoleh gambaran tentang proses berpikir mahasiswa dalam menyelesaikan masalah pembuktian, peneliti berusaha melakukan pemeriksaan secara teliti dan hati-hati serta secara detail dan mendalam. Peneliti melakukan eksplorasi terhadap mahasiswa mengenai apa yang dipikirkan, dilakukan, ditulis, digambar, diucapkan, atau gerakan tubuh yang terjadi pada saat menghadapi dan menyelesaikan pembuktian. Data yang diperoleh dideskripsikan/dipaparkan berdasarkan keadaan yang sebenarnya untuk memperoleh gambaran secara alami mengenai proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik. Selanjutnya dilakukan analisis data secara induktif dan dilakukan pencocokan dengan teori yang ada sehingga diperoleh karakteristik terjadinya strategi

semantik yang digunakan mahasiswa dalam pembuktian. Dalam melakukan pemeriksaan itu, peneliti bertindak sebagai instrumen kunci. Sebagai instrumen kunci artinya keberadaan peneliti mutlak diperlukan dan tidak dapat diwakilkan oleh orang lain atau dengan sesuatu yang lain. Peneliti juga tidak melakukan manipulasi terhadap suatu variabel untuk dilihat dampaknya terhadap sesuatu variabel yang lain. Peneliti lebih mengutamakan untuk mengungkap apa yang terjadi di balik hasil pembuktian yang dilakukan mahasiswa dibandingkan sekedar hasil itu sendiri.

Uraian di atas menunjukkan penelitian ini merupakan penelitian kualitatif, karena memiliki sifat-sifat penelitian kualitatif. Sesuai Bogdan & Biklen (1998:4-8), penelitian kualitatif mempunyai ciri-ciri berikut, yaitu (1) peneliti bertindak sebagai instrumen utama, karena di samping sebagai pengumpul data dan penganalisis data, peneliti juga terlibat langsung dalam proses penelitian, (2) mempunyai latar alami (*natural setting*), data yang diteliti dan dihasilkan akan dipaparkan sesuai dengan apa yang terjadi di lapangan, (3) hasil penelitian bersifat deskriptif, karena data yang dikumpulkan bukan berupa angka-angka melainkan kata-kata atau kalimat, atau gerak tubuh, (4) lebih mementingkan proses daripada hasil, dan (5) analisis data cenderung bersifat induktif.

Melihat tujuan penelitian ini dan tidak adanya manipulasi terhadap sesuatu variabel maka penelitian ini merupakan penelitian deskriptif. Apabila melihat tujuan spesifiknya, yaitu mengeksplorasi proses terjadinya strategi semantik dalam menyusun bukti, maka penelitian ini tergolong penelitian eksploratif. Oleh karenanya pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif-eksploratif.

## B. Subjek Penelitian

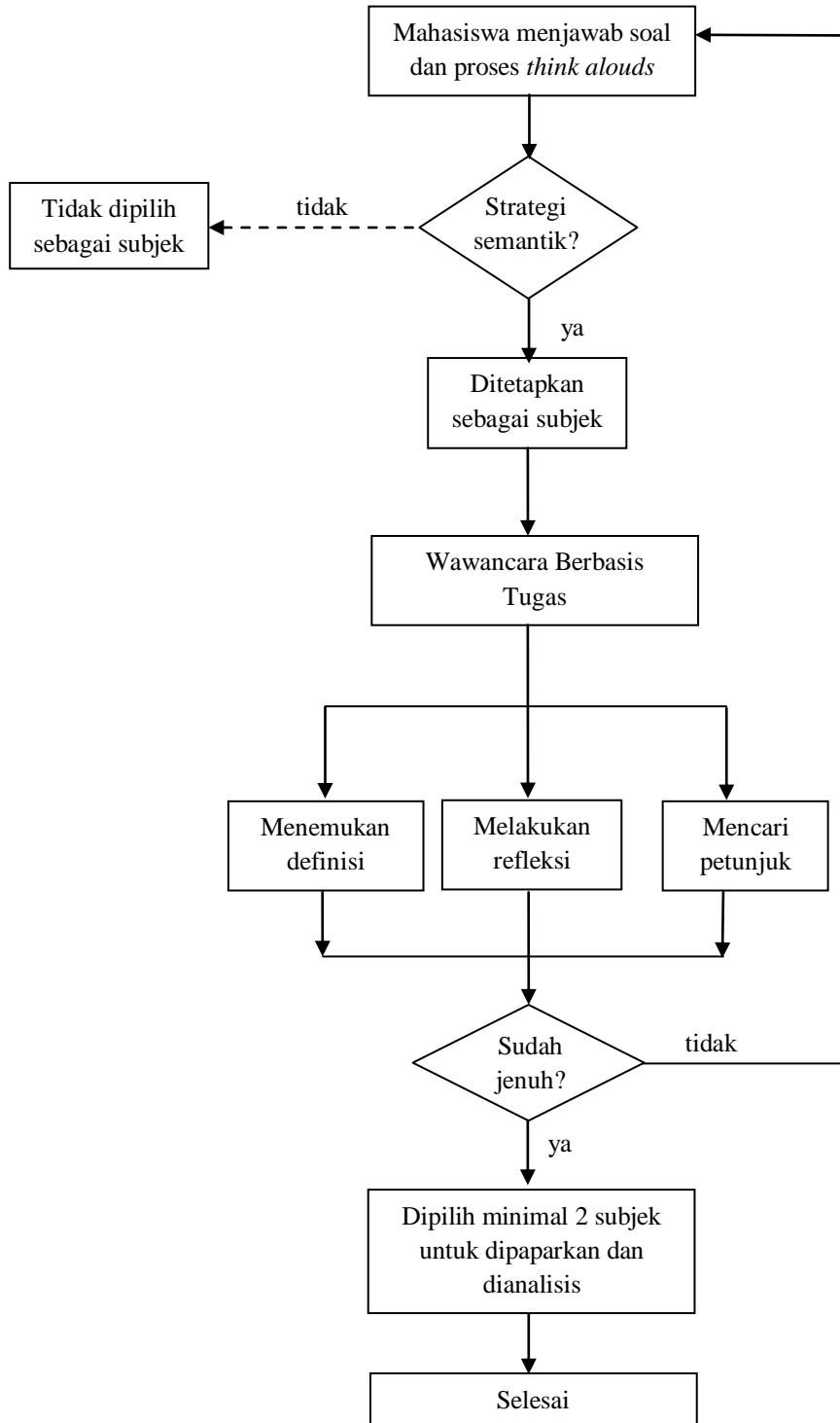
Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Subjek penelitian diambil dari mahasiswa tahun keempat. Alasan pemilihan ini adalah:

- (a). untuk menjamin bahwa mahasiswa sudah mengetahui dunia formal matematika, sudah pernah belajar konsep fungsi, fungsi injektif, dan fungsi komposisi, serta sudah mengenal berbagai teknik pembuktian melalui perkuliahan di kelas.
- (b). untuk menjamin bahwa mahasiswa sudah bertemu dengan berbagai dosen dengan gaya mengajar yang berbeda-beda sehingga dapat meminimalkan pengaruh gaya mengajar dosen terhadap proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti.

Proses pemilihan subjek penelitian dilakukan sebagai berikut. Mahasiswa diberi masalah pembuktian berkaitan dengan materi fungsi komposisi. Mahasiswa diminta untuk semaksimal mungkin mengungkapkan semua yang dipikirkan (*think aloud*) selama berusaha untuk menjawab masalah yang diberikan. Mahasiswa yang menggunakan strategi semantik dalam menyusun bukti kemudian ditetapkan sebagai subjek penelitian. Kepada mahasiswa ini kemudian dilakukan wawancara berbasis tugas terkait hasil pembuktian untuk mendapatkan data yang lebih banyak dan akurat.

Strategi semantik subjek dikategorikan menjadi tiga proses, yaitu (1) menemukan definisi konsep, (2) melakukan refleksi, dan (3) mencari petunjuk langkah non definisi. Pemilihan subjek terus dilakukan sampai diperoleh kejemuhan data, yaitu pola yang sama atau tetap dari beberapa subjek untuk masing-masing kategori. Setelah kejemuhan data tercapai maka dipilih minimal 2 subjek untuk masing-masing kategori untuk dipaparkan dan dilakukan analisis perbandingan tetap.

Alur pemilihan subjek dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 3.1 Skema Pemilihan Subjek Penelitian**

### C. Instrumen Penelitian

Ada dua jenis instrumen yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu (1) instrumen utama dan (2) instrumen pembantu. Instrumen utama penelitian ini adalah peneliti sendiri. Peneliti sebagai instrumen berperan sebagai perencana, pengumpul data, penganalisis data, penafsir data, dan akhirnya menjadi pelapor hasil penelitian. Dalam pengumpulan data, peneliti menggunakan lembar tugas berisi masalah pembuktian, lembar catatan lapangan, wawancara, dan alat perekam audio sebagai instrumen pembantu.

Instrumen lembar tugas yang digunakan dalam penelitian ini berisi tugas pembuktian berkaitan dengan materi fungsi komposisi. Pemilihan materi ini dilakukan dengan alasan memungkinkan penggunaan berbagai dunia berpikir oleh mahasiswa dalam penyusunan bukti. Instrumen lembar tugas divalidasi oleh ahli yang terdiri dari 2 (dua) ahli matematika dan 1 (satu) ahli pendidikan matematika. Validasi diarahkan pada pemenuhan kriteria dari segi (1) materi, (2) konstruksi, dan (3) bahasa serta kesesuaianya dengan tujuan penelitian.

Ahli matematika dalam penelitian ini adalah Dr. Tjang Daniel Chandra, M.Si. dan Dr. Hery Susanto, M.Si. Ahli matematika ini dipilih dengan pertimbangan bahwa keduanya sudah mengajar di Jurusan Matematika FMIPA UM lebih dari 10 tahun dan menekuni bidang Aljabar serta Kalkulus. Selain itu, Dr. Hery Susanto, M.Si adalah dosen pembimbing untuk peserta Olimpiade Matematika Internasional sehingga mempunyai banyak pengalaman mengenai konstruksi soal yang baik. Berdasarkan hasil validasi oleh Dr. Tjang Daniel Chandra, M.Si. diperoleh kesimpulan bahwa soal sudah cukup baik dan layak digunakan baik dari aspek kesesuaian materi dengan

masalah, aspek konstruksi soal, maupun aspek bahasa. Berdasarkan hasil validasi oleh Dr. Hery Susanto, M.Si juga diperoleh kesimpulan bahwa soal sudah cukup baik tetapi ada beberapa revisi yang disarankan, yaitu:

- (1) Rumusan soal: “*Diketahui ..... Jika ..., buktikan maka ...*” direvisi menjadi “*Diketahui ... injektif. Buktiakan bahwa ...*”
- (2) Pada petunjuk diberi waktu untuk klarifikasi istilah. Hal ini untuk mengantisipasi adanya istilah yang tidak dipahami mahasiswa.
- (3) Dalam konteks aljabar abstrak, maka *gof* pasti terdefinisi.

Ahli pendidikan matematika dalam penelitian ini adalah Dr. I Nengah Parta, M.Si. Pemilihan Dr. I Nengah Parta, M.Si. sebagai validator bidang pendidikan matematika didasarkan pada alasan sudah mengabdi di Jurusan Matematika FMIPA UM lebih dari 10 tahun dan doktor di bidang pendidikan matematika. Beberapa saran terkait soal yang diajukan sebagai berikut:

- (1) Cukup mengajukan satu soal karena secara teori proses berpikir untuk soal berbeda dapat berbeda. Dengan satu soal, yang perlu diperluas adalah subjek penelitian untuk mendapatkan proses berpikir yang diinginkan.
- (2) Kalimat “*Jawablah soal berikut dengan benar*” direvisi menjadi “*Selesaikan soal di bawah ini dengan rinci dan jelas*”.
- (3) Perlu disediakan lembar jawaban dan lembar coretan.
- (4) Kalimat “*.... harus mengungkapkan apa yang sedang ...*” direvisi menjadi “*.... mengungkapkan dengan kata-kata apa yang ....*”
- (5) Dicek kembali apakah *gof* pasti terdefinisi.

Revisi terhadap lembar soal dilakukan berdasarkan saran dari validator. Satu hal yang memang masih dapat diperdebatkan adalah terdefinisi tidaknya *gof* jika diketahui  $f$  fungsi dari  $A$  ke  $B$  dan  $g$  fungsi dari  $B$  ke  $C$ . Secara umum, fungsi dari  $A$  ke  $B$  berarti bahwa semua anggota  $A$  selalu dipetakan ke tepat satu anggota  $B$ . Jika mengacu pada definisi ini maka *gof* pasti terdefinisi. Jika mengacu definisi fungsi menurut Bartle dan Sherbert (2000), maka *gof* akan terdefinisi jika  $R(f) \subseteq D(g)$ . Hal ini karena menurut Bartle dan Sherbert, himpunan pertama belum tentu domain atau

belum tentu semua unsur dipetakan. Namun demikian, rumusan soal tidak mengalami perubahan mengingat Bartle dan Sherbert (2000:12) juga mengajukan soal yang sama di dalam latihan bab 1 nomor 20 tanpa menyebut  $R(f) \subseteq D(g)$ .

Instrumen lembar tugas juga diujicobakan kepada mahasiswa untuk melihat kevalidan masalah secara empiris. Mahasiswa diminta untuk membaca lembar tugas dan kemudian peneliti menanyakan apakah mahasiswa dapat memahami masalah yang terdapat di dalam lembar tugas. Selain itu, peneliti meminta kepada mahasiswa untuk menyelesaikan masalah yang ada di lembar tugas dengan tujuan mengecek apakah mahasiswa benar-benar dapat memahami soal.

Pada ujicoba ditemukan seorang mahasiswa menulis semua jawaban tanpa berbicara. Ketika peneliti bertanya mengenai hal tersebut, mahasiswa menjawab bahwa ia harus menulis semua yang dipikirkan berdasarkan perintah “... *mengungkapkan dengan kata-kata ....*” Berdasarkan hal ini maka peneliti mengubah perintah menjadi “.... *mengungkapkan secara lisan ....*”. Untuk aspek yang lain dari lembar soal yang diajukan tidak ada masalah. Lembar soal dapat dilihat pada Lampiran 1.

#### **D. Prosedur Pengumpulan Data**

Pengumpulan data dilakukan dengan memberikan masalah (lembar tugas) kepada mahasiswa untuk diselesaikan. Mahasiswa diminta untuk mengungkapkan secara lisan semaksimal mungkin apa yang dipikirkan selama proses pembuktian. Peneliti merekam semua ungkapan verbal dan mencatat perilaku mahasiswa selama

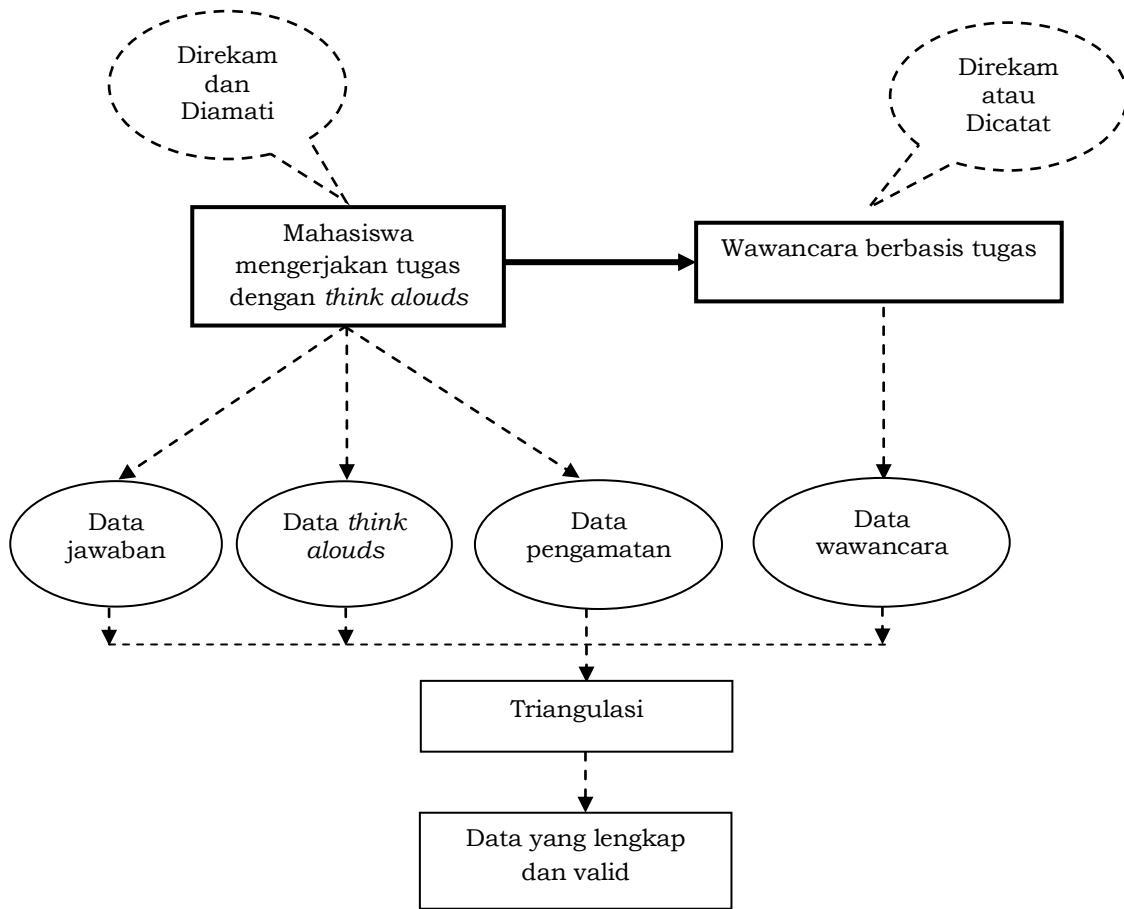
menyelesaikan masalah. Pengumpulan data semacam ini tergolong dalam metode *think out loud* atau *talk aloud* (Iannone & Nardi, 2006:2301) atau *think alouds* (Rodriguez & Gutierrez, 2006:436; Samkoff, dkk., 2012). Metode ini dilakukan dengan meminta subjek penelitian menyelesaikan masalah sekaligus menuliskan atau menceritakan proses berpikirnya. Dua hal penting dalam *think alouds* ini adalah (1) mahasiswa menuliskan atau menceritakan proses berpikirnya selama menyelesaikan tugas dan (2) mahasiswa mengungkapkan apa yang benar-benar mereka pikirkan saat menyelesaikan tugas.

Mahasiswa yang menggunakan strategi semantik dalam menyelesaikan masalah pembuktian ditetapkan sebagai subjek penelitian. Kepada subjek penelitian ini selanjutnya dilakukan wawancara berbasis tugas berkaitan dengan hasil pembuktian. Peneliti menggunakan wawancara tidak terstruktur untuk mengungkap lebih dalam proses berpikir yang dilakukan mahasiswa selama proses pembuktian yang tidak terungkap pada proses *think alouds*.

Wawancara ini dilakukan untuk menguji kekokohan data sekaligus untuk melengkapi kekurangan data yang terdapat dalam proses *think alouds* yang dilakukan mahasiswa. Hal ini dilakukan karena metode *think alouds* memiliki keterbatasan, yaitu (1) kesulitan untuk mengungkap proses berpikir mahasiswa yang tidak mampu mengutarakan proses berpikirnya secara verbal, (2) keterbatasan mahasiswa untuk mengingat apa yang dapat diingat, dan (3) kesulitan mahasiswa untuk menjelaskan perilakunya sendiri.

Wawancara secara garis besar diarahkan untuk mengetahui apa yang sedang dipikirkan mahasiswa ketika menyimpulkan sesuatu atau mengambil suatu langkah.

Pertanyaan dapat berupa “bagaimana Anda memikirkan ini?” atau “apa yang Anda pikirkan saat ini?” Pertanyaan juga diajukan untuk mengetahui alasan mahasiswa ketika menggunakan langkah berpikir di luar dunia formal. Posisi wawancara terhadap metode *think alouds* dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 3.2 Proses Pengumpulan Data**

## E. Analisis Data

Creswell (2010:276-283) menjelaskan langkah-langkah analisis data kualitatif terdiri dari 6 langkah dimulai dari mengolah dan mempersiapkan data sampai pada menginterpretasi atau memaknai data. Keenam langkah tersebut tidak mutlak harus

berurutan dan memungkinkan adanya modifikasi. Mengacu pada 6 langkah tersebut, proses analisis data dalam penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- (1) Mempersiapkan data dengan mentranskrip semua data yang terkumpul.
- (2) Membaca keseluruhan data dengan menelaah seluruh data yang terkumpul, yaitu dari hasil *think out loud*, wawancara, pengamatan yang sudah dituliskan dalam catatan lapangan, dan hasil jawaban mahasiswa dalam pembuktian.
- (3) Mereduksi data dengan memilih, memusatkan, menyederhanakan, mengabstraksi, dan mentransformasi data yang muncul dalam transkrip (Miles & Huberman, 1994:10).
- (4) Menganalisis lebih detail dengan menetapkan satuan dan *coding* data.
- (5) Menggambarkan skema berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti.
- (6) Menganalisis proses berpikir berdasarkan kategori yang ditetapkan.
- (7) Menganalisis hal-hal yang unik dan menarik.
- (8) Menarik kesimpulan.

Secara ringkas langkah analisis data dapat dijelaskan sebagai berikut. Data yang terkumpul ditranskrip dan ditelaah. Telaah ini untuk memahami data dan untuk menentukan data yang harus direduksi. Data tereduksi selanjutnya disajikan dalam lembar protokol menjadi satu rangkaian proses berpikir dari awal memulai menyusun bukti sampai selesai menghasilkan bukti yang diinginkan. Data dianalisis dengan melihat dari 2 (dua) aspek yaitu pernyataan dan sumber pernyataan.

Aspek pernyataan dikategorikan menjadi 4 (empat) yaitu (1) berpikir wujud, (2) berpikir wujud-simbolik, (3) berpikir simbolik, dan (4) berpikir formal. Satuan

dan *coding* yang ditetapkan untuk aspek pernyataan dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 3.1 dan *coding* untuk komponen berpikir dapat dilihat pada Tabel 3.2.

**Tabel 3.1 Satuan dan Coding untuk Aspek Pernyataan**

Satuan	Pengertian	Kode
Berpikir Wujud	Berpikir yang melibatkan penggunaan objek konkret, gerakan, dan gambar baik secara nyata maupun sekedar dibayangkan berdasarkan bayangan konsep.	Em
Berpikir Wujud-Simbolik	Berpikir yang melibatkan visualisasi perpaduan antara gambar dan simbol, seperti garis bilangan, diagram, atau grafik baik secara nyata akan sekedar dibayangkan	EmSim
Berpikir Simbolik	Berpikir yang melibatkan penggunaan simbol (huruf atau angka) atau manipulasi simbol-simbol yang bersifat khusus atau generik dalam bentuk contoh baik secara nyata atau sekedar dibayangkan.	Sim
Berpikir Formal	Berpikir yang melibatkan penggunaan definisi konsep dan sistem deduktif aksiomatis.	For

**Tabel 3.2 Komponen Proses Berpikir**

Istilah	Kode
Anggota	A
Fungsi	F
Fungsi Injektif	I
Fungsi Komposisi	K
Wujud Anggota	Em(A)
Wujud Fungsi	Em(F)
Wujud Fungsi Injektif	Em(I)
Wujud Fungsi Komposisi	Em(K)
Wujud-Simbolik Anggota	EmSim(A)
Wujud-Simbolik Fungsi	EmSim(F)
Wujud-Simbolik Fungsi Injektif	EmSim(I)
Wujud-Simbolik fungsi Komposisi	EmSim(K)
Simbolik Anggota	Sim(A)
Simbolik Fungsi	Sim(F)
Simbolik Fungsi Injektif	Sim(I)
Simbolik Fungsi Komposisi	Sim(K)
Formal Anggota	For(A)
Formal Fungsi	For(F)
Formal Fungsi Injektif	For(I)
Formal Fungsi Komposisi	For(K)

Aspek sumber dikategorikan menjadi 5 (lima) yaitu (1) mengingat, (2) mengonkretkan, (3) menyimpulkan, (4) mengekstrak makna, dan (5) lainnya. Satuan

dan *coding* yang ditetapkan untuk aspek sumber pernyataan dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 3.3.

**Tabel 3.3 Satuan dan Coding untuk Aspek Sumber Pernyataan**

Satuan	Pengertian	Kode
Mengingat ( <i>recalling</i> )	Pernyataan diperoleh sebagai akibat/implikasi tidak langsung dari pernyataan sebelumnya tetapi muncul sebagai hasil mengingat.	Rec
Mengonkretkan ( <i>concreting</i> )	Pernyataan diperoleh dengan cara mewujudkan berpikir formal ke dalam berpikir wujud atau simbolik.	Con
Menyimpulkan ( <i>Inferring</i> )	Pernyataan diperoleh sebagai akibat/implikasi langsung dari pernyataan sebelumnya mengikuti aturan logika	Inf
Mengekstrak makna ( <i>extract meaning</i> )	Pernyataan diperoleh dari pernyataan sebelumnya dengan cara mengekstrak makna definisi konsepnya.	Ext
Lainnya ( <i>Other</i> )	Pernyataan yang diperoleh selain 4 kategori sebelumnya	Oth

Selanjutnya, proses berpikir dikategorikan berdasarkan tujuan penggunaan berpikir non formal (wujud, simbolik, atau wujud-simbolik). Tiga kategori yang ditetapkan yaitu (1) menemukan definisi konsep, yang dikodekan m-Defi, (2) melakukan refleksi, yang dikodekan m-Refle, dan (3) mencari petunjuk langkah non definisi, yang dikodekan m-Petun. Kategori menemukan definisi konsep dikatakan terjadi jika dalam proses berpikir, mahasiswa menggunakan berpikir non formal untuk menemukan kembali definisi konsep yang diperlukan yang belum dimiliki atau lupa. Kategori melakukan refleksi dikatakan terjadi jika mahasiswa membuat suatu kesimpulan tetapi kemudian merasa ragu dan menggunakan berpikir non formal untuk mengecek kebenaran kesimpulan yang telah dihasilkan. Kategori mencari petunjuk langkah non definisi dikatakan terjadi jika mahasiswa menggunakan berpikir non formal untuk membuat kesimpulan atau subkesimpulan yang dapat menuntun langkah pembuktian.

Terakhir, hasil pembuktian juga dikodekan dengan dua kategori yaitu (1) benar sempurna yang dikodekan BS dan (2) benar tidak sempurna yang dikodekan BtS. Bukti dikatakan benar sempurna jika bukti ini lengkap dan mengikuti aturan logika predikat. Bukti dikatakan benar tidak sempurna jika bukti ini secara substansial langkahnya sudah benar tetapi terdapat kekurangan atau kelemahan dalam penyajiannya.

#### **F. Pengecekan Keabsahan Temuan**

Untuk menjaga reliabilitas dan validitas hasil penelitian, peneliti mengikuti beberapa prosedur yang disarankan dalam Creswell (2010:285-286). Prosedur reliabilitas yang dilakukan peneliti antara lain (a) mengecek hasil transkrip data untuk memastikan tidak ada kesalahan selama proses transkrip, (b) memastikan tidak ada definisi atau makna yang mengambang selama proses *coding*, dan (c) melakukan *cross-check* atau membandingkan kode-kode yang dibuat peneliti dengan kode-kode yang dibuat peneliti lain, terutama dengan penelitian Samkoff, dkk. (2012).

Prosedur validitas yang digunakan adalah melakukan triangulasi yang merupakan prosedur validitas yang paling umum dan mudah dipakai (Creswell, 2010:286). Triangulasi dapat dimaknai sebagai kombinasi berbagai metode atau sumber data dalam suatu penelitian (Taylor & Bogdan, 1984:68). Menurut Bogdan & Biklen (1998:104), triangulasi dimaknai sebagai verifikasi data. Triangulasi dapat berupa penggunaan berbagai teknik pengumpulan data seperti wawancara, pengamatan, dan dokumen resmi yang disebut triangulasi metode (Miles & Huberman, 1994:267). Dalam penelitian ini digunakan triangulasi metode berupa

penggunaan beberapa teknik pengumpulan data yaitu *think alouds*, wawancara, pengamatan, dan dokumentasi.

## **G. Tahap-tahap Penelitian**

Tahap-tahap yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi tahap (1) persiapan, (2) penelitian pendahuluan, (3) pengembangan desain, (4) penelitian sebenarnya, dan (5) penulisan laporan.

### a. Persiapan

Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini antara lain (1) menyempurnakan proposal terutama menfokuskan masalah dan mengembangkan kerangka kerja sebagai dasar mengkaji proses berpikir dalam menyusun bukti, (2) mempersiapkan perangkat pengambilan data terutama instrumen lembar tugas, serta (3) merencanakan proses pemilihan subjek penelitian.

### b. Penelitian Pendahuluan

Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini antara lain (1) pada tanggal 12 Januari 2012, mengeksplorasi semua kemungkinan proses pembuktian yang dilakukan mahasiswa dan mencocokkan dengan teori yang sudah ada dan (2) pada 23-25 Februari 2012, mengeksplorasi alasan mahasiswa ketika menyusun bukti dengan strategi semantik sekaligus mengujicobakan instrumen lembar tugas yang akan digunakan dalam penelitian. Kegiatan ini berfungsi untuk mengecek kekokohan teori yang ada mengenai jalur berpikir mahasiswa ketika menyusun bukti dan menemukan kategori yang sesuai untuk menjelaskan alasan mengapa mahasiswa menggunakan strategi semantik.

c. Pengembangan desain

Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini antara lain (1) melakukan validasi instrumen, (2) mendesain proses pengambilan data, (3) menetapkan kategori dan pengkodean, dan (3) menyiapkan format lembar soal (LS), lembar jawaban (LJ), dan lembar coretan (LC). Kegiatan ini dilakukan pada Februari-Nopember 2012.

d. Penelitian Sebenarnya

Waktu untuk pengambilan data dilakukan berdasarkan kesepakatan antara peneliti dan mahasiswa calon subjek penelitian. Pada saat pengambilan data, peneliti melakukan pengamatan dan mencatat semua kegiatan mahasiswa saat menjawab soal. Alat perekam audio juga digunakan sebagai instrumen pembantu. Proses perekaman tidak diketahui oleh calon subjek penelitian. Pengambilan data berlangsung dalam dua tahap, yaitu *think alouds* saat mahasiswa mengerjakan lembar tugas dan wawancara berbasis tugas untuk mahasiswa yang menggunakan strategi semantik. Penelitian sebenarnya dilakukan mulai Nopember 2012 sampai Oktober 2013.

e. Penulisan Laporan

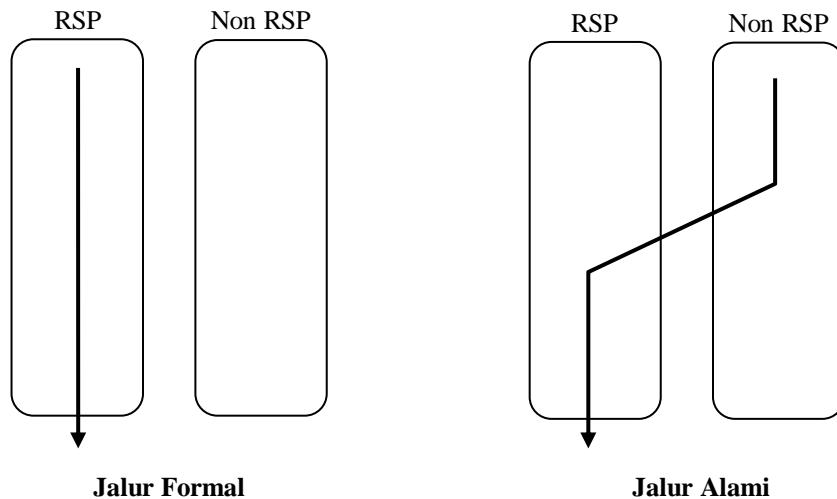
Setelah dilakukan analisis data dan diperoleh hasil penelitian, maka peneliti/penulis melanjutkan dengan menulis laporan penelitian.

## **BAB V**

### **PEMBAHASAN**

#### **A. Jalur Berpikir dalam Menyusun Bukti**

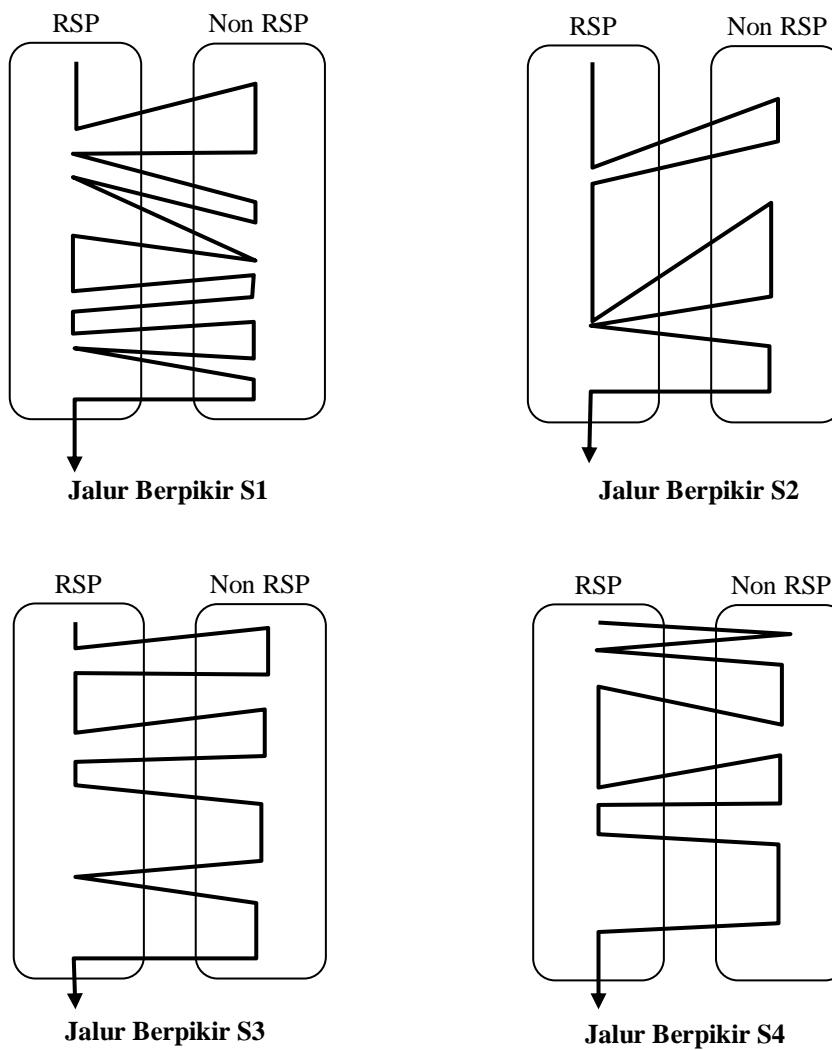
Literatur pertama yang membahas jalur/rute berpikir mahasiswa ketika menyusun pembuktian adalah hasil penelitian Pinto (1998). Pinto menyimpulkan terdapat dua jalur berpikir dalam pembuktian, yaitu jalur alami dan jalur formal. Jalur alami bermula dunia wujud, simbolik, atau gabungan keduanya dan membentuk jaringan dengan bayangan mental selama proses menerjemahkan bayangan mental menjadi bukti formal. Jalur formal sepenuhnya bekerja dalam dunia formal. Jika digambarkan dalam kerangka RSP dan non RSP, maka kemungkinan jalur menyusun bukti menurut Pinto sebagai berikut.



**Gambar 5.1 Jalur Pembuktian Menurut Pinto (1998)**

Pemilihan jalur berpikir dalam menyusun bukti menjadi alami dan formal belum mewakili semua jalur berpikir. Berdasarkan data penelitian ini, diperoleh

bahwa semua subjek penelitian tidak menempuh jalur alami atau menempuh jalur formal. Semua subjek dalam penelitian ini bekerja pertama kali di dalam RSP dan selanjutnya keluar dari RSP yang pada akhirnya kembali lagi ke RSP. Jalur berpikir yang ditempuh subjek penelitian ini tidak dapat dikategorikan sebagai jalur alami atau jalur formal.



**Gambar 5.2 Jalur Berpikir Subjek Penelitian**

Mengacu pada definisi produksi bukti sintaksis dan produksi bukti semantik (Weber & Alcock, 2004; Weber, 2004a) atau definisi pendekatan referensial dan pendekatan sintaksis (Alcock & Weber, 2005, 2008) maka jalur berpikir semua subjek dalam penelitian ini tidak termasuk pada semua kategori tersebut. Pertama, semua subjek tidak memulai proses pembuktian dari non RSP sementara definisi produksi bukti semantik atau pendekatan referensial mensyaratkan pertama kali harus berawal dari non RSP. Kedua, semua subjek menggunakan non RSP untuk menuntun langkah pembuktian sementara definisi produksi bukti sintaksis atau pendekatan sintaksis mensyaratkan proses pembuktian seluruhnya berada dalam RSP.

Data penelitian ini menunjukkan kesesuaian dengan pendapat Alcock & Inglis (2008) bahwa semua proses pembuktian dimulai dari RSP. Walaupun ada perbedaan mendasar antara definisi strategi semantik menurut Alcock dan Inglis (2008) dengan definisi strategi semantik dalam penelitian ini ternyata semua subjek dalam penelitian ini memulai pembuktian dari dalam RSP. Perbedaan mendasar itu adalah proses berpikir dihitung sejak mahasiswa membaca soal meskipun belum melakukan pembuktian (menurut Alcock & Inglis, 2008) sedangkan dalam penelitian ini dihitung sejak mahasiswa membaca soal dan mulai melakukan pembuktian.

Kenyataan bahwa semua subjek dalam penelitian ini memulai pembuktian dari RSP dan selanjutnya keluar dari RSP bukanlah fakta yang cukup untuk menyetujui pendapat Alcock & Inglis. Fakta lain yang diperoleh oleh peneliti menunjukkan sebanyak 12 mahasiswa dari 19 mahasiswa yang menggunakan strategi semantik saat mengerjakan masalah pembuktian dalam penelitian ini memulai dari luar RSP.

Mahasiswa ke-14 (M14) yang sempat diminta mengerjakan masalah dalam penelitian ini merupakan salah satu mahasiswa yang memulai pembuktian dari luar RSP. Berikut proses pembuktian M14.

M14 : [Setelah membaca soal] ... boleh memakai gambar, Pak?

P : Bebas, terserah.

M14 : Misal ini (himpunan A) memuat a, b, c. Ini (himpunan B) memuat 1, 2. Ini (himpunan C) memuat a, b, c. a ke 1, b ke 1, c ke 2 (fungsi f). 1 ke a, 2 ke b (fungsi g). saya ingin melihat kalau ini (f) surjektif, dan ini (g) injektif. Berarti  $gof(a) = g(f(a)) = \dots$  a lagi. Tidak enak. [Sambil menggambar di LC]. [Pindah ke LJ, dan sambil menggambar] Himpunan A, memuat 1, 2, 3. B memuat a, b, c, d. Himpunan C memuat e, f, g, h. Ini f, ini g, dan ini gof. Saya akan mencoba kalau f surjektif dan g injektif. Misal 1 ke a, 2 ke b dan 3 ke b juga. a ke e, b ke g, c ke f, dan d ke g. Hmm... f belum surjektif. Perlu tambah 0 disini, ke c. Berarti d dihapus. Maka f sudah surjektif. g injektif. Maka ..... *gof tidak injektif*.

Berarti 3 saya hapus, maka f sekarang injektif. fungsi g injektif. *Diperoleh gof injektif*.

Kalau d ada lagi, seandainya h tidak ada, maka g sekarang surjektif. *Maka gof tetap injektif*. Benar bahwa jika gof injektif, maka f harus injektif, tidak terpengaruh fungsi g.

*Diperoleh*

$$gof(0) = f \quad f(0) \text{ nya } c$$

$$gof(1) = e \quad f(1) = a$$

$$gof(2) = g \quad f(2) = b.$$

Jadi gof injektif maka f juga harus injektif. Ketika gof injektif, f harus injektif. Kalau f surjektif dan g injektif seperti tadi, gof tidak injektif. Saya pakai gambar tadi, misal f surjektif dan g injektif [Menyalin gambar dari LC]. Maka gof tidak injektif. Sehingga gof akan injektif ketika f injektif.

Dari kedua gambar di atas dapat disimpulkan bahwa ketika diberi f surjektif maka gof tidak injektif dan ketika f injektif maka gof injektif sehingga terbukti bahwa ketika gof injektif maka f juga harus injektif [menulis di LJ]. Tidak terpengaruh g injektif atau surjektif. Sudah, pak.

Dari data tersebut jelas bahwa M14 bekerja di luar RSP. M14 membuktikan bahwa jika *gof* injektif, maka *f* haruslah injektif melalui gambar. Meskipun hasil pekerjaan M14 ini bukanlah bukti yang diinginkan, namun proses berpikir M14 sudah dapat dikategorikan berada di luar RSP. Berdasarkan fakta ini, maka tidak selamanya proses pembuktian bermula dari RSP.

Lebih lanjut mengenai kasus M14 ada hal menarik yang dapat dibahas berkaitan dengan permulaan berpikir dalam menyusun bukti. Berikut petikan wawancara berbasis tugas selanjutnya.

P : Menurut M14, apakah ini sudah termasuk membuktikan dalam matematika?

M14 : Kalau itunya ... belum pak. Karena langkah-langkahnya kurang ... bukan seperti ini. Tapi .... kadang kita harus .... misalnya tidak harus matematika kita bisa memanipulasi, seperti ini.

P : Apakah M14 bisa membuktikan secara matematika itu?

M14 : Lupa, Pak. Kalau secara matematika itu, kadang kayak simbol untuk setiap itu ... kalau tidak simbolnya kayak ini, Pak.

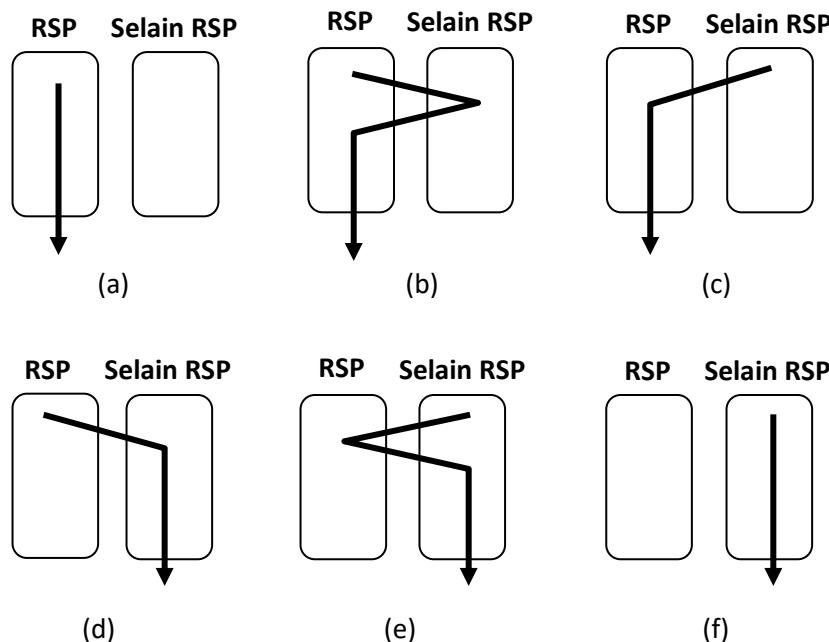
M14 membaca soal dengan cepat tanpa sempat berpikir sesuatu mengenai yang diketahui dan yang ditanyakan. Setelah membaca soal, M14 diam sejenak dan langsung bertanya “... *boleh memakai gambar, Pak?*” Pada saat pertanyaan ini diajukan, penulis mengira M14 mau menggunakan gambar untuk proses berpikirnya, bukan sebagai bukti. Ketika dijawab terserah, maka M14 langsung membuat gambar sebagai bukti. Ternyata M14 menggunakan gambar sebagai bukti karena M14 tidak mampu menyusun bukti secara formal. M14 merasa bahwa bukti yang diminta tidak harus matematis sebagaimana komentarnya ”.... *misalnya tidak harus matematika kita bisa memanipulasi seperti ini*”.

Dari petikan wawancara terlihat bahwa M14 menyadari yang dilakukan belum termasuk bukti dan bahwa bukti matematis itu melibatkan simbol-simbol. Data ini menunjukkan bahwa konsepsi bukti M14 sudah benar tetapi M14 tidak mampu berpikir dalam dunia formal untuk menyusun bukti tersebut. Karena M14 tidak mampu menyusun bukti formal yang sesuai RSP, maka M14 menggunakan berpikir di luar RSP dengan berpikir wujud-simbolis menggunakan diagram. Dengan

demikian, maka M14 belum sempat bekerja di dalam RSP bahkan sejak membaca soal itu sendiri untuk menyusun bukti yang diminta.

Pendapat Alcock dan Inglis (2008) bahwa semua proses berpikir dalam pembuktian selalu bermula dari RSP bertentangan dengan teori dan fakta di lapangan. Jika semua proses pembuktian berawal dari RSP, maka bertentangan dengan definisi jalur alami (Pinto, 1998), produksi bukti semantik (Weber & Alcock, 2004; Weber, 2004a), dan pendekatan referensial (Alcock & Weber, 2005). Alcock dan Inglis (2008) menyatakan sekedar telah membaca soal saja dapat dikategorikan sudah berpikir dalam RSP. Dalam penelitian ini, M14 telah membaca soal dan mengetahui bahwa bukti yang disusun harus formal tetapi M14 tidak mampu bekerja secara formal sehingga pembuktian dimulai dari luar RSP. Adakalanya setelah membaca soal, mahasiswa tidak mengetahui sama sekali harus bekerja dari mana sehingga tidak bekerja apa-apa. Kasus ini terjadi pada subjek bernama Andy pada penelitian Alcock yang diungkap kembali oleh Weber dan Mejia-Ramos (2009).

Definisi penulis mengenai strategi semantik dan strategi sintaksis yang mengharuskan mahasiswa sudah membaca soal dan memulai pembuktian memungkinkan enam jalur berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti. Keenam jalur yang dapat ditempuh ini adakalanya sampai pada bukti yang diinginkan dan adakalanya gagal. Menggunakan kerangka RSP dan luar RSP maka keenam jalur ini dapat dilihat pada Gambar 5.3. Jalur (a) adalah strategi sintaksis dan lainnya adalah strategi semantik. Jalur (a), (b), dan (c) adalah jalur yang berhasil menghasilkan bukti sedangkan jalur (d), (e), dan (f) adalah jalur yang gagal menghasilkan bukti. Jalur (c), (d), dan (e) menghasilkan “bukti” tetapi bukan bukti yang diinginkan.



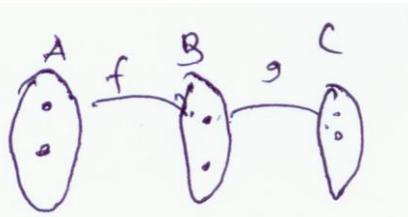
**Gambar 5.3 Jalur Berpikir dalam Pembuktian**

Walaupun semua subjek yang dipaparkan dalam penelitian ini cenderung pada jalur (b), hal ini sudah mewakili semua kasus perpindahan yang terjadi. Perbedaan antara jalur (b), (c), (d), dan (e) hanya terletak pada titik permulaan pembuktian dan hasil akhir pembuktian. Proses yang terjadi di dalamnya adalah sama, yaitu menemukan definisi, mencari petunjuk, dan melakukan refleksi.

Awal proses berpikir yang ditetapkan setelah membaca soal dan memulai pembuktian ternyata masih perlu didiskusikan lebih lanjut. Pada pengambilan data penelitian ini, ada mahasiswa yang sudah mulai berpikir mengenai pembuktian saat membaca soal. M10 adalah mahasiswa yang juga diminta untuk menjawab soal dalam penelitian ini. Namun demikian, M10 tidak menjadi subjek penelitian karena proses pembuktian yang dilakukan termasuk strategi sintaksis. Proses pembuktian yang dilakukan M10 semuanya berada dalam kerangka berpikir formal yaitu berdasar

pada definisi konsep. Hal yang menarik dari M10 adalah ia sempat berpikir wujud-simbolik pada saat membaca soal.

Ketika membaca soal bahwa  $f$  fungsi dari  $A$  ke  $B$  dan  $g$  fungsi dari  $B$  ke  $C$ , M10 langsung membuat diagram panah fungsi  $f$  dan  $g$  di Lembar Coretan. M10 pertama kali menggambar diagram panah fungsi  $f$  dan dilanjutkan dengan fungsi  $g$ . Berikut gambar yang dibuat M10.



**Gambar 5.4 Diagram Panah Fungsi  $gof$  yang Dibuat M10**

Pada tahap ini, M10 sudah mulai berpikir wujud-simbolik. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  dan  $g: B \rightarrow C$  dipikirkan secara wujud-simbolik untuk mendapatkan fungsi  $gof$ . Selanjutnya M10 kembali ke Lembar Soal untuk membaca soal selanjutnya.

Setelah selesai membaca soal, M10 mengambil Lembar Jawaban menutupi Lembar Coretan yang memuat diagram fungsi  $f$  dan  $g$ . M10 berpikir mengenai yang diketahui yaitu fungsi  $f$  dari  $A$  ke  $B$ , fungsi  $g$  dari  $B$  ke  $C$  dan fungsi  $gof$ . M10 dapat mengekstrak makna bahwa  $gof(x) = g(f(x))$ . M10 mengkoordinasikan secara formal modal yang dimiliki untuk membuat kesimpulan bahwa  $gof$  fungsi dari  $A$  ke  $C$ .

Selanjutnya M10 berpikir formal mengenai definisi konsep fungsi injektif dan menyatakannya dengan benar serta mengaplikasikan definisi konsep fungsi injektif pada fungsi  $gof$ . Meskipun demikian, definisi konsep fungsi injektif yang dinyatakan M10 berbeda dengan beberapa definisi dalam buku. M10 mendefinisikan fungsi injektif sebagai berikut.

M10 : Fungsi injektif itu, misalkan  $x_1, x_2$  di  $A$  dan  $y$  di  $B$ . Jika  $f(x_1) = y$  dan  $f(x_2) = y$  maka  $x_1 = x_2$ . Karena  $gof$  injektif maka untuk setiap  $x_1$  dan  $x_2$  di  $A$ , jika  $gof(x_1) = z$  dan  $gof(x_2) = z$ , maka  $x_1 = x_2$ .

Perbedaan yang dimaksud disini adalah pernyataan “ $f(x_1) = y$  dan  $f(x_2) = y$ ” yang pada umumnya cukup dinyatakan  $f(x_1) = f(x_2)$ . Meskipun secara simbolik hal ini berlebihan tetapi memperkuat makna yaitu  $x_1$  dan  $x_2$  sama-sama dipetakan ke  $y$ .  $y$  menjadi unsur tunggal peta dari  $x_1$  dan  $x_2$  oleh  $f$ . Sehingga dapat diduga bahwa definisi konsep yang dinyatakan M10 ini bersifat wujud-formalis, yaitu definisi konsep yang dilandasi oleh berpikir wujud.

Menggunakan definisi konsep fungsi injektif, M10 mengambil sebarang  $x_1$  dan  $x_2$  di  $A$  dengan  $f(x_1) = f(x_2)$  di  $B$ . Karena  $g$  fungsi dari  $B$  ke  $C$ , M10 menyimpulkan bahwa  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  di  $C$ . Karena  $gof(x) = g(f(x))$ , maka M10 menyimpulkan bahwa  $gof(x_1) = gof(x_2)$ . Karena diketahui bahwa  $gof$  injektif, maka M10 menyimpulkan bahwa  $x_1 = x_2$ . Hasil ini menunjukkan bahwa  $f$  adalah fungsi injektif.

Berikut hasil akhir pembuktian yang dihasilkan M10.

$$\begin{aligned}
 & f(x_1) = f(x_2) \\
 & \text{Karena } g \text{ fungsi maka} \\
 & g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\
 & gof(x_1) = gof(x_2) \\
 & \text{Karena } gof \text{ injektif maka} \\
 & x_1 = x_2 \\
 & \text{Sehingga } f \text{ injektif}
 \end{aligned}$$

**Gambar 5.5 Bukti yang Dihasilkan M10**

Semua proses berpikir dari pengambilan  $x_1$  dan  $x_2$  di  $A$  sampai pada kesimpulan  $x_1 = x_2$  berlangsung dalam berpikir formal. Langkah demi langkah berpikir yang dilakukan M10 berdasarkan pada definisi atau fakta yang sudah diketahui benar secara formal sebelumnya. Dengan demikian, maka proses pembuktian yang dilakukan M10 termasuk ke dalam strategi sintaksis meskipun pada saat membaca soal sempat menggunakan diagram.

Hal yang mengejutkan terjadi ketika penulis bertanya mengenai diagram yang dibuat M10 saat membaca soal.

- P : Ini (menunjuk pada diagram) untuk apa?  
M10 : untuk ini (menunjuk pada kesimpulan  $gof: A \rightarrow C$ ), pak.  
P : “untuk ini” itu maksudnya apa?  
M10 : Melihat  $gof$  dari mana ke mana.

Berdasarkan dialog tersebut terlihat bahwa M10 sudah menggunakan berpikir wujud-simbolis (luar RSP) untuk membantunya menyimpulkan domain dan kodomain fungsi  $gof$ . M10 sudah mulai memikirkan hal-hal yang dibutuhkan dalam pembuktian sejak membaca soal. Kasus M10 ini semakin menguatkan dugaan bahwa saat membaca soal belum tentu mahasiswa berpikir di dalam RSP. Kasus M10 ini bertentangan dengan pendapat Alcock dan Inglis (2008) bahwa proses berpikir dalam pembuktian selalu dimulai dalam RSP meskipun sekedar membaca soal. Meskipun demikian, kasus M10 ini juga membuka hal baru bahwa proses berpikir dapat terjadi sejak membaca soal. Hal ini membutuhkan kajian teori dan penelitian lebih lanjut untuk menetapkan sejak kapan seharusnya proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti mulai diperhitungkan.

## B. Terjadinya Strategi Semantik dalam Menyusun Bukti

Strategi semantik dalam penelitian ini dikategorikan menjadi tiga, yaitu (1) menemukan definisi konsep, (2) melakukan refleksi, dan (3) mencari petunjuk langkah. Berdasarkan hasil penelitian ini, tidak ada subjek penelitian atau mahasiswa lain yang diminta mengerjakan masalah pembuktian dalam penelitian yang keluar dari tiga kategori tersebut.

Ketiga kategori terjadi karena faktor yang berbeda tetapi proses yang terjadi di dalamnya memiliki kesamaan. Kategori (1) terjadi karena struktur kognitif yang tidak lengkap sedangkan kategori (2) dan (3) terjadi pada saat struktur kognitif sudah lengkap tetapi tidak mampu (atau tidak mau) mengkoordinasikannya secara formal untuk mencapai kesimpulan. Kesamaan yang dimiliki adalah mahasiswa menemukan makna baru setelah melakukan serangkaian kegiatan aksi, proses, objek, dan skema ketika sedang berada di luar dunia berpikir formal (di luar RSP).

Strategi semantik kategori menemukan definisi konsep terjadi karena terdapat komponen penting yang dibutuhkan dalam proses pembuktian yang tidak dimiliki subjek dalam struktur kognitifnya. Komponen penting ini berupa definisi konsep fungsi injektif yang tidak dapat dihasilkan dari sekedar mengkoordinasikan komponen lain yang sudah ada secara formal. Dorongan kuat untuk menemukan definisi konsep ini terjadi karena definisi konsep sangat diperlukan dalam proses pembuktian yang tanpa adanya definisi konsep ini menyebabkan pembuktian tidak dapat dilakukan. Dalam hal ini nampak bahwa dorongan mencari definisi konsep dipengaruhi keyakinan bahwa bukti harus bersifat deduktif.

Proses menemukan definisi konsep terjadi dengan berpikir wujud-simbolik.

Bayangan konsep fungsi injektif digunakan untuk membuat contoh spesifik berupa diagram panah. Contoh spesifik ini dipandang sebagai contoh generik yang mewakili fungsi injektif. Contoh generik ini berfungsi sebagai prototip fungsi injektif yang mampu mengonkretkan sesuatu yang seringkali tidak muncul dalam penyajian fungsi injektif secara formal.

Aksi fisik dan mental dilakukan pada contoh spesifik ini melalui berpikir wujud-simbolik untuk mengekplorasi sifat fungsi injektif. Aksi ini kemudian diinteriorisasi menjadi proses dengan menangkap suatu makna dari aksi. Proses ini selanjutnya digeneralisasi menjadi suatu entitas berpikir formal yang didasarkan pada berpikir wujud-simbolik menjadi definisi konsep fungsi injektif. Dalam hal ini proses telah dienkapsulasi menjadi objek, yaitu definisi konsep fungsi injektif.

Definisi konsep fungsi injektif ini selanjutnya menjadi landasan operasional untuk melakukan pembuktian. Definisi jika  $x, y \in A$  dengan  $f(x) = f(y)$  maka  $x = y$  atau jika  $x, y \in A$  dengan  $x \neq y$  maka  $f(x) \neq f(y)$  selain berfungsi sebagai konsep juga berfungsi sebagai prosedur yang harus diikuti untuk membuktikan suatu fungsi sebagai fungsi injektif. Mengacu pada Gray dan Tall (1994) maka definisi formal fungsi injektif dapat disebut sebagai prosep (prosedur dan konsep).

Satu hal penting yang sangat mendukung suksesnya menemukan definisi konsep ini adalah ide kunci yang dijadikan landasan untuk melakukan aksi. Ide kunci dalam kasus S1 adalah  $a \neq b$  di  $A$  sedangkan dalam kasus S4 ide kuncinya adalah  $f(x) = f(y)$  di  $B$ . Ide kunci inilah yang membantu S1 dan S4 menemukan definisi konsep

fungsi injektif. Hal ini mendukung pendapat Raman (2003) mengenai pentingnya ide kunci dalam proses pembuktian.

Strategi semantik kategori melakukan refleksi terjadi karena proses membuat kesimpulan yang spontan (menebak) yang tidak didasarkan pada koordinasi secara formal antara komponen struktur kognitif yang dimiliki. Komponen yang diperlukan dalam struktur kognitif untuk membuat kesimpulan sebenarnya sudah lengkap. Tidak adanya landasan formal dalam pengambilan keputusan mendorong subjek untuk melakukan refleksi. Ketidakmampuan mengkoordinasikan secara formal komponen yang ada dalam struktur kognitif mendorong subjek menggunakan berpikir wujud-simbolik untuk melakukan refleksi. Berdasarkan penelitian ini, nampak bahwa dorongan melakukan refleksi terjadi karena kesadaran bahwa kesimpulan yang dibuat hanya berdasarkan tebakan.

Proses refleksi terjadi dengan cara berpikir wujud-simbolik mengenai premis dan kesimpulan. Melalui berpikir wujud-simbolik, subjek melakukan rangkaian aksi untuk menangkap makna dari kegiatan eksplorasi hubungan antara premis dan kesimpulan. Makna yang diperoleh kemudian dicocokkan dengan komponen yang ada dalam struktur kognitif yang dimiliki untuk menentukan kebenaran kesimpulan yang dibuat.

Strategi semantik kategori mencari petunjuk terjadi pada saat komponen yang diperlukan dalam struktur kognitif sudah lengkap tetapi mahasiswa tidak mampu (atau tidak mau) mengkoordinasikan komponen-komponen tersebut untuk menghasilkan kesimpulan (subkesimpulan) secara formal. Ketidakmampuan atau ketidakmauan ini mendorong untuk berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik

dan selanjutnya melakukan aksi (fisik atau mental) untuk memperoleh objek baru dan selanjutnya diambil sebagai kesimpulan (subkesimpulan). Subkesimpulan ini menjadi penuntun langkah pembuktian selanjutnya untuk memperoleh kesimpulan akhir.

Proses yang terjadi pada kegiatan mencari petunjuk adalah menggunakan berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik. Dalam berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik ini dilakukan rangkaian aksi fisik atau mental yang selanjutnya diinteriorisai menjadi proses. Proses ini kemudian dienkapsulasi menjadi objek yang diambil sebagai kesimpulan (subkesimpulan). Jadi, landasan berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik telah memberikan petunjuk untuk menghasilkan kesimpulan (subkesimpulan). Subkesimpulan dapat menjadi komponen penting pada proses pembuktian selanjutnya.

Alcock & Inglis (2008:126) menyarankan untuk meneliti bagaimana mahasiswa menerjemah ide dari non RSP kembali ke RSP. Berdasarkan saran ini, maka proses perpindahan dari non RSP ke RSP juga dijelaskan dalam penelitian ini. Proses perpindahan dari dunia berpikir wujud, simbolik, atau wujud-simbolik menuju dunia berpikir formal berlangsung secara berbeda antara kategori strategi semantik yang ada. Pada kasus melakukan refleksi, mahasiswa ke luar dari dunia berpikir formal dalam rangka mengecek kebenaran pernyataan. Mahasiswa berpikir secara wujud-simbolik untuk melihat secara konkret antara premis dan kesimpulan dan melihat hubungan antara keduanya. Hasil dari berpikir wujud-simbolik hanya menjadi penentu apakah kesimpulan yang dibuat benar atau salah. Setelah mengetahui benar atau salahnya kesimpulan, mahasiswa kembali lagi ke dunia formal atau tetap di luar dunia formal untuk mencari bekerja lebih lanjut.

Pada kasus menemukan petunjuk, proses kembali ke dunia formal terjadi setelah mahasiswa mendapatkan objek baru. Ketika mahasiswa sudah mendapatkan objek baru (kesimpulan/subkesimpulan) dari bekerja di luar dunia berpikir formal, objek ini disatukan ke dalam struktur kognitif. Kebenaran objek baru ini diterima dan diyakini berdasarkan wujud konkretnya di luar dunia bepikir formal. Objek baru ini tidak disifati sebagai formal atau tidak. Objek baru ini hanya diperlukan keberadaan dan kebenarannya berdasarkan wujudnya. Objek baru selanjutnya digunakan sebagai komponen yang dapat dipadukan dengan komponen yang lain untuk menarik kesimpulan baru secara formal.

Pada kasus menemukan definisi konsep, proses kembali ke dunia formal terjadi setelah mahasiswa menemukan objek baru. Objek baru yang diperoleh diformulasi sebagai objek formal sebagai definisi konsep. Definisi konsep ini kemudian difungsikan sebagai prosedur untuk bekerja secara formal. Langkah pembuktian selanjutnya didasarkan pada definisi konsep yang diperoleh.

### C. Strategi Semantik Dikaitkan dengan Kesulitan dalam Menyusun Bukti

S2 dan S3 mampu menyatakan definisi konsep fungsi injektif dengan baik sedangkan S1 dan S4 tidak mampu karena lupa definisi konsep fungsi injektif. Mengacu pada Hawro (2007) dan Moore (1994), salah satu penyebab kesulitan dalam menyusun bukti adalah pemahaman konsep yang tidak baik serta tidak dapat menyatakan definisi konsep. Meskipun demikian, S1 dan S4 memiliki bayangan konsep yang sangat memadai. S1 dan S4 menggunakan bayangan konsep untuk membuat contoh spesifik yang berfungsi sebagai contoh generik untuk menemukan

sifat. Contoh spesifik atau generik dapat digunakan untuk mencari pola atau kesamaan sifat untuk merumuskan definisi konsep (Alcock & Inglis, 2008:116) tanpa mengikuti manipulasi aturan logika. Menurut Moore (1994), bayangan konsep yang tidak memadai dan ketidakmampuan (ketidakmauan) mengembangkan contoh dapat menjadi sumber kesulitan dalam menyusun bukti. Sebaliknya, bayangan konsep yang bagus dapat berperan mengonkretkan landasan konseptual yang tidak muncul dalam penyajian formal (Alcock & Simpson, 2004:2).

S1 dan S4 mengembangkan contoh spesifik yang berfungsi sebagai contoh generik. Melalui contoh generik inilah S1 dan S4 melakukan rangkaian aksi, proses, objek, dan skema menghasilkan definisi konsep fungsi injektif. Kemampuan merumuskan definisi konsep dalam bahasa formal matematis menjadi faktor penting kesuksesan menyusun bukti. Ini sesuai dengan (Balacheff, 2010:131) bahwa asal mula mengetahui adalah dalam aksi tetapi prestasi dalam bukti matematis adalah dalam bahasa, yaitu bahasa simbolik matematis mulai level terendah sampai level formal yang digunakan matematisi.

Di awal pembuktian, semua subjek penelitian ini mengalami kesulitan dalam menentukan domain dan kodomain fungsi *gof*. Di saat mereka tidak dapat bekerja secara formal, mereka mengembangkan diagram. Bahkan di setiap menghadapi kesulitan untuk berpikir secara formal, semua subjek menggunakan diagram untuk membantu mereka langkah pembuktian mereka. Fakta ini sesuai dengan Gibson (1998:288) yang menyatakan bahwa mahasiswa sering mengarah pada strategi menggambar diagram ketika menghadapi kesulitan atau macet saat bekerja secara formal.

Semua subjek penelitian ini menggunakan diagram panah sebagai visualisasi fungsi atau fungsi komposisi. Visualisasi adalah proses mewujudkan representasi mental dan untuk kasus fungsi dapat berupa diagram panah (Dreyfus, 2002:31). Diagram panah adalah wujud dari representasi mental di saat seseorang berpikir wujud, wujud-simbolik, atau simbolik. Berpikir wujud-simbolik mengenai fungsi atau fungsi komposisi dalam diagram panah terbukti sangat membantu semua subjek dalam menyelesaikan pembuktian. Hal ini mendukung pendapat (Gibson, 1998:286) dan (Alcock & Simpson, 2004:2) mengenai pentingnya bayangan visual untuk memahami konsep matematika dan menyelesaikan tugas matematika.

Ketidakmampuan atau ketidakmauan menvisualkan bayangan konsep yang dimiliki dapat menjadi sumber kesulitan dalam menyusun bukti.

Menggunakan diagram hampir selalu membantu mahasiswa untuk berhasil menyelesaikan tugas atau subtugas ketika tidak mampu bekerja secara simbolik (Gibson, 1998:301). Meskipun demikian, adakalanya mahasiswa tidak menemukan hubungan antara diagram dengan bukti yang dinginkan karena terjadi kebingungan harus memulai dari mana (Samkoff, dkk., 2012). Alcock dan Simpson (2004) menyatakan bahwa representasi visual dapat berdampak positif atau negatif. Seringkali representasi visual merupakan prototip suatu konsep yang tidak memuat semua properti dari konsep. Hal ini terjadi pada M14 yang memiliki bayangan konsep yang memadai mengenai fungsi injektif dan mampu menvisualkan fungsi injektif ke dalam bentuk diagram tetapi tidak dapat melihat hubungan untuk menemukan definisi konsep fungsi injektif.

Penulis mendorong M14 untuk membuktikan secara formal dengan menanyakan definisi konsep fungsi injektif. Hal ini juga dilakukan untuk mengecek letak kesulitan M14 dalam menyusun bukti.

P : Apa definisi fungsi satu-satu itu? **[Scaffolding]**

M14 : Fungsi 1-1 itu .... Injektif *kan*, Pak. Hmm.... Ini itu tidak harus terfungsikan semua. Cuma fungsinya itu harus 1-1. Jadi kalau di sini ada 3 ke B, maka  $f$  bukan injektif [ambil menunjuk gambar]. Tapi .... tidak harus di sini semua itu habis.

P : Apa benar-benar lupa definisi fungsi 1-1, yang secara simbolik M14 katakan menggunakan untuk setiap itu?

M14 : Lupa, pak.

P : Tadi injektif itu ... kalau di sini berbeda [menunjuk gambar], ... **[Scaffolding]**

M14 : Pasangannya juga berbeda .... [memotong pembicaraan penulis]

P : Secara simbolis? **[Scaffolding]**

M14 : Jika ada ... Jika  $a \neq b$ , maka  $f(a) \neq f(b)$ .

P : Apakah Anda bisa membuktikan secara simbolis itu?

M14 : Saya coba, Pak. [Menulis di LC, karena LJ sudah penuh]

Jika  $a \neq b$ , maka  $f(a) \neq f(b)$  [menulis di LC]

Karena  $gof$  injektif, berarti

$a \neq b$ , maka  $g(f(a)) \neq g(f(b))$  [menulis di LC]

Ini sama dengan

$a \neq b$ , maka  $g(f(a)) \neq g(f(b))$  [menulis di LC]

Hmm.... Fungsi itu kebalikan fungsi satu-satu.

Injektif itu dapat ditulis  $gof(a) = gof(b)$  maka  $a = b$  [menulis di LC]

Kalau fungsi berarti  $g(f(a)) \neq g(f(b))$  maka  $f(a) \neq f(b)$ .

Karena  $g$  fungsi, maka  $f(a) \neq f(b)$ .

Jadi, jika  $a \neq b$ , maka diperoleh  $f(a) \neq f(b)$

Terbukti, Pak.

P : Ternyata bisa membuktikan, mengapa tadi tidak langsung seperti ini?

M14 : Saya lupa ....

Dari dialog tersebut M14 memiliki bayangan konsep yang bagus tetapi tidak dapat menggunakannya untuk mencari kaitan dengan pembuktian yang dilakukan.

Ketika penulis memberi sedikit bantuan, M14 dapat melanjutkan pembuktian dengan baik. Hal ini sesuai pendapat Moore (1994:263) bahwa sering kali mahasiswa

mengalami macet di awal proses pembuktian tetapi ketika diberi bantuan sedikit mereka dapat melanjutkan kembali.

Ada dua hal berkaitan dengan perilaku penggunaan berpikir wujud-simbolik dengan diagram panah oleh semua subjek penelitian ini. Pertama karena mereka mengalami kesulitan ketika berpikir formal dan kedua mereka mengetahui bahwa berpikir di luar formal lebih mudah. Ketika subjek pernah berhasil bekerja dengan gambar, nampak ia lebih cenderung bekerja dengan gambar daripada secara formal. Jadi, mahasiswa menggunakan gambar karena segan untuk terlibat serius berpikir formal atau karena mampu menggunakan bayangan visual secara efektif untuk membangun kaitan yang bagus antara representasi visual dan formal (Alcock & Simpson, 2004).

Kesuksesan dengan berpikir wujud-simbolik yang dilakukan S1 dalam menemukan definisi konsep fungsi injektif mendorongnya menggunakan lagi untuk menuju kesimpulan  $f(x) \neq f(y)$ . Fakta ini menunjukkan bahwa ketika suatu representasi suatu konsep digunakan, perhatian dapat ditujukan pada representasi ini daripada untuk objek abstrak (konsep) (Dreyfus, 2002:32). Berpikir wujud-simbolik dapat mengurangi beban kognitif sehingga S1 berkomentar lebih mudah melihat gambar daripada berpikir abstrak. Hal ini sesuai Samkoff, dkk. (2012:49) bahwa gambar mampu memberikan akses untuk melihat, membandingkan, dan mengintegrasikan potongan informasi dengan usaha kognitif yang lebih rendah daripada ketika informasi yang sama disajikan secara simbolik.

#### D. Implikasi Pembelajaran

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya, strategi semantik dilakukan oleh subjek penelitian ini ketika mengalami kesulitan saat berpikir secara formal. Ketika mahasiswa mengalami kesulitan dalam berpikir formal, mereka menggunakan bayangan konsep untuk mengembangkan contoh spesifik atau contoh generik untuk menemukan hubungan atau sifat. Faktor kesuksesan di sini adalah bayangan konsep yang memadai dan kemampuan menemukan hubungan atau sifat. Problematika dalam bukti tidak dapat dipisahkan dari konstruksi pengetahuan matematika itu sendiri (Balacheff, 2010:132) yaitu kurangnya pemahaman pada konsep (Hawro, 2007) atau lupa definisi konsep (Moore, 1994).

Implikasi pada pembelajaran di kelas adalah pengenalan suatu konsep hendaknya tidak hanya melalui definisi konsep. Konsep perlu dikenalkan dengan baik melalui pengembangan ide-ide yang berkaitan dengan konsep, pengembangan contoh-contoh, dan akhirnya mencapai definisi konsep. Mahasiswa dapat didorong untuk menganalisis contoh yang diberikan atau contoh yang dibuat sendiri untuk membantu memperdalam pemahaman konsep dan memfasilitasi penemuan bukti (Hawro, 2007). Dengan demikian, mahasiswa akan memiliki pemahaman konseptual yang baik (Capraro, dkk., 2010) sebagai modal untuk menyelesaikan pembuktian (Gibson, 1998).

Praktik pembuktian yang dilakukan dosen dalam pembelajaran di kelas hendaknya juga bervariasi (Alcock & Weber, 2008). Pembuktian yang hanya berlangsung dalam RSP melalui strategi sintaksis dapat berdampak pada kurangnya pemahaman mahasiswa dan akhirnya mahasiswa cenderung menghafal bukti.

Pembuktian yang disertasi landasan konseptual secara informal dapat memberikan wawasan lebih bagi mahasiswa. Pembuktian dengan strategi semantik mempunyai keuntungan yaitu pembuktian tidak sekedar membuktikan kebenaran pernyataan tetapi juga menjelaskan kebenaran pernyataan. Mengacu pada Hanna (1990), Hersh (1993), dan Knuth (2002c) pembuktian dengan strategi semantik ini selain dapat memahamkan mahasiswa mengenai makna bukti juga dapat memahamkan mahasiswa pada materi matematika itu sendiri.

Selain untuk membantu pemahaman mahasiswa mengenai konsep bukti dan konsep matematika itu sendiri, pembuktian dengan strategi semantik yang dilakukan dosen dalam kelas dapat menjadi contoh bagi mahasiswa. Mahasiswa dapat melihat bahwa ketika pengerjaan secara formal menghadapi kegagalan, pencarian ide dapat dilakukan secara formal. Kenyataan bahwa mahasiswa cenderung meniru langkah pembuktian dosen sudah diungkapkan oleh Weber (2001). Lebih lanjut, Knuth (2002c) menyarankan praktik pembuktian di kelas diserahkan kepada mahasiswa sendiri. Mahasiswa diberi kebebasan untuk menyusun bukti sesuai keinginan mereka sendiri. Dosen memberikan validasi pada bukti yang disajikan mahasiswa.

Berdasarkan penelitian ini, mahasiswa dapat berhasil menyusun bukti setelah bekerja di luar formal. Ketika menghadapi kesulitan bekerja secara formal, mahasiswa menggunakan bayangan konsep untuk mengembangkan contoh atau representasi. Hal yang perlu dilakukan dalam pembelajaran adalah bagaimana mendesain pembelajaran dan buku pelajaran yang dapat membantu mahasiswa membuat kaitan antara konsep formal dan representasi yang dikembangkan berdasarkan konsep untuk meningkatkan kemampuan menyusun bukti.

## BAB VI

### PENUTUP

#### A. Simpulan

Berdasarkan hasil kajian teoritis dan pembahasan penelitian dapat diambil beberapa simpulan berikut.

1. Jalur berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik dapat terjadi dalam tiga kemungkinan, yaitu (a) bermula dari dunia berpikir formal (RSP) lalu pindah ke dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik (non RSP) dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau di luar dunia berpikir formal, (b) bermula dari dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik (non RSP) lalu pindah ke dunia berpikir formal dengan proses perpindahan dimungkinkan lebih dari satu kali dan berakhir di dalam atau di luar dunia berpikir formal, dan (c) semua proses berpikir terjadi di luar dunia berpikir formal. Perpindahan dari dunia berpikir formal ke dunia berpikir wujud-simbolik atau dunia berpikir simbolik dilakukan untuk tujuan (a) menemukan definisi konsep dalam rangka memperbaiki pemahaman, (b) melakukan refleksi dalam rangka mengecek kebenaran kesimpulan, dan (c) mencari petunjuk langkah non definisi dalam rangka menuntun langkah pembuktian.
2. Karakteristik proses berpikir mahasiswa dalam menyusun bukti matematis dengan strategi semantik dapat dijelaskan sebagai berikut. (a) Kegiatan menemukan definisi konsep **terjadi karena** struktur kognitif tidak lengkap. Komponen penting

berupa definisi konsep fungsi injektif tidak ada dalam struktur kognitif. Dorongan kuat untuk menemukan definisi konsep ini muncul karena pemikiran formal bahwa pembuktian harus berdasar pada definisi. Kegiatan menemukan definisi konsep *terjadi* dengan berpikir wujud-simbolik memanfaatkan bayangan konsep fungsi injektif untuk membuat contoh spesifik yang dipandang sebagai contoh generik. Aksi fisik dan mental dilakukan pada contoh spesifik. Aksi kemudian diinteriorisasi menjadi proses dengan menangkap suatu makna dari aksi. Proses selanjutnya dienkapsulasi menjadi objek, yaitu definisi konsep fungsi injektif. Objek selanjutnya disatukan dalam skema dan dijadikan landasan untuk berpikir formal pada proses pembuktian selanjutnya. (b) Kegiatan melakukan refleksi *terjadi karena* penarikan kesimpulan yang spontan (sekedar menebak) yang tidak didasarkan pada koordinasi secara formal antara komponen struktur kognitif yang sebenarnya sudah lengkap. Dorongan kuat untuk melakukan refleksi muncul karena rasa ragu pada kesimpulan yang dibuat tanpa adanya koordinasi antara komponen yang ada. Ketidakmampuan mengkoorkoordinasikan komponen yang ada dalam struktur kognitif secara formal mendorong subjek menggunakan berpikir wujud-simbolik. Kegiatan melakukan refleksi *terjadi* dengan cara berpikir wujud-simbolik mengenai premis dan kesimpulan. Aksi dilakukan untuk menangkap makna antara premis dan kesimpulan. Makna yang diperoleh kemudian dicocokkan dengan komponen yang ada dalam struktur kognitif yang dimiliki untuk menentukan kebenaran kesimpulan. Dalam hal ini, hasil berpikir wujud-simbolik dijadikan penentu kebenaran kesimpulan formal sebelumnya. (c) Kegiatan mencari petunjuk langkah *terjadi karena* ketidakmampuan (atau

ketidakmauan) menarik kesimpulan secara formal dengan mengkoordinasikan komponen struktur kognitif yang sebenarnya sudah lengkap. Dorongan untuk berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik muncul karena tidak mampu (atau tidak mau) bekerja dalam dunia berpikir formal. Ketidakmauan bekerja secara formal dipengaruhi keberhasilan sebelumnya dan menghindari berpikir berat di dalam dunia formal. Kegiatan mencari petunjuk langkah *terjadi* dengan berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik. Aksi fisik atau mental dilakukan dalam berpikir wujud-simbolik atau berpikir simbolik yang selanjutnya diinteriorisai menjadi proses. Proses kemudian dienkapsulasi menjadi objek yang diambil sebagai kesimpulan (subkesimpulan). Kesimpulan (subkesimpulan) selanjutnya disatukan dalam skema sebagai komponen baru dalam struktur kognitif yang dapat digunakan dalam langkah pembuktian selanjutnya.

## B. Saran

Berdasarkan temuan penelitian dan pembahasan maka beberapa saran yang dapat diajukan adalah sebagai berikut.

1. Penelitian ini menunjukkan betapa pentingnya kemampuan mahasiswa untuk mengembangkan contoh, visualisasi, atau representasi suatu konsep saat menyusun bukti. Dengan demikian disarankan agar pengenalan suatu konsep dalam pembelajaran di kelas atau dalam buku pelajaran tidak hanya melalui definisi konsep. Konsep perlu dikenalkan dengan baik melalui pengembangan ide-ide yang berkaitan dengan konsep, pengembangan contoh-contoh, dan penggunaan objek lainnya yang berkaitan dengan konsep.

2. Hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk berhasil dalam menyusun bukti tidak harus selalu berpikir secara formal deduktif. Strategi semantik juga dapat mengantarkan pada bukti formal yang diinginkan. Dengan demikian disarankan agar strategi pembuktian yang dilakukan dosen dalam pembelajaran di kelas hendaknya juga bervariasi. Pembuktian yang hanya berlangsung dalam RSP melalui strategi sintaksis dapat berdampak pada kurangnya pemahaman mahasiswa dan akhirnya mahasiswa cenderung menghafal bukti.
3. Penelitian ini lebih memfokuskan pada mahasiswa yang sukses dalam menyelesaikan pembuktian dengan strategi semantik. Pada kasus M14 dalam penelitian ini dan sesuai pendapat Moore (1994:263) adakalanya mahasiswa mengalami macet di dalam pembuktian tetapi ketika diberi bantuan sedikit mereka dapat melanjutkan kembali. Penelitian lanjutan dapat dilakukan pada mahasiswa yang gagal dalam menggunakan strategi semantik. Penelitian dapat difokuskan pada pengkategorian penyebab kegagalan dilihat dari struktur kognitif mahasiswa dan pemilihan *scaffolding* yang sesuai untuk membantu mahasiswa agar berhasil melewati kesulitan.
4. Penelitian ini menemukan fakta bahwa adakalanya mahasiswa tidak mau/mampu mengembangkan contoh atau diagram ketika menempuh strategi sintaksis sehingga gagal menyusun bukti. Di lain pihak, adakalanya mahasiswa sudah mengembangkan contoh atau diagram tetapi tidak mampu menemukan sesuatu yang dapat menuntunnya menghasilkan bukti dari contoh atau diagram yang sudah dibuat. Penelitian lanjutan dapat dilakukan untuk melihat mengapa hal tersebut dapat terjadi ditinjau dari kerangka pemahaman konseptual mahasiswa.

5. Penelitian ini tidak melihat konsistensi mahasiswa dalam melakukan pembuktian pada beberapa soal. Hal ini berdasarkan alasan bahwa pemilihan strategi sangat bergantung pada materi (Alcock & Inglis, 2008) dan pengalaman belajar (Weber, 2004b). Hanya saja Alcock & Inglis (2008) menyatakan ketika mahasiswa sukses dengan satu strategi maka akan mempengaruhi pemilihan strategi pada masalah berikutnya sehingga strategi mereka akan terlihat sama. Penelitian lanjutan dapat dilakukan untuk melihat kecenderungan mahasiswa memilih suatu strategi dibanding strategi yang lain. Penelitian dapat difokuskan pada apakah kesuksesan dengan strategi semantik sebelumnya akan mendorong mahasiswa menggunakan strategi semantik untuk soal berikutnya.
6. Penelitian ini menggunakan topik fungsi komposisi yang merupakan topik dasar dalam matematika dan hanya menemukan tiga kategori tujuan bekerja di luar RSP. Dalam penelitian Alcock dan Weber (2004) di level mahasiswa serta dalam penelitian Samkoff, dkk. (2012) di level ahli matematika ditemukan kasus bahwa adakalanya bekerja di non RSP untuk tujuan menemukan strategi pembuktian yang sesuai. Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan untuk mengungkap lebih banyak tujuan keluar dari dunia formal (RSP ke dunia non formal (non RSP) serta karakteristik materi yang mendukung munculnya tujuan tersebut.
7. Penelitian ini juga mengungkap fakta bahwa mahasiswa bekerja di luar dunia formal karena lebih mudah daripada bekerja di dunia formal. Penelitian lanjutan yang dapat dilakukan adalah membandingkan beban kognitif (*cognitive load*) mahasiswa yang menggunakan strategi semantik dengan mahasiswa yang menggunakan strategi sintaksis dalam menyusun bukti matematis.