LAPORAN

PENELITIAN BERSAMA DOSEN-MAHASISWA

PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAF MULTI STAR

Ketua Tim:

ABDUSSAKIR, M.Pd

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2010

PENGESAHAN LAPORAN
PENELITIAN BERSAMA DOSEN-MAHASISWA

Judul Penelitian : Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Multi Star

Ketua Peneliti/NIP : Abdussakir, M.Pd/19751006 200312 1 001
Anggota/NIP/NIM : Evawati Alisah, M.Pd/10720604 199903 2 001
Liya Fitrotul Chusna/07610055
Nuril Anwar Hamdani/07610081

Malang, 29 Desember 2010

Mengetahui
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi,

Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., D.Sc
NIP. 19540311 198002 1 002

Ketua Peneliti,

Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001

Mengesahkan

Ketua Lemlitbang UIN Maliki Malang,

Dr. Hj. Ulfah Utami, M.Si
NIP. 19650509 199903 2 002

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Masalah pelabelan dalam teori graf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan pada suatu graf muncul pertama kali dari karya Rosa pada tahun 1967. Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*) (Miller, 2000:165 dan Wallis dkk., 2000:178).

Pelabelan total sisi ajaib (*edge-magic total labeling*) pada graf G adalah fungsi bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ sehingga untuk sebarang sisi xy di G berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k. Selanjutnya k disebut bilangan ajaib pada G dan G disebut **total sisi ajaib**. Pelabelan total sisi ajaib yang memetakan $V(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, |V(G)|\}$ disebut **pelabelan super sisi ajaib** (*super edge-magic labeling*). Graf yang dapat dikenai pelabelan super sisi ajaib disebut graf **super sisi ajaib** (Wallis dkk., 2000:178 dan Park dkk. 2008:11).

Graf ulat (*caterpillar*) adalah graf yang jika semua titik ujungnya dibuang akan menghasilkan lintasan (Gallian, 2009). Titik ujung adalah titik yang berderajat satu (Chartrand dan Lesniak, 1986). Graf bintang (*star*) dengan (n + 1) yang dinotasikan dengan S_n, adalah graf bipartisi komplit $K_{(1,n)}$, dengan n bilangan asli. Graf bintang S_n mempunyai sebanyak n titik ujung dan 1 titik pusat. Jika sebanyak m graf bintang ($m > 1$) titik pusatnya dihubungkan langsung dengan satu sisi secara berurutan, maka akan diperoleh graf ulat dalam bentuk umum. Dalam penelitian ini, m graf bintang ($m > 1$) yang titik pusatnya dihubungkan langsung dengan satu sisi secara berurutan disebut graf multi star.

Penelitian mengenai pelabelan super sisi ajaib pada beberapa jenis graf termasuk pada beberapa bentuk grah ulat sudah banyak dilakukan. Baskoro dkk (2005) meneliti cara mengkonstruk graf super sisi ajaib dari suatu graf. Ji Yeon Park dkk (2008) meneliti pelabelan super sisi ajaib pada graf layang-layang. Hussain dkk (2009) meneliti tentang pelabelan super sisi ajaib pada pohon banana (*banana trees*). Rohima (2005) dan Khikmah (2005) masing-masing menunjukkan bahwa graf ulat berekor dengan n badan dan 2 kaki pada tiap badan serta graf ulat dengan n badan dan n kaki adalah super edge magic. Irawan (2007) menunjukkan bahwa graf ulat model trisula dengan panjang n adalah super sisi ajaib. Williyanto dan Irawanto (2009) menunjukkan bahwa grah ulat model T adalah super sisi ajaib. Lorentz (2009) menunjukkan bahwa graf ulat dengan n badan dan $2n$ kaki adalah super sisi ajaib. Abdussakir (2010) menunjukkan bahwa graf ulat bentuk $\perp$, bentuk H, dan graf ulat dengan himpunan derajat $D = \{1, 4\}$ dan n titik berderajat 4, dengan n bilangan asli adalah super sisi ajaib.

Beberapa penelitian tentang pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat ini masih pada kasus-kasus yang khusus. Karena bentuk umum graf ulat dapat diperoleh dari graf multi star, maka penelitian mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graf ulat secara umum dapat ditunjukkan melalui pelabelan super sisi ajaib pada graf multi star. Dengan demikian, maka penelitian ini berusaha menunjukkan bahwa graf multi star adalah super sisi ajaib.

B. Rumusan Masalah

Pertanyaan yang dirumuskan dalam penelitian ini adalah "bagaimana pelabelan super sisi ajaib pada graf multi star?"

C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan pelabelan super sisi ajaib pada graf multi star.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan bukti atau penjelasan bahwa graf multi star adalah super sisi ajaib. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi penambah wawasan mengenai pelabelan super sisi ajaib dan menggugah peneliti lain untuk melakukan penelitian lebih lanjut mengenai pelabelan super sisi ajaib pada beberapa jenis graf lainnya.

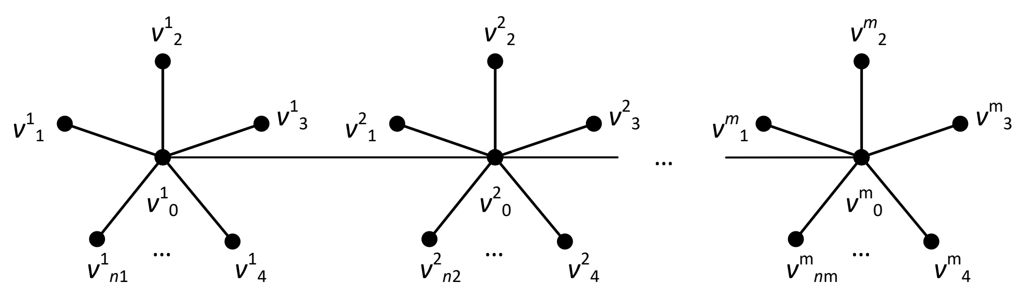
BAB IV

PEMBAHASAN

A. Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Multi Star Tipe 1 MS^1(*m*)

Seperti telah dijelaskan pada kajian pustaka, misalkan S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, …., S_{n_m} adalah graf star masing-masing beroder n_1, n_2, n_3, …, dan n_m, serta v_0^i adalah titik pusat dari S_{n_i}. Graf yang diperoleh dari gabungan $\bigcup_{i=1}^{m} S_{n_i}$ ditambah sisi $v_0^i\, v_0^{i+1}$, i = 1, 2, …, m – 1, dalam penelitian ini disebut **graf multi star tipe 1** dan dilambangkan dengan $MS^1(m)$. Berikut adalah gambar graf multi star tipe 1 $MS^1(m)$.

$MS^1(m)$:



$MS^1(m)$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(MS1(m)) = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{n_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{n_2}^2, \dots, v_{n_m}^m, v_0^1, v_0^2, v_0^3, \dots, v_0^m\}$, dan

$E(MS1(m)) = \{v_0^i v_j^i, j = 1, 2, \dots, n_i;\ i = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_0^k v_0^{k+1}, k = 1, 2, \dots, m-1\}$.

Jadi, $MS^1(m)$ mempunyai order

$$p(MS^1(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m + m$$

dan mempunyai ukuran

$$q(MS^1(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m + (m - 1).$$

Dengan demikian, maka $p + q = 2(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m) + 2m - 1$.

Untuk menentukan pelabelan super sisi ajaib, dalam penelitian ini ditetapkan titik v_1^1 diberi label 1. Hasil penelitian disajikan sebagai teorema.

Teorema 1.

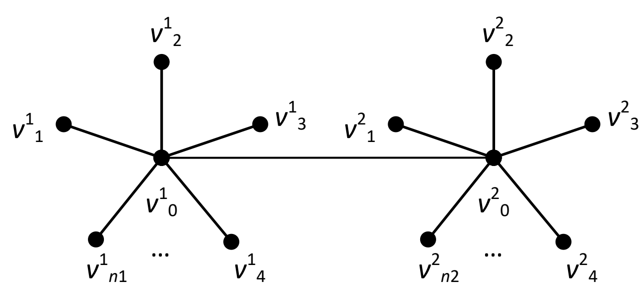
Graf multi star $MS^1(2)$ adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib

$$k = 3n_1 + 2n_2 + 6$$

Bukti

Graf $MS^1(2)$ dapat digambarkan sebagai berikut:

$MS^1(2)$:



Diperoleh bahwa $p(MS^1(2)) + q(MS^1(2)) = 2(n_1 + n_2) + 3$.

Konstruksi suatu relasi f dari

$$V(MS^1(2)) \cup E(MS^1(2))$$

ke

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2(n_1 + n_2) + 3\}$$

dengan aturan sebagai berikut :

$f(v_i^1) = i$ $\qquad\qquad$ $i = 1, 2, \ldots, n_1$

$f(v_i^2) = n_1 + 2 + i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_2$

$f(v_0^1) = n_1 + 2$

$f(v_0^2) = n_1 + 1$

$f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 4 - i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_1$

$f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 3 - i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_2$

$f(v_0^1 v_0^2) = n_1 + 2n_2 + 3$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa *f* adalah fungsi bijektif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *f* adalah pelabelan total sisi ajaib.

Untuk sisi $v_0^1 v_i^1$ diperoleh

$$f(v_0^1) + f(v_0^1 v_i^1) + f(v_i^1) = n_1 + 2 + 2n_1 + 2n_2 + 4 - i + i$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 6.$$

Untuk sisi $v_0^2 v_i^2$ diperoleh

$$f(v_0^2) + f(v_0^2 v_i^2) + f(v_i^2) = n_1 + 1 + n_1 + 2n_2 + 3 - i + n_1 + 2 + i$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 6.$$

Untuk sisi $v_0^1 v_0^2$ diperoleh

$$f(v_0^1) + f(v_0^1 v_0^2) + f(v_0^2) = n_1 + 2 + n_1 + 2n_2 + 3 + n_1 + 1$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 6.$$

Diperoleh bilangan ajaib

$$k = 3n_1 + 2n_2 + 6$$

Dengan melihat peta dari $V(MS^1(2))$ oleh f , yaitu

$f(v_i^1) = i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_1$

$f(v_i^2) = n_1 + 2 + i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_2$

$f(v_0^1) = n_1 + 2$

$f(v_0^2) = n_1 + 1$

maka terlihat bahwa $V(MS^1(2))$ dipetakan ke

$\{1, 2, 3, \ldots, n_1 + n_2 + 2\} = \{1, 2, 3, \ldots, p(MS^1(2))\}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $MS^1(2)$ adalah super sisi ajaib.

Teorema 2.

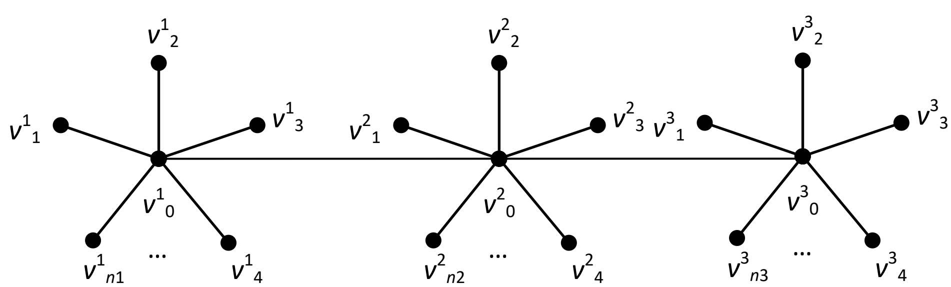
Graf multi star $MS^1(3)$ adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib

$$k = 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8$$

Bukti

Graf $MS^1(3)$ dapat digambarkan sebagai berikut:

$MS^1(3)$:



Diperoleh bahwa $p(MS^1(3)) + q(MS^1(3)) = 2(n_1 + n_2 + n_3) + 5$.

Konstruksi suatu relasi f dari

$$V(MS^1(3)) \cup E(MS^1(3))$$

ke

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2(n_1 + n_2 + n_3) + 5\}$$

dengan aturan sebagai berikut :

$f(v_i^1) = i$ $\quad$ i = 1, 2, …, n_1

$f(v_i^2) = n_1 + n_3 + 2 + i$ $\quad$ i = 1, 2, …, n_2

$f(v_i^3) = n_1 + 1 + i$ $\quad$ i = 1, 2, …, n_3

$f(v_0^1) = n_1 + n_3 + 2$

$f(v_0^2) = n_1 + 1$

$f(v_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

$f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 6 - i$ $\quad$ i = 1, 2, …, n_1

$f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 5 - i$ $\quad$ i = 1, 2, …, n_2

$f(v_0^2 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 4 - i$ $\quad$ i = 1, 2, …, n_3

$f(v_0^1 v_0^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 5$

$f(v_0^2 v_0^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 4$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa *f* adalah fungsi bijektif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *f* adalah pelabelan total sisi ajaib.

Untuk sisi $v_0^1 v_i^1$ diperoleh

$$f(v_0^1) + f(v_0^1 v_i^1) + f(v_i^1) = n_1 + n_3 + 2 + 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 6 - i + i$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8.$$

Untuk sisi $v_0^2 v_i^2$ diperoleh

$$f(v_0^2) + f(v_0^2 v_i^2) + f(v_i^2)$$

$$= n_1 + 1 + n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 5 - i + n_1 + n_3 + 2 + i$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8.$$

Untuk sisi $v_0^3 v_i^3$ diperoleh

$f(v_0^3) + f(v_0^3 v_i^3) + f(v_i^3)$

$$= n_1 + n_2 + n_3 + 3 + n_1 + n_2 + 2n_3 + 4 - i + n_1 + 1 + i$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8.$$

Untuk sisi $v_0^1 v_0^2$ diperoleh

$$f(v_0^1) + f(v_0^1 v_0^2) + f(v_0^2) = n_1 + n_3 + 2 + n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 5 + n_1 + 1$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8$$

Untuk sisi $v_0^2 v_0^3$ diperoleh

$f(v_0^2) + f(v_0^2 v_0^3) + f(v_0^3)$

$$= n_1 + 1 + n_1 + n_2 + 2n_3 + 4 + n_1 + n_2 + n_3 + 3$$

$$= 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8$$

Diperoleh bilangan ajaib

$$k = 3n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 8$$

Dengan melihat peta dari $V(MS^1(3))$ oleh f , yaitu

$f(v_i^1) = i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_1$

$f(v_i^2) = n_1 + n_3 + 2 + i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_2$

$f(v_i^3) = n_1 + 1 + i$ $\quad$ $i = 1, 2, \ldots, n_3$

$f(v_0^1) = n_1 + n_3 + 2$

$f(v_0^2) = n_1 + 1$

$f(v_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

maka terlihat bahwa $V(MS^1(3))$ dipetakan ke

$\{1, 2, 3, \ldots, n_1 + n_2 + n_3 + 3\} = \{1, 2, 3, \ldots, p(MS^1(3))\}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $MS^1(3)$ adalah super sisi ajaib.

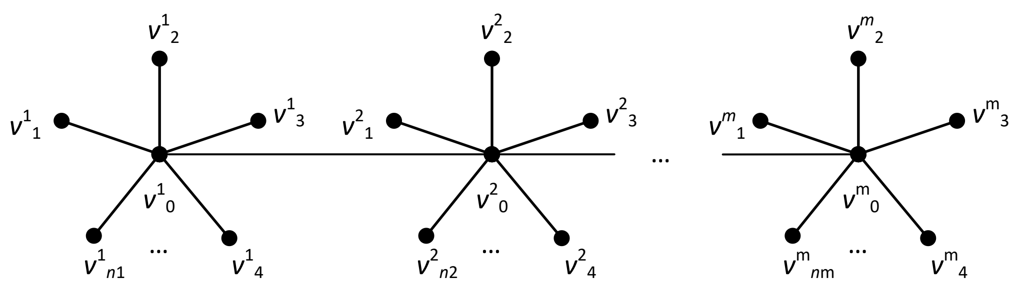
Teorema 3.

Graf multi star tipe 1 $MS^1(m)$ adalah super sisi ajaib, untuk bilangan asli m, dengan bilangan ajaib

Bukti

Graf multi star tipe 1 $MS^1(m)$ dapat digambar sebagai berikut.

$MS^1(m)$:



$MS^1(m)$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut:

$V(\mathrm{MS}^1(m)) = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{n_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{n_2}^2, \dots, v_{n_m,}^m, v_0^1, v_0^{2,}, v_0^3, \dots, v_0^m\}$, dan

$E(\mathrm{MS}^1(m)) = \{v_0^i v_j^i, j = 1, 2, \dots, n_i;\ i = 1, 2, \dots, m\} \cup \{v_0^k v_0^{k+1}, k = 1, 2, \dots, m-1\}$.

Jadi, $MS^1(m)$ mempunyai order

$$p(MS^1(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m + m$$

dan mempunyai ukuran

$$q(MS^1(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m + (m-1).$$

Dengan demikian, maka $p + q = 2(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m) + 2m - 1$.

Untuk m ganjil, konstruksi suatu relasi f dari

$$V(MS^1(m)) \cup E(MS^1(m))$$

ke

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m) + 2m - 1\}$$

dengan aturan sebagai berikut :

$$f(v_0^j) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-1} + \frac{j}{2},\ j\ genap \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_m + \frac{m-1}{2} + \left[n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-1} + \frac{j+1}{2}\right], j\ ganjil \end{cases}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + i + \dfrac{j-1}{2}, \quad j\ ganjil; i = 1,2,\ldots,n_j \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_m + \dfrac{m-1}{2} + \left[n_2 + n_4 + \cdots + i + \dfrac{j}{2}\right], j\ genap; i = 1,2,\ldots,n_j \end{cases}$$

$$f(v_0^j v_i^j) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_m) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-2} + 2(n_j + n_{j+2} + \cdots + n_{m-1}) - i - j + 2m + 1, \quad j\ genap \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-2} + i + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_m) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_{m-1}) - i - j + 2m + 1, j\ ganjil \end{cases}$$

$$f(v_0^j v_0^{j+1}) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_m) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_j + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_{m-1}) + 2m - j, \quad j\ genap \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_j + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_m) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_{m-1}) + 2m - j, j\ ganjil \end{cases}$$

Relasi *f* akan menghasilkan pelabelan super sisi ajaib pada graf multi star

$MS^1(m)$ dengan bilangan ajaib

$$k = 3(n_1 + n_3 + \cdots + n_m) + 2(n_2 + n_4 + \cdots + n_{m-1}) + \frac{5m+1}{2}$$

untuk bilangan asli ganjil *m*.

Untuk *m* genap, konstruksi suatu relasi *f* dari

$$V(MS^1(m)) \cup E(MS^1(m))$$

ke

$$\{1, 2, 3, \ldots, 2(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m) + 2m - 1\}$$

dengan aturan sebagai berikut :

$$f(v_0^j) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-1} + \frac{j}{2},\ j\ genap \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_{m-1} + \frac{m}{2} + \left[n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-1} + \frac{j+1}{2}\right], j\ ganjil \end{cases}$$

$$f(v_i^j) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + i + \dfrac{j-1}{2}, & j\ ganjil; i = 1,2,\ldots,n_j \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_{m-1} + \dfrac{m}{2} + \left[n_2 + n_4 + \cdots + i + \dfrac{j}{2}\right], & j\ genap; i = 1,2,\ldots,n_j \end{cases}$$

$$f(v_0^j v_i^j) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_{m-1}) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-2} + i + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_m) - j + 2m + 1, & j\ genap \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-2} + i + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_{m-1}) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_m) - i - j + 2m + 1, & j\ ganjil \end{cases}$$

$$f(v_0^j v_0^{j+1}) = \begin{cases} n_1 + n_3 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_{m-1}) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_j + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_m) + 2m - j, & j\ genap \\ n_1 + n_3 + \cdots + n_j + 2(n_{j+2} + n_{j+4} + \cdots + n_{m-1}) \\ +n_2 + n_4 + \cdots + n_{j-1} + 2(n_{j+1} + n_{j+3} + \cdots + n_m) + 2m - j, & j\ ganjil \end{cases}$$

Relasi *f* akan menghasilkan pelabelan super sisi ajaib pada graf multi star $MS^1(m)$ dengan bilangan ajaib

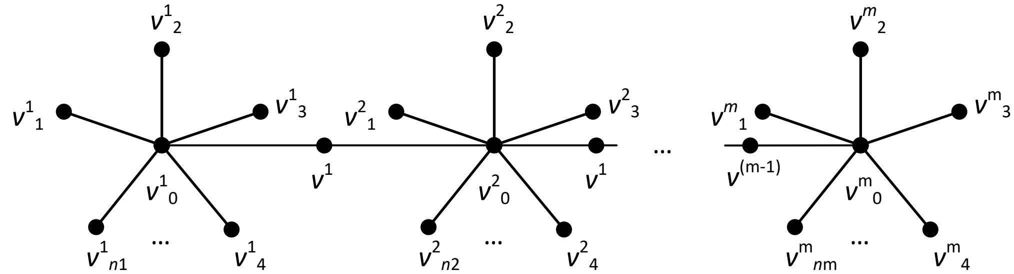
$$k = 3(n_1 + n_3 + \cdots + n_{m-1}) + 2(n_2 + n_4 + \cdots + n_m) + \frac{5m+2}{2}$$

untuk bilangan asli ganjil *m*.

B. Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Multi Star Tipe 2 $MS^2(m)$

Graf yang diperoleh dari gabungan $\bigcup_{i=1}^{m} S_{n_i}$ ditambah titik v^i (i = 1, 2, …, *m* – 1) dan sisi $v_0^i v^i$ serta $v^i v_0^{i+1}$ (i = 1, 2, …, *m* – 1), dalam penelitian ini disebut **graf multi star tipe 2** dan dilambangkan dengan $MS^2(m)$. Berikut adalah gambar graf multi star tipe 2.

$MS^2(m)$:



Maka diperoleh,

$$V(G) = \left\{ \begin{matrix} v_1^1, v_2^1, \dots, v_{n_1}^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_{n_2}^2, \dots, v_{n_m}^m \\ v_0^1, v_0^{2,}, v_0^3, \dots, v_0^m \\ v^{\hat{1}}, v^{\hat{2}}, v^{\hat{3}}, \dots, v^{\hat{m}} \end{matrix} \right\}$$

$$E(G) = \left\{ \begin{matrix} v_0^1 v_1^1, v_0^1 v_2^1, \dots, v_0^1 v_{n_1}^1, v_0^2 v_1^2, v_0^2 v_2^2, \dots, v_0^2 v_{n_2}^2, \dots, v_0^m\, v, v_0^m\, v_2^m, \dots, v_0^m\, v_{n_m}^m \\ v_0^1 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{2}}, \dots, v_0^{m-2} v^{\widehat{m-1}}, v_0^m\, v^{\widehat{m-1}} \end{matrix} \right\}$$

Jadi, $MS^2(m)$ mempunyai order

$$p(MS^2(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m + 2m - 1$$

dan mempunyai ukuran

$$q(MS^2(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m + 2(m - 1).$$

Dengan demikian, maka $p + q = 2(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m) + 4m - 3$.

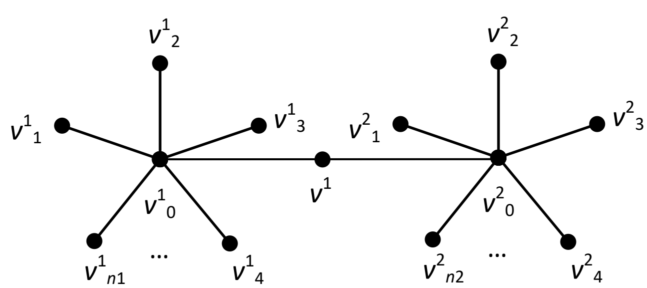
Teorema 4:

Graf multi star $MS^2(2)$ adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 3(n_1 + n_2) + 8$.

Bukti:

Misal G = $MS^2(2)$, maka G dapat digambarkan sebagai berikut:

$MS^2(2)$:



Maka

$V(G) = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, \dots, v_{n_1}^1; v_1^2, v_2^2, v_3^2, \dots, v_{n_2}^2; v_0^1, v_0^2; v^{\hat{1}}\}$

dan

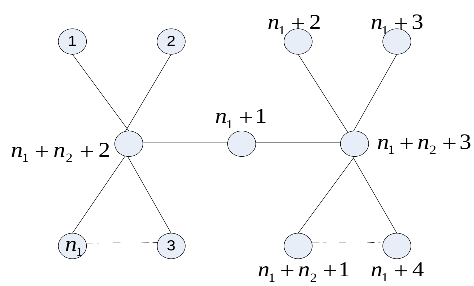
$E(G) = \{v_0^1 v_1^1, v_0^1 v_2^1, \dots, v_0^1 v_{n_1}^1;\ v_0^2 v_1^2, v_0^2 v_2^2, \dots, v_0^2 v_{n_2}^2; v_0^1 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{1}}\}$

Jadi akan diperoleh:

$p = n_1 + n_2 + 3$, dan $q = n_1 + n_2 + 2$.

Sehingga $p + q = 2(n_1 + n_2) + 5$

Misalkan dibuat pelabelan sebagai berikut:



Terdapat pola pelabelan *f* sebagai berikut:

$f(v_i^k) = n_{k-1} + (k-1) + i,\ 1 \leq i \leq n_k,\ 1 \leq k \leq 2$

$f(v_0^k) = n_1 + n_2 + (k+1),\ 1 \leq k \leq 2$

$f(v^{\hat{l}}) = n_l + l,\ l = 1$

$f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i,\ 1 \leq i \leq n_1$

$f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i,\ 1 \leq i \leq n_2$

$f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + 2n_{l+1} + 7 - (k+l),\ 1 \leq k \leq 2,\ l = 1$

Dapat ditunjukkan bahwa f adalah fungsi, yang memetakan $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p+q\}|$ dan f dapat ditunjukkan injektif maka sudah pasti f adalah surjektif. Karena f injektif juga sekaligus surjektif, maka f bijektif.

Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku

$f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi $v_0^1 v_i^1$ di G diperoleh:

$$f(v_0^1) + f(v_0^1 v_i^1) + f(v) = (n_1 + n_2 + 2) + (2n_1 + 2n_2 + 6 - i) + i$$

$$= 3n_1 + 3n_2 + 8$$

b. Untuk sisi $v_0^2 v_i^2$ di G diperoleh:

$$f(v_0^2) + f(v_0^2 v_i^2) + f(v_i^2)$$

$$= (n_1 + n_2 + 3) + (n_1 + 2n_2 + 4 - i) + (n_1 + 1 + i)$$

$$= 3n_1 + 3n_2 + 8$$

c. Untuk sisi $v_0^k v^1$ di G diperoleh:

$$f\left(v_0^k\right) + f\left(v_0^k v^1\right) + f(v^1)$$

$$= [n_1 + n_2 + (k + 1)] + [n_1 + 2n_2 + 7 - (k + 1)]$$

$$+ [n_1 + 1]$$

$$= 3n_1 + 3n_2 + 8$$

Jadi G adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3n_1 + 3n_2 + 8$$

Akan ditunjukkan bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

a) Titik v_i^k

Diketahui $f\left(v_i^k\right) = n_{k-1} + (k - 1) + i$, $1 \leq i \leq n_k$, $1 \leq k \leq 2$

Karena $1 \leq i \leq n_k$

Maka $[n_{k-1} + (k-1)] + 1 \leq [n_{k-1} + (k-1)] + i \leq [n_{k-1} + (k-1)] + n_k$

$n_{k-1} + k \leq n_{k-1} + (k-1) + i \leq n_{k-1} + (k-1) + n_k$

$1 \leq n_{k-1} + k \leq n_{k-1} + (k-1) + i \leq n_{k-1} + (k-1) + n_k < n_1 + n_2 + 3$

$1 \leq n_{k-1} + (k-1) + i < n_1 + n_2 + 3$

Jadi $1 \leq f\left(v_i^k\right) < p$

b) Titik v_0^k

Diketahui $f\left(v_0^k\right) = n_1 + n_2 + (k+1), 1 \leq k \leq 2$

Karena $1 \leq k \leq 2$

Maka $(n_1 + n_2 + 1) + 1 \leq (n_1 + n_2 + 1) + k \leq (n_1 + n_2 + 1) + 2$

$$n_1 + n_2 + 2 \leq n_1 + n_2 + (k+1) \leq n_1 + n_2 + 3$$

$$n_1 + n_2 + 2 \leq n_1 + n_2 + (k+1) \leq n_1 + n_2 + 3$$

$$1 < n_1 + n_2 + 2 \leq n_1 + n_2 + (k+1) \leq n_1 + n_2 + 3$$

$$1 < n_1 + n_2 + (k+1) \leq n_1 + n_2 + 3$$

Jadi $1 < f\left(v_0^k\right) \leq p$

c. Titik $v^{\hat{l}}$

Diketahui $f\left(v^{\hat{l}}\right) = n_l + l, l = 1$

Dengan $l = 1$, pola untuk titik $v^{\hat{l}}$ bisa ditulis $f\left(v^{\hat{1}}\right) = n_1 + 1$.

Karena $1 < n_1 + 1 < n_1 + n_2 + 3$

Maka $1 < f\left(v^{\hat{l}}\right) < p$

Jadi terbukti bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Terbukti bahwa graf G adalah super sisi ajaib.

Teorema 5:

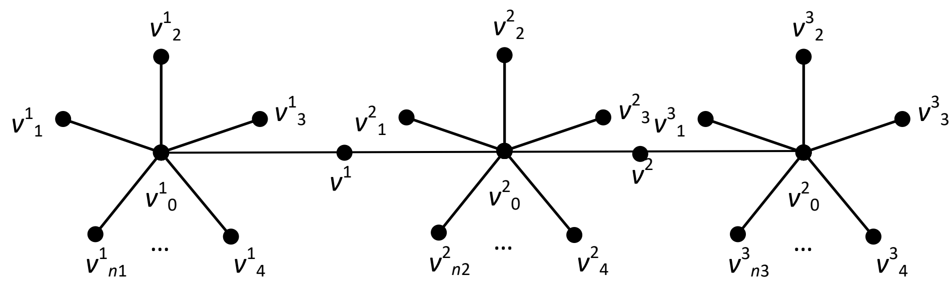
Graf multi star MS^2(3) adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib

$$k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13.$$

Bukti:

Misal G = MS^2(3), maka G dapat digambarkan sebagai berikut:

MS^2(3):



Maka

$$V(G) = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{n_1}^1; v_1^2, v_2^2, \dots, v_{n_2}^2; v_1^3, v_2^3, \dots, v_{n_3}^3; v_0^1, v_0^2, v_0^3; v^{\hat{1}}, v^{\hat{2}}\}$$

dan

$E(G)$

$$= \left\{ \begin{matrix} v_0^1 v_1^1, v_0^1 v_2^1, \dots, v_0^1 v_{n_1}^1;\ v_0^2 v_1^2, v_0^2 v_2^2, \dots, v_0^2 v_{n_2}^2; v_0^3 v_1^3, v_0^3 v_2^3, \dots, v_0^3 v_{n_3}^3; \\ v_0^1 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{2}}, v_0^3 v^{\hat{2}} \end{matrix} \right\}$$

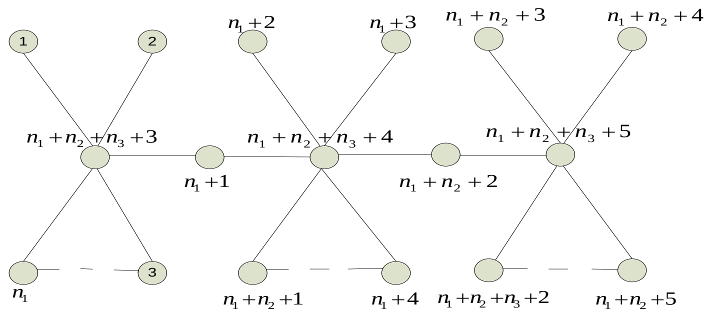
Jadi akan diperoleh:

$p = n_1 + n_2 + n_3 + 5,$ dan $q = n_1 + n_2 + n_3 + 4.$

Maka $\qquad p + q = (\ n_1 + n_2 + n_3 + 5) + (\ n_1 + n_2 + n_3 + 4)$

$$= 2(n_1 + n_2 + n_3) + 9$$

Diberikan pelabelan *f* pada titik sebagai berikut:



Terdapat pola pelabelan graf G sebagai berikut:

$f(v_i^k) = n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i,\ 1 \leq i \leq n_k,\ 1 \leq k \leq 3$

$f(v_0^k) = n_1 + n_2 + n_3 + (k+2),\ 1 \leq k \leq 3$

$f(v^{\hat{l}}) = n_1 + \cdots + n_l + l,\ 1 \leq l \leq 2$

$f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i,\ 1 \leq i \leq n_1$

$f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i,\ 1 \leq i \leq n_2$

$f(v_0^3 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i,\ 1 \leq i \leq n_3$

$f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (k+l),$

$1 \leq k \leq 3,\ (k-1) \leq l \leq k$

Dapat ditunjukkan bahwa f adalah fungsi, yang memetakan $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p+q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \ldots, p+q\}|$ dan f dapat ditunjukkan injektif maka sudah pasti f adalah surjektif. Karena f injektif juga sekaligus surjektif, maka f bijektif.

Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku

$f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi $v_0^1 v_i^1$ di G diperoleh:

$f(v_0^1) + f\left(v_0^1 v_i^1\right) + f\left(v_i^1\right)$

$= (n_1 + n_2 + n_3 + 3) + (2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i) + i$

$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

b. Untuk sisi $v_0^2 v_i^2$ di G diperoleh:

$f(v_0^2) + f(v_0^2 v_i^2) + f(v_i^2)$

$= (n_1 + n_2 + n_3 + 4) + (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i) + (n_1 + 1$

$+ i)$

$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

c. Untuk sisi $v_0^3 v_i^3$ di G diperoleh:

$f(v_0^3) + f(v_0^3 v_i^3) + f(v_i^3)$

$= (n_1 + n_2 + n_3 + 5) + (n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i) + (n_1 + n_2$

$+ 2 + i)$

$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

d. Untuk sisi $v_0^k v^{\hat{l}}$ di G diperoleh:

$f\left(v_0^k\right) + f(v_0^k v^{\hat{l}}) + f\left(v^{\hat{l}}\right)$

$= [n_1 + n_2 + n_3 + (k + 2)]$

$+ \left[n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (k + l)\right]$

$+ [n_1 + \cdots + n_l + l]$

$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

Jadi G adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$$

Akan ditunjukkan bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

a. Titik v_i^k

Diketahui $f(v_i^k) = n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i, 1 \leq i \leq n_k, 1 \leq k \leq 3$

Karena $1 \leq i \leq n_k$

Maka $[n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1)] + 1 \leq [n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1)] + i \leq [n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1)] + n_k$

$$n_{k-2} + n_{k-1} + k \leq n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i \leq n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + n_k$$

$$1 \leq n_{k-2} + n_{k-1} + k \leq n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i$$

$$\leq n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + n_k < n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

$$1 \leq n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i < n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

Jadi $1 \leq f(v_i^k) < p$

b. Titik v_0^k

Diket $f(v_0^k) = n_1 + n_2 + n_3 + (k+2), 1 \leq k \leq 3$

Karena $1 \leq k \leq 3$

Maka $(n_1 + n_2 + n_3 + 2) + 1 \leq (n_1 + n_2 + n_3 + 2) + k \leq (n_1 + n_2 + n_3 + 2) + 3$

$$n_1 + n_2 + n_3 + 3 \leq n_1 + n_2 + n_3 + (k+2) \leq n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + 3 \leq n_1 + n_2 + n_3 + (k+2) \leq n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + (k+2) \leq n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

Jadi $1 < f(v_0^k) \leq p$

c. Titik $v^{\hat{l}}$

Diketahui $f(v^{\hat{l}}) = n_1 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq 2$

Karena $1 \leq l \leq 2$

Maka $n_1 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + \cdots + n_l + 2$

$$1 < n_1 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + \cdots + n_l + 2$$

$$< n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

Jadi $1 < f\left(v^{\hat{l}}\right) < p$

Jadi terbukti bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Terbukti bahwa graf G adalah super sisi ajaib.

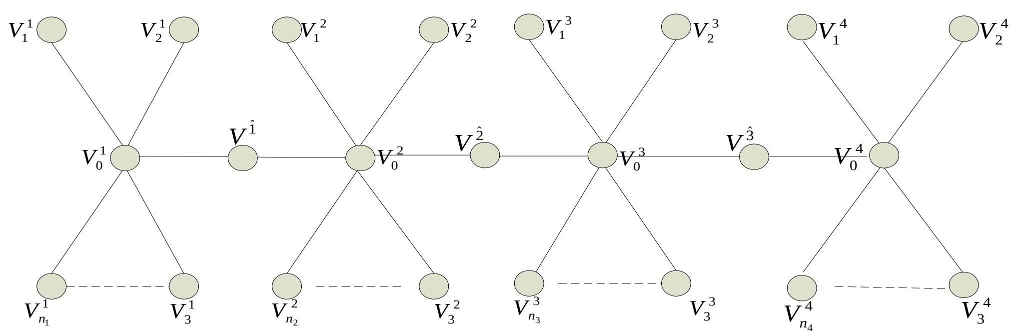
Teorema 6:

Graf multi star $MS^2(4)$ adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib

$$k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

Bukti:

Misal G = $MS^2(4)$, maka G dapat digambar sebagai berikut:



Maka

$$V(G) = \begin{Bmatrix} v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{n_1}^1; v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{n_2}^2; v_1^3, v_2^3, \ldots, v_{n_3}^3; v_1^4, v_2^4, \ldots, v_{n_4}^4 \\ v_0^1, v_0^2, v_0^3, v_0^4; v^{\hat{1}}, v^{\hat{2}}, v^{\hat{3}} \end{Bmatrix}$$

dengan

v_i^j adalah titik pada $S_{n_j}^j$ dengan v_0^j sebagai titik pusat, dan i = 1, 2, …, n_j serta

j = 1, 2, 3, 4.

$v^{\hat{l}}$ adalah titik pengait antara v_0^l dengan v_0^{l+1}, untuk l = 1, 2, 3.

Maka

$$E(G) = \left\{ \begin{matrix} v_0^1 v_1^1, v_0^1 v_2^1, \dots, v_0^1 v_{n_1}^1;\ v_0^2 v_1^2, v_0^2 v_2^2, \dots, v_0^2 v_{n_2}^2; \\ v_0^3 v_1^3, v_0^3 v_2^3, \dots, v_0^3 v_{n_3}^3; v_0^4 v_1^4, v_0^4 v_2^4, \dots, v_0^4 v_{n_4}^4 \\ v_0^1 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{2}}, v_0^3 v^{\hat{2}}, v_0^3 v^{\hat{3}}, v_0^4 v^{\hat{3}} \end{matrix} \right\}$$

Jadi akan diperoleh:

$$p = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7, \text{dan } q = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6.$$

Maka $\quad p + q = (\,n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7) + (\,n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6)$

$$= 2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 13$$

Buat relasi f dari V(G) ∪ E(G) ke $\{1, 2, 3, \dots, 2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 13\}$

dengan aturan berikut

$f\left(v_i^k\right) = n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i,\ 1 \le i \le n_k,\ 1 \le k \le 4$

$f\left(v_0^k\right) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (k+3),\ 1 \le k \le 4$

$f\left(v^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \le l \le 3$

$f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i,\ 1 \le i \le n_1$

$f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i,\ 1 \le i \le n_2$

$f(v_0^3 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i,\ 1 \le i \le n_3$

$f(v_0^4 v_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i,\ 1 \le i \le n_4$

$f\left(v_0^k v^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + 2n_{(l+2)} + \cdots + 2n_4 + 15 -$

$\left(k + \hat{l}\right),\ 1 \le k \le 4,\ (k-1) \le l \le k$

Dapat ditunjukkan bahwa f adalah fungsi, yang memetakan $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p+q\}|$ dan f dapat ditunjukkan injektif maka sudah pasti f adalah surjektif. Karena f injektif juga sekaligus surjektif, maka f bijektif.

Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi $v_0^1 v_i^1$ di G diperoleh:

$$f(v_0^1) + f(v_0^1 v_i^1) + f(v_i^1)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4)$$

$$+ (2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i) + i$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

b. Untuk sisi $v_0^2 v_i^2$ di G diperoleh:

$f(v_0^2) + f(v_0^2 v_i^2) + f(v_i^2) = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5) + (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i) + (n_1 + 1 + i)$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

c. Untuk sisi $v_0^3 v_i^3$ di G diperoleh:

$$f(v_0^3) + f(v_0^3 v_i^3) + f(v_i^3)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6)$$

$$+ (n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i) + (n_1 + n_2 + 2 + i)$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

d. Untuk sisi $v_0^4 v_i^4$ di G diperoleh:

$$f(v_0^4) + f(v_0^4 v_i^4) + f(v_i^4)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7) + (n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 8 - i)$$

$$+ (n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i)$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

e. Untuk sisi $v_0^k v^{\hat{l}}$ di G diperoleh:

$f(v_0^k) + f(v_0^k v^{\hat{l}}) + f(v^{\hat{l}})$

$$= [n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (k + 3)]$$

$$+ [n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + 2n_{(l+2)} + \cdots + 2n_4 + 15$$

$$- (k + l)] + [n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l]$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

Jadi G adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

Akan ditunjukkan bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

a. Titik v_i^k

Diketahui $f(V_i^k) = n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1) + i$, $1 \leq i \leq n_k$,

$1 \leq k \leq 4$

Karena $1 \leq i \leq n_k$

Maka

$$[n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1)] + 1 \leq [n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1)] + i$$

$$\leq [n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1)] + n_k$$

$$n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + k \leq n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1) + i$$

$$\leq n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1) + n_k$$

$$1 \leq n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + k \leq n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1) + i$$

$$\leq n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k - 1) + n_k$$

$$< n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$$

$1 \leq n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i < n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

Jadi $1 \leq f(v_i^k) < p$

d. Titik v_0^k

Diket $f(v_0^k) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (k+3), 1 \leq k \leq 4$

Karena $1 \leq k \leq 4$

Maka $(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 3) + 1 \leq (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 3) + k \leq (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 3) + 4$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4 \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (k+3)$$

$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4 \leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (k+3)$$

$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$$

Jadi $1 < f(v_0^k) \leq p$

e. Titik $v^{\hat{l}}$

Diketahui $f(v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq 3$

Karena $1 \leq l \leq 3$

Maka

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 3$$

$$1 < n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 3$$

$$< n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$$

Jadi $1 < f(v^{\hat{l}}) < p$

Jadi terbukti bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Terbukti bahwa graf G adalah super sisi ajaib.

Berdasarkan pola pelabelan titik dan sisi pada graf multi star $MS^2(2)$, $MS^2(3)$, dan $MS^2(4)$, maka dapat diambil suatu generalisasi untuk pola pelabelan titik dan sisi pada graf multi star $MS^2(m)$ sebagai berikut:

a. Titik v_i^k

$m = 2 \Longrightarrow f\left(v_i^k\right) = n_{k-1} + (k-1) + i$

$m = 3 \Longrightarrow f(v_i^k) = n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i$

$m = 4 \Longrightarrow f(v_i^k) = n_{k-3} + n_{k-2} + n_{k-1} + (k-1) + i$

Jadi disimpulkan:

$f\left(v_i^k\right) = n_{k-(m-1)} + n_{k-(m-2)} + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i$

$f\left(v_i^k\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i, 1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n_k$

b. Titik v_0^k

$m = 2 \Longrightarrow f\left(v_0^k\right) = n_1 + n_2 + (k+1)$

$m = 3 \Longrightarrow f\left(v_0^k\right) = n_1 + n_2 + n_3 + (k+2)$

$m = 4 \Longrightarrow f\left(v_0^k\right) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (k+3)$

Jadi disimpulkan:

$f\left(v_0^k\right) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1), 1 \leq k \leq m, m \geq 2$

c. Titik $v^{\hat{l}}$

$m = 2 \Longrightarrow f\left(v^{\hat{l}}\right) = n_1 + \cdots + n_l + l$

$m = 3 \Longrightarrow f\left(v^{\hat{l}}\right) = n_1 + \cdots + n_l + l$

$m = 4 \Longrightarrow f\left(v^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$

Jadi disimpulkan: $f(v) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq m-1$

d. Sisi $v_0^k v_i^k$

1. Sisi $v_0^1 v_i^1$

   $m = 2 \Longrightarrow f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

   $m = 3 \Longrightarrow f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

   $m = 4 \Longrightarrow f(v_0^1 v_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$

   Jadi disimpulkan: $f(v_0^1 v_i^1) = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 4m - 2 - i$

2. Sisi $v_0^2 v_i^2$

   $m = 2 \Longrightarrow f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

   $m = 3 \Longrightarrow f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

   $m = 4 \Longrightarrow f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

   Jadi disimpulkan: $f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2(n_2 + n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 4 - i$

3. Sisi $v_0^3 v_i^3$

   $m = 2 \Longrightarrow f(v_0^3 v_i^3)$ tidak ada

   $m = 3 \Longrightarrow f(v_0^3 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

   $m = 4 \Longrightarrow f(v_0^3 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

   Jadi disimpulkan: $f(v_0^3 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2(n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 6 - i$

4. Sisi $v_0^4 v_i^4$

   $m = 2 \Longrightarrow f(v_0^4 v_i^4) =$tidak ada

   $m = 3 \Longrightarrow f(v_0^4 v_i^4) =$tidak ada

   $m = 4 \Longrightarrow f(v_0^4 v_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

   Jadi disimpulkan:

   $f(v_0^4 v_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2(n_4 + \cdots + n_m) + 4m - 8 - i$

Sehingga, untuk sisi $v_0^k v_i^k$:

$f(v_0^1 v_i^1) = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 4m - 2 - i$

$f(v_0^2 v_i^2) = n_1 + 2(n_2 + n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 4 - i$

$f(v_0^3 v_i^3) = n_1 + n_2 + 2(n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 6 - i$

$f(v_0^4 v_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2(n_4 + \cdots + n_m) + 4m - 8 - i$

Jadi disimpulkan:

$f(v_0^k v_i^k) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(k-1)} + 2(n_k + n_{k+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2k - i,$

$1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n_k, m \geq 2$

e. Sisi $v_0^k v^{\hat{l}}$

$m = 2 \Longrightarrow f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + 2n_{l+1} + 7 - (k + l)$

$m = 3 \Longrightarrow f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (k + l)$

$m = 4 \Longrightarrow f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_4 + 15 - (k + l)$

Jadi disimpulkan:

$f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (k + l + 1),$

$m \geq 2, (k - 1) \leq l \leq k$

f. Bilangan ajaib k:

$m = 2 \Longrightarrow f(k) = 3(n_1 + n_2) + 8$

$m = 3 \Longrightarrow f(k) = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

$m = 4 \Longrightarrow f(k) = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

Jadi disimpulkan: $f(k) = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2, m \geq 2$

Dari beberapa pola di atas, maka dapat dibuat generalisasi dalam bentuk teorema berikut:

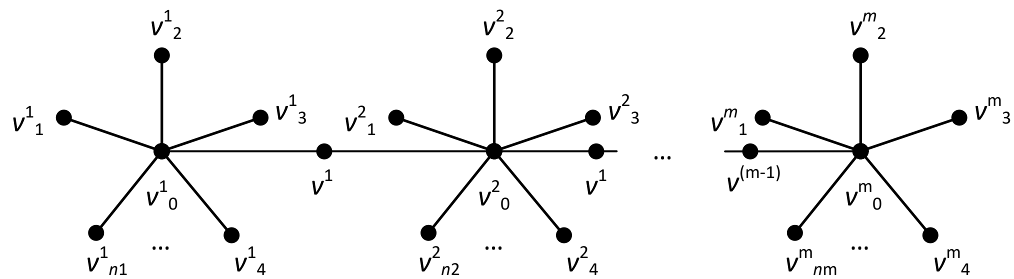
Teorema 7:

Graf multi star $\mathrm{MS}^2(m)$ adalah super sisi ajaib, untuk bilangan asli m, dengan konstanta ajaib

$$k = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2, m \geq 2$$

Bukti:

$MS^2(m)$:



$$V(G) = \begin{Bmatrix} v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{n_1}^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_{n_m}^m \\ v_0^1, v_0^{2,}, v_0^3, \ldots, v_0^m \\ v^{\hat{1}}, v^{\hat{2}}, v^{\hat{3}}, \ldots, v^{\hat{m}} \end{Bmatrix}$$

$$E(G) = \begin{Bmatrix} v_0^1 v_1^1, v_0^1 v_2^1, \ldots, v_0^1 v_{n_1}^1, v_0^2 v_1^2, v_0^2 v_2^2, \ldots, v_0^2 v_{n_2}^2, \ldots, v_0^m\, v, v_0^m\, v_2^m, \ldots, v_0^m\, v_{n_m}^m \\ v_0^1 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{1}}, v_0^2 v^{\hat{2}}, \ldots, v_0^{m-2} v^{\widehat{m-1}}, v_0^m\, v^{\widehat{m-1}} \end{Bmatrix}$$

Jadi, $MS^2(m)$ mempunyai order

$$p(MS^2(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m + 2m - 1$$

dan mempunyai ukuran

$$q(MS^2(m)) = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m + 2(m - 1).$$

Dengan demikian, maka $p + q = 2(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m) + 4m - 3$.

Buat pola pelabelan f pada graf G = $\mathrm{MS}^2(m)$ sebagai berikut:

1. $f\left(v_i^k\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i, 1 \leq i \leq n_k, 1 \leq k \leq m$

2. $f(v_0^k) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1), 1 \le k \le m$

3. $f(v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \le l \le (m-1)$

4. $f(v_0^k v_i^k) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(k-1)} + 2(n_k + n_{k+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2k - i, 1 \le i \le n_k, 1 \le k \le m$

5. $f(v_0^k v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (k + l + 1), 1 \le k \le m, (k-1) \le l \le k$

Maka dapat ditunjukkan bahwa f adalah fungsi bijektif.

Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi $v_0^k v_i^k$ di G diperoleh:

$$
\begin{aligned}
f(v_0^k) + f(v_0^k v_i^k) + f(v_i^k) &= [n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1)] \\
&+ [n_1 + n_2 + \cdots + n_{(k-1)} + 2(n_k + n_{k+1} + \cdots + n_m) + 4m \\
&- 2k - i] + [n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i] \\
&= 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2
\end{aligned}
$$

b. Untuk sisi $v_0^k v^{\hat{l}}$ di G diperoleh:

$$
\begin{aligned}
f(v_0^k) + f(v_0^k v^{\hat{l}}) + f(v^{\hat{l}}) &= [n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1)] \\
&+ [n_1 + n_2 + \cdots + n_{\hat{l}} + 2(n_{\hat{l}+1} + n_{\hat{l}+2} + \cdots + n_m) + 4m \\
&- (k + \hat{l} + 1)] + [n_1 + n_2 + \cdots + n_{\hat{l}} + \hat{l}] \\
&= 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2
\end{aligned}
$$

Jadi G adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2$$

Akan ditunjukkan bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

a. Titik v_i^k

Diketahui $f(v_i^k) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i, 1 \leq i \leq n_k, 1 \leq k \leq m$

Karena $1 \leq i \leq n_k, 1 \leq k \leq m$

Maka $1 \leq i \leq n_k$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + n_k$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + k \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + n_k$$

$$1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + k \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + n_k < n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

$$1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + (k-1) + i < n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

Jadi $1 \leq f(v_i^k) \leq p$

b. Titik v_0^k

Diket $f(v_0^k) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1), 1 \leq k \leq m$

Karena $1 \leq k \leq m$

Maka $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + (m-1) + 1 \leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + (m-1) + k \leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + (m-1) + m$

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + m \leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1)$$

$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + m$$

$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1)$$

$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + k + (m-1) \leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

Jadi $1 < f(v_0^k) \leq p$

c. Titik $v^{\hat{l}}$

Diket $f(v^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq (m-1)$

Karena $1 \leq l \leq (m-1)$

Maka $n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + (m-1)$

$$1 < n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$$

$$\leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + (m-1)$$

$$< n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

$$1 < n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$$

$$< n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

Jadi $1 < f(v^{\hat{l}}) < p$

Jadi terbukti bahwa f memetakan V ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Dengan demikian, terbukti bahwa $G = MS^2(m)$ adalah super sisi ajaib.

C. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Hairy Cycle C'$_n$

Misalkan S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, …., S_{n_m} adalah graf star masing-masing beroder n_1, n_2, n_3, …, dan n_m, serta v_0^i adalah titik pusat dari S_{n_i} **.** Graf yang diperoleh dari gabungan $\bigcup_{i=1}^{m} S_{n_i}$ ditambah sisi $v_0^i\, v_0^{i+1}$ (i = 1, 2, …, m – 1) dan $v_0^1 v_0^m$ adalah graf sikel berambut (*Hairy Cycle*), dan dinotasikan dengan C'_m. Dalam penelitian ini juga ditunjukkan pelabelan pada graf *hairy cycle*, dengan kasus khusus pada

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_m = c.$$

Teorema 8:

Graf Hairy Cycle C_4' dengan m rambut untuk masing-masing titik pada sikel adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1,2,3, …, $p+q$} sedemikian hingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x)+f(xy)+f(y)=k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.1 perlu ditunjukkan bahwa :

i) G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1,2,3, …, $p+q$}

ii) untuk masing-masing sisi xy di G berlaku

$$f(x)+f(xy)+f(y)=k$$

Misal:

$V(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m,\ b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m,\ c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m)$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$V_1(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$

$V_2(G) = (\ b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$

$V_3(G) = (\ c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$

Dimana:

a_0 sebagai titik pusat $V_1(G)$ dan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ sebagai titik ujung $V_1(G)$. b_0 sebagai titik pusat $V_2(G)$ dan $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ sebagai titik ujung $V_2(G)$. c_0 sebagai titik pusat $V_3(G)$ dan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ sebagai titik ujung $V_3(G)$. Sedangkan a_0, b_0 dan c_0 saling terhubung.

$E(G) =$

$(a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0, b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0, \dots, c_0c_m, c_0a_0)$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$E_1(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0)$

$E_2(G) = (\ b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0)$

$E_3(G) = (\ c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0a_0)$

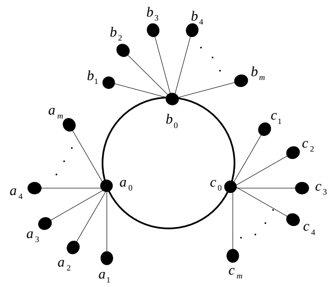
Jadi untuk C_3' dengan m rambut

$p = 3(m+1)$, dan $q = 3(m+1)$.

Maka $p + q = 3(m+1) + 3(m+1)$

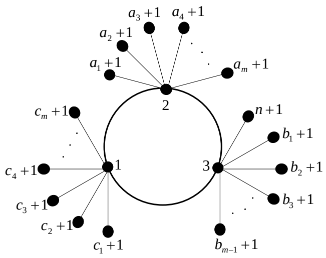
$= 6(m+1)$

Graf Hairy Cycle C_3' dengan m rambut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 3.8: Graf C_3' Dengan m Rambut

dengan pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.9: Pelabelan Graf C_3' Dengan m Rambut

Definisikan fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3,\dots,p+q\}$ dengan pengaitan sebagai berikut:

a. $f(a_0) \coloneqq 1$

b. $f(a_i) \coloneqq 3i+2$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

c. $f(a_0a_i) \coloneqq (6m+6)-3i$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

d. $f(a_0b_0) \coloneqq 6m+6$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

e. $f(b_0) \coloneqq 2$

f. $f(b_i) \coloneqq 3i+3$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

g. $f(b_0b_i) \coloneqq (6m+4)-3i$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

h. $f(b_0c_0) \coloneqq 6m+4$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

i. $f(c_0) \coloneqq 3$

j. $f(c_i) \coloneqq 3i+1$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

k. $f(c_0c_i) \coloneqq (6m+5)-3i$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

l. $f(c_0a_0) \coloneqq 6m+5$ untuk $i = 1,2,3,\dots,m$

Maka:

i) Akan ditunjukkan bahwa G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$

1) G adalah fungsi injektif

Untuk titik di G

Ambil V_i dan V_j titik di G dengan $f(V_i) = f(V_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $V_i = V_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$.

Karena $f(x_i) = f(x_j)$

Maka $i = j$

Jadi $x_i = x_j$

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_i) = f(a_j)$

Maka $n\,i + 2 = n\,j + 2$

$i = j$

Jadi $a_i = a_j$

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(b_i) = f(b_j)$

Maka $n\,i + 3 = n\,j + 3$

$i = j$

Jadi $b_i = b_j$

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$

Maka $n\,i + 1 = n\,j + 1$

$i = j$

Jadi $c_i = c_j$

Untuk sisi di G

a. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Ambil $a_0 a_i$ dan $a_0 a_j$ sisi di G dengan $f(a_0 a_i) = f(a_0 a_j)$

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $a_0 a_i = a_0 a_j$.

Karena $f(a_0 a_i) = f(a_0 a_j)$

Maka $6m + 6 - 3i = 6m + 6 - 3j$

$$i = j$$

Jadi $a_0 a_i = a_0 a_j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil $b_0 b_i$ dan $b_0 b_j$ sisi di G dengan $f(b_0 b_i) = f(b_0 b_i)$

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $b_0 b_i = b_0 b_j$.

Karena $f(b_0 b_i) = f(b_0 b_i)$.

Maka $6m + 4 - 3i = 6m + 4 - 3j$

$$i = j$$

Jadi $b_0 b_i = b_0 b_j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil $c_0 c_i$ dan $c_0 c_j$ sisi di G dengan $f(c_0 c_i) = f(c_0 c_i)$

Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $c_0 c_i = c_0 c_j$.

Karena $f(c_0 c_i) = f(c_0 c_i)$.

Maka $6m + 5 - 3i = 6m + 5 - 3j$

$i = j$

Jadi $c_0 c_i = c_0 c_j$.

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3, \ldots, p + q\}$

2) G adalah fungsi surjektif

Akan ditunjukkan bahwa $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1,2,3, \dots, p+q\}$

a. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_i) \leq p+q$

Diketahui $f(a_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 3i+2$

$1 \leq i \leq 3i+2$

Jadi $1 \leq f(a_i) \leq p+q$

b. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_i) \leq p+q$

Diketahui $f(b_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 3i+3$

$1 \leq i \leq 3i+3$

Jadi $1 \leq f(b_i) \leq p+q$

c. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_i) \leq p+q$

Diketahui $f(c_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 3i+1$

$1 \leq i \leq 3i+1$

Jadi $1 \leq f(b_i) \leq p+q$

d. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0) \leq p+q$

Diketahui $f(a_0) = n-2$

Karena $1 \leq n-2 \leq 2n(m+1)$

Jadi $1 \leq f(a_0) \leq p+q$

e. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0) \leq p+q$

Diketahui $f(b_0) = n - 1$

Karena $1 \leq n - 1 \leq 2n(m + 1$

Jadi $1 \leq f(b_0) \leq p + q$

f. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0) \leq p + q$

Diketahui $f(c_0) = n$

Karena $1 \leq n \leq 2n(m + 1$

Jadi $1 \leq f(c_0) \leq p + q$

g. Akan dibuktikan $1 \leq f(\alpha_0 \alpha_i) \leq p + q$

Diketahui $f(\alpha_0 \alpha_i) = 6m + 6 - 3i,\ \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$6m + 6 - 2i - 1 \leq 6m + 6 - 2i - i \leq 6m + 6 - 2i - m$

$6m + 5 - 2i \leq 6m + 6 - 3i \leq 5m + 6 - 2i$

$1 \leq 6m + 5 - 2i \leq 6m + 6 - 3i \leq 5m + 6 - 2i \leq 6(m + 1)$

$1 \leq 6m + 6 - 3i \leq 6(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(a_0 a_i) \leq p + q$

h. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0 b_i) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0 b_i) = 6m + 4 - 3i,\ \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$6m + 4 - 2i - 1 \leq 6m + 4 - 2i - i \leq 6m + 4 - 2i - m$

$6m + 3 - 2i \leq 6m + 4 - 3i \leq 5m + 4 - 2i$

$1 \leq 6m + 3 - 2i \leq 6m + 4 - 3i \leq 5m + 4 - 2i \leq 6(m + 1)$

$1 \leq 6m + 4 - 3i \leq 6(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(b_0 b_i) \leq p + q$

i. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0 c_i) \leq p + q$

Diketahui $f(c_0 c_i) = 6m + 5 - 3i,\ \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$6m + 5 - 2i - 1 \leq 6m + 5 - 2i - i \leq 6m + 5 - 2i - m$

$6m + 4 - 2i \leq 6m + 5 - 3i \leq 5m + 5 - 2i$

$1 \leq 6m + 4 - 2i \leq 6m + 5 - 3i \leq 5m + 5 - 2i \leq 6(m + 1)$

$1 \leq 6m + 5 - 3i \leq 6(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(c_0 c_i) \leq p + q$

j. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0 b_0) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0 b_0) = 6m + 6$

Karena $1 \leq 6m + 6 \leq 6m + 6$

Jadi $1 \leq f(a_0 b_0) \leq p + q$

k. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0 c_0) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0 c_0) = 6m + 5$

Karena $1 \leq 6m + 5 \leq 6m + 6$

Jadi $1 \leq f(b_0 c_0) \leq p + q$

l. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0 a_0) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0 b_0) = 6m + 4$

Karena $1 \leq 6m + 4 \leq 6m + 6$

Jadi $1 \leq f(c_0 a_0) \leq p + q$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $1 \leq f(V) \leq p + q$ dan $1 \leq f(E) \leq p + q$. Artinya $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p + q\}|$ dan $f(G)$ adalah injektif maka sudah pasti $f(G)$ adalah surjektif. Karena $f(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka $f(G)$ bijektif.

ii) Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku:

$f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi $a_0 a_i$ di G diperoleh:

$f(a_0) + f(a_0 a_i) + f(a_i) = 1 + (6m + 6) - 3i + (3i + 2) = 6m + 9$

b. Untuk sisi $b_0 b_i$ di G diperoleh:

$f(b_0) + f(b_0 b_i) + f(b_i) = 2 + (6m + 4) - 3i + (3i + 3) = 6m + 9$

c. Untuk sisi $c_0 c_i$ di G diperoleh:

$f(c_0) + f(c_0 c_i) + f(c_i) = 3 + (6m + 5) - 3i + (3i + 1) = 6m + 9$

d. Untuk sisi $a_0 b_0$ di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0 b_0) + f(b_0) = 1 + (6m + 6) + 2 = 6m + 9$$

e. Untuk sisi $b_0 c_0$ di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0 c_0) + f(c_0) = 2 + (6m + 4) + 3 = 6m + 9$$

f. Untuk sisi $a_0 b_0$ di G diperoleh:

$$f(c_0) + f(c_0 a_0) + f(a_0) = 3 + (6m + 5) + 1 = 6m + 9$$

Jadi graf Hairy Cycle C_3' dengan m rambut adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib: $k = 6m + 9$

Teorema 9:

Graf Hairy Cycle C_4' dengan m rambut pada masing-masing titik sikel adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1,2,3, …, $p + q$} sedemikian hingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.2 perlu ditunjukkan bahwa :

i) G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, …, $p + q$}

ii) Untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

Misal:

$V(G) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m,\ b_0, b_1, b_2, \dots, b_m,\ c_0, c_1, c_2, \dots, c_m,\ d_0, d_1, d_2, \dots, d_m)$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$V_1(G) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$

$V_2(G) = (\ b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m)$

$V_3(G) = (\ c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)$

$V_4(G) = (\ d_0, d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$

Dimana:

a_0 sebagai titik pusat $V_1(G)$ dan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ sebagai titik ujung $V_1(G)$. b_0 sebagai titik pusat $V_2(G)$ dan $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ sebagai titik ujung $V_2(G)$. c_0 sebagai titik pusat $V_3(G)$ dan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ sebagai titik ujung $V_3(G)$. d_0 sebagai titik pusat $V_4(G)$ dan $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$ sebagai titik ujung $V_4(G)$. Sedangkan a_0, b_0, c_0 dan d_0 saling terhubung.

$E(G)$

$= (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0, b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0, c_0c_1, c_0c_2, \dots,$ $c_0c_m, c_0d_0, d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0a_0)$

Yang dikelompokkan sebagai berikut:

$E_1(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0)$

$E_2(G) = (b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0)$

$E_3(G) = (c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0d_0)$

$E_4(G) = (d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0a_0)$

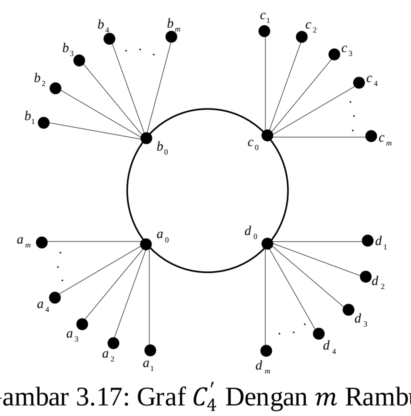
Jadi untuk C_4' dengan m rambut

$p = 4(m+1)$, dan $q = 4(m+1)$.

Maka $p + q = 4(m+1) + 4(m+1)$

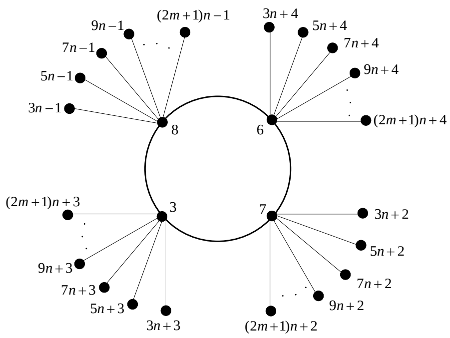
$= 8(m+1)$

Graf Hairy Cycle C_4' dengan m rambut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 3.17: Graf C_4' Dengan m Rambut

Dengan pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.18: Pelabelan Graf C_4' Dengan m Rambut

Didefinisikan fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3,\ldots,p+q\}$ sebagai berikut:

a. $f(a_0) \coloneqq 3$

b. $f(a_i) \coloneqq 8i + 7$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

c. $f(a_0 a_i) \coloneqq (8m + 5) - 8i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

d. $f(a_0 b_0) \coloneqq 8m + 4$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

e. $f(b_0) \coloneqq 8$

f. $f(b_i) \coloneqq 8i + 3$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

g. $f(b_0 b_i) \coloneqq (8m + 4) - 8i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

h. $f(b_0 c_0) \coloneqq 8m + 1$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

i. $f(c_0) \coloneqq 6$

j. $f(c_i) \coloneqq 8i + 8$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

k. $f(c_0 c_i) \coloneqq (8m + 1) - 8i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

l. $f(c_0 d_0) \coloneqq 8m + 2$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

m. $f(d_0) \coloneqq 7$

n. $f(d_i) \coloneqq 8i + 6$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

o. $f(dd_i) \coloneqq (8m + 2) - 8i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

p. $f(d_0 a_0) \coloneqq 8m + 5$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

Maka:

i) Akan ditunjukkan bahwa G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$

1) G adalah fungsi injektif

Untuk titik di G

Ambil V_i dan V_j titik di G dengan $f(V_i) = f(V_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $V_i = V_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$.

Karena $f(x_i) = f(x_j)$

Maka $i = j$

Jadi $x_i = x_j$

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_i) = f(a_j)$

Maka $2n\,i + 7 = 2n\,j + 7$

$i = j$

Jadi $a_i = a_j$

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(b_i) = f(b_j)$

Maka $2n\,i + 4 = 2n\,j + 4$

$i = j$

Jadi $b_i = b_j$

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$

Maka $2n\,i+1=2n\,j+1$

$i=j$

Jadi $c_i=c_j$

e. Untuk $1\le i\le m$, dan $1\le j\le m$.

Karena $f(d_i)=f(d_j)$

Maka $2n\,i+2=2n\,j+2$

$i=j$

Jadi $d_i=d_j$

Untuk sisi di G

a. Untuk $1\le i\le m$, dan $1\le j\le m$.

Ambil a_0a_i dan a_0a_j sisi di G dengan $f(a_0a_i)=f(a_0a_j)$. Akan dibuktikan $i=j$ sedemikian hingga $a_0a_i=a_0a_j$.

Karena $f(a_0a_i)=f(a_0a_j)$

Maka $8m+5-8i=8m+5-8j$

$i=j$

Jadi $a_0a_i=a_0a_j$.

b. Untuk $1\le i\le m$, dan $1\le j\le m$

Ambil b_0b_i dan b_0b_j sisi di G dengan $f(b_0b_i)=f(b_0b_i)$. Akan dibuktikan $i=j$ sedemikian hingga $b_0b_i=b_0b_j$.

Karena $f(b_0b_i)=f(b_0b_i)$.

Maka $8m+4-8i=8m+4-8j$

$i=j$

Jadi $b_0b_i=b_0b_j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil c_0c_i dan c_0c_j sisi di G dengan $f(c_0c_i) = f(c_0c_i)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $c_0c_i = c_0c_j$.

Karena $f(c_0c_i) = f(c_0c_i)$.

Maka $8m + 1 - 8i = 8m + 1 - 8j$

$i = j$

Jadi $c_0c_i = c_0c_j$.

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil d_0d_i dan d_0d_j sisi di G dengan $f(d_0d_i) = f(d_0d_i)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $d_0d_i = d_0d_j$.

Karena $f(d_0d_i) = f(d_0d_i)$.

Maka $8m + 2 - 8i = 8m + 2 - 8j$

$i = j$

Jadi $d_0d_i = d_0d_j$.

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3, \dots, p + q\}$

2) G adalah fungsi surjektif

Akan ditunjukkan bahwa $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1,2,3, \dots, p + q\}$

a. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_i) \leq p + q$

Diketahui $f(a_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 8i + 7$

$1 \leq i \leq 8i + 7$

Jadi $1 \leq f(a_i) \leq p + q$

b. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_i) \leq p + q$

Diketahui $f(b_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 8i + 3$

$1 \leq i \leq 8i + 3$

Jadi $1 \leq f(b_i) \leq p + q$

c. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_i) \leq p + q$

Diketahui $f(c_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 8i + 8$

$1 \leq i \leq 8i + 8$

Jadi $1 \leq f(c_i) \leq p + q$

d. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_i) \leq p + q$

Diketahui $f(d_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 8i + 6$

$1 \leq i \leq 8i + 6$

Jadi $1 \leq f(d_i) \leq p + q$

e. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0) = n - 1$

Karena $1 \leq n - 1 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(a_0) \leq p + q$

f. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0) = n + 4$

Karena $1 \leq n + 4 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(b_0) \leq p + q$

g. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0) \leq p + q$

Diketahui $f(c_0) = n + 2$

Karena $1 \leq n + 2 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(c_0) \leq p + q$

h. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_0) \leq p + q$

Diketahui $f(d_0) = n + 3$

Karena $1 \leq n + 3 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(d_0) \leq p + q$

i. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0 a_i) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0 a_i) = 8m + 5 - 8i,\ \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$8m + 5 - 7i - 1 \leq 8m + 5 - 7i - i \leq 8m + 5 - 7i - m$

$8m + 4 - 7i \leq 8m + 5 - 8i \leq 7m + 5 - 7i$

$1 \leq 8m + 4 - 7i \leq 8m + 5 - 8i \leq 7m + 5 - 7i \leq 8(m + 1)$

$1 \leq 8m + 5 - 8i \leq 8(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(a_0 a_i) \leq p + q$

j. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0 b_i) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0 b_i) = 8m + 4 - 8i,\ \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$8m + 4 - 7i - 1 \leq 8m + 4 - 7i - i \leq 8m + 4 - 7i - m$

$8m + 3 - 7i \leq 8m + 4 - 8i \leq 7m + 4 - 7i$

$1 \leq 8m + 3 - 7i \leq 8m + 4 - 8i \leq 7m + 4 - 7i \leq 6(m + 1)$

$1 \leq 8m + 4 - 8i \leq 8(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(b_0 b_i) \leq p + q$

k. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0 c_i) \leq p + q$

Diketahui $f(c_0 c_i) = 8m + 1 - 8i, \ \forall\, 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$8m + 1 - 7i - 1 \leq 8m + 1 - 7i - i \leq 8m + 1 - 7i - m$

$8m - 7i \leq 8m + 1 - 8i \leq 7m + 1 - 7i$

$1 \leq 8m + 7i \leq 8m + 1 - 8i \leq 7m + 1 - 7i \leq 6(m + 1)$

$1 \leq 8m + 1 - 8i \leq 6(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(c_0 c_i) \leq p + q$

l. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_0 d_i) \leq p + q$

Diketahui $f(d_0 d_i) = 8m + 2 - 8i, \ \forall\, 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$-1 \leq -i \leq -m$

$8m + 2 - 7i - 1 \leq 8m + 2 - 7i - i \leq 8m + 2 - 7i - m$

$8m + 1 - 7i \leq 8m + 2 - 8i \leq 7m + 2 - 7i$

$1 \leq 8m + 1 - 7i \leq 8m + 2 - 8i \leq 7m + 2 - 7i \leq 6(m + 1)$

$1 \leq 8m + 2 - 8i \leq 6(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(d_0 d_i) \leq p + q$

m. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0 b_0) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0 b_0) = 8m + 4$

Karena $1 \leq 8m + 4 \leq 8m + 8$

Jadi $1 \leq f(a_0 b_0) \leq p + q$

n. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0 c_0) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0 c_0) = 8m + 1$

Karena $1 \leq 8m + 1 \leq 8m + 8$

Jadi $1 \leq f(b_0 c_0) \leq p + q$

o. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0 d_0) \leq p + q$

Diketahui $f(c_0 d_0) = 8m + 2$

Karena $1 \leq 8m + 2 \leq 8m + 8$

Jadi $1 \leq f(c_0 d_0) \leq p + q$

p. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_0 a_0) \leq p + q$

Diketahui $f(d_0 a_0) = 8m + 5$

Karena $1 \leq 8m + 5 \leq 8m + 8$

Jadi $1 \leq f(d_0 a_0) \leq p + q$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $1 \leq f(V) \leq p + q$ dan $1 \leq f(E) \leq p + q$. Artinya $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}|$ dan $f(G)$ adalah injektif maka sudah pasti $f(G)$ adalah surjektif. Karena $f(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka $f(G)$ bijektif.

ii). Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku:

$f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi a_0a_i di G diperoleh:

$f(a_0) + f(a_0a_i) + f(a_i) = 3 + (8m + 5) - 8i + (8i + 7) = 8m + 15$

b. Untuk sisi b_0b_i di G diperoleh:

$f(b_0) + f(b_0b_i) + f(b_i) = 8 + (8m + 4) - 8i + (8i + 3) = 8m + 15$

c. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 6 + (8m + 1) - 8i + (8i + 8) = 8m + 15$

d. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 7 + (8m + 2) - 8i + (8i + 6) = 8m + 15$

e. Untuk sisi a_0b_0 di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 3 + (8m + 4) + 8 = 8m + 15$$

f. Untuk sisi b_0c_0 di G diperoleh:

$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 8 + (8m + 1) + 6 = 8m + 15$

g. Untuk sisi c_0d_0 di G diperoleh:

$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 6 + (8m + 2) + 7 = 8m + 15$

h. Untuk sisi d_0a_0 di G diperoleh:

$f(d_0) + f(d_0a_0) + f(a_0) = 7 + (8m + 5) + 3 = 8m + 15$

Jadi $G(C_4'$ dengan m rambut $)$ adalah tota sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 8m + n + 11$$

Teorema 10:

Graf Hairy Cycle C_6' dengan m rambut untuk masing-masing titik pada sikel adalah total sisi ajaib.

Bukti:

Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph G dengan order p dan ukuran q adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1,2,3, …, $p+q$} sedemikian hingga untuk masing-masing sisi xy di G berlaku $f(x)+f(xy)+f(y)=k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.3 perlu ditunjukkan bahwa :

i) G adalah fungsi bijektif f dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, …, $p+q$}

ii) untuk masing-masing sisi xy di G berlaku

$$f(x)+f(xy)+f(y)=k$$

Misal:

$V(G)=(a_0,a_1,a_2,\dots,a_m,\ b_0,b_1,b_2,\dots,b_m,\ c_0,c_1,c_2,\dots,c_m,\ d_0,d_1,d_2,\dots,d_m,\ e_0,e_1,e_2,\dots,e_m)$

yang dikelompokkan sebagai berikut:

$V_1(G)=(a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_m)$

$V_2(G)=(\ b_0,b_1,b_2,b_3,\dots,b_m)$

$V_3(G)=(\ c_0,c_1,c_2,c_3,\dots,c_m)$

$V_4(G)=(\ d_0,d_1,d_2,d_3,\dots,d_m)$

$V_5(G)=(\ e_0,e_1,e_2,e_3,\dots,e_m)$

Dimana:

a_0 sebagai titik pusat $V_1(G)$ dan $a_1,a_2,a_3,\dots,a_m$ sebagai titik ujung $V_1(G)$. b_0 sebagai titik pusat $V_2(G)$ dan $b_1,b_2,b_3,\dots,b_m$ sebagai titik ujung $V_2(G)$. c_0 sebagai titik pusat $V_3(G)$ dan $c_1,c_2,c_3,\dots,c_m$ sebagai titik ujung $V_3(G)$. d_0 sebagai titik pusat $V_4(G)$ dan $d_1,d_2,d_3,\dots,d_m$ sebagai titik ujung $V_4(G)$. e_0 sebagai titik pusat $V_5(G)$ dan

$e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ sebagai titik ujung $V_5(G)$. Sedangkan a_0, b_0, c_0, d_0 dan e_0 saling terhubung.

$E(G)$

$= (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0, b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0, c_0c_1, c_0c_2, \dots,$

$c_0c_m, c_0d_0, d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0e_0, e_0e_1, e_0e_2, \dots, e_0e_m, e_0a_0)$

Yang dikelompokkan sebagai berikut:

$E_1(G) = (a_0a_1, a_0a_2, \dots, a_0a_m, a_0b_0)$

$E_2(G) = (\ b_0b_1, b_0b_2, \dots, b_0b_m, b_0c_0)$

$E_3(G) = (\ c_0c_1, c_0c_2, \dots, c_0c_m, c_0d_0)$

$E_4(G) = (\ d_0d_1, d_0d_2, \dots, d_0d_m, d_0e_0)$

$E_5(G) = (\ e_0e_1, e_0e_2, \dots, e_0e_m, e_0a_0)$

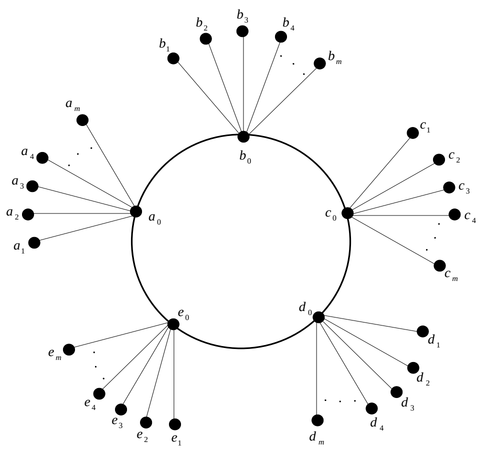
Jadi untuk C_5' dengan m rambut

$p = 5(m+1),$ dan $q = 5(m+1)$.

Maka $p + q = 5(m+1) + 5(m+1)$

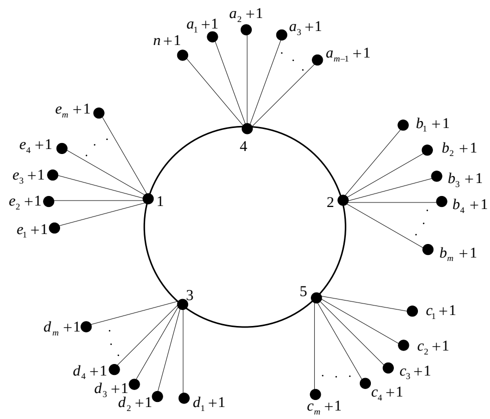
$= 10(m+1)$

Graf Hairy Cycle C_5' dengan m rambut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 3.26: Graf C_5' Dengan m Rambut

Dengan pelabelan sebagai berikut:



Gambar 3.27: Pelabelan Graf C_5' Dengan m Rambut

Fungsi f dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3,\ldots,p+q\}$ didefinisikan sebagai berikut:

a. $f(a_0) \coloneqq 1$

b. $f(a_i) \coloneqq 5i + 5$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

c. $f(a_0a_i) \coloneqq (10m + 8) - 5i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

d. $f(a_0b_0) \coloneqq 10m + 9$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

e. $f(b_0) \coloneqq 4$

f. $f(b_i) \coloneqq 5i + 1$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

g. $f(b_0b_i) \coloneqq (10m + 9) - 5i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

h. $f(b_0c_0) \coloneqq 10m + 8$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

i. $f(c_0) \coloneqq 2$

j. $f(c_i) \coloneqq 5i + 2$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

k. $f(c_0c_i) \coloneqq (10m + 10) - 5i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

l. $f(c_0d_0) \coloneqq 10m + 7$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

m. $f(d_0) \coloneqq 5$

n. $f(d_i) \coloneqq 5i + 3$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

o. $f(d_0d_i) \coloneqq (10m + 6) - 5i$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,m$

p. $f(d_0e_0) \coloneqq 10m + 6$ untuk $i = 1,2,3, \dots, m$

q. $f(e_0) \coloneqq 3$

r. $f(e_i) \coloneqq 5i + 4$ untuk $i = 1,2,3, \dots, m$

s. $f(e_0e_i) \coloneqq (10m + 7) - 5i$ untuk $i = 1,2,3, \dots, m$

t. $f(e_0a_0) \coloneqq 10m + 10$ untuk $i = 1,2,3, \dots, m$

Maka:

i) Akan ditunjukkan bahwa G adalah fungsi bijektif f dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$

a. G adalah fungsi injektif

Untuk titik di G

Ambil V_i dan V_j titik di G dengan $f(V_i) = f(V_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $V_i = V_j$.

a. Untuk $1 \leq i \leq n$, dan $1 \leq j \leq n$.

Karena $f(x_i) = f(x_j)$

Maka $i = j$

Jadi $x_i = x_j$

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(a_i) = f(a_j)$

Maka $n\,i + 5 = n\,j + 5$

$i = j$

Jadi $a_i = a_j$

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(b_i) = f(b_j)$

Maka $n\,i + 1 = n\,j + 1$

$i = j$

Jadi $b_i = b_j$

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$

Maka $n\,i + 2 = n\,j + 2$

$i = j$

Jadi $c_i = c_j$

e. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$

Maka $n\,i + 3 = n\,j + 3$

$i = j$

Jadi $c_i = c_j$

f. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Karena $f(c_i) = f(c_j)$

Maka $n\,i + 4 = n\,j + 4$

$i = j$

Jadi $c_i = c_j$

Untuk sisi di G

a. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$.

Ambil a_0a_i dan a_0a_j sisi di G dengan $f(a_0a_i) = f(a_0a_j)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $a_0a_i = a_0a_j$.

Karena $f(a_0a_i) = f(a_0a_j)$

Maka $10m + 8 - 5i = 10m + 8 - 5j$

$i = j$

Jadi $a_0 a_i = a_0 a_j$.

b. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil $b_0 b_i$ dan $b_0 b_j$ sisi di G dengan $f(b_0 b_i) = f(b_0 b_i)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $b_0 b_i = b_0 b_j$.

Karena $f(b_0 b_i) = f(b_0 b_i)$.

Maka $10m + 9 - 5i = 10m + 9 - 5j$

$$i = j$$

Jadi $b_0 b_i = b_0 b_j$.

c. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil $c_0 c_i$ dan $c_0 c_j$ sisi di G dengan $f(c_0 c_i) = f(c_0 c_i)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $c_0 c_i = c_0 c_j$.

Karena $f(c_0 c_i) = f(c_0 c_i)$.

Maka $10m + 10 - 5i = 10m + 10 - 5j$

$i = j$

Jadi $c_0 c_i = c_0 c_j$

d. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil $d_0 d_i$ dan $d_0 d_j$ sisi di G dengan $f(d_0 d_i) = f(d_0 d_i)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $d_0 d_i = d_0 d_j$.

Karena $f(d_0 d_i) = f(d_0 d_i)$.

Maka $10m + 6 - 5i = 10m + 6 - 5j$

$i = j$

Jadi $c_0c_i = c_0c_j$.

e. Untuk $1 \leq i \leq m$, dan $1 \leq j \leq m$

Ambil e_0e_i dan e_0e_j sisi di G dengan $f(e_0e_i) = f(e_0e_i)$. Akan dibuktikan $i = j$ sedemikian hingga $e_0e_i = e_0e_j$.

Karena $f(e_0e_i) = f(e_0e_i)$.

Maka $10m + 7 - 5i = 10m + 7 - 5j$

$i = j$

Jadi $e_0e_i = e_0e_j$

Jadi f merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1,2,3, \dots, p + q\}$

b. G adalah fungsi surjektif

Akan ditunjukkan bahwa $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1,2,3, \dots, p + q\}$

a. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_i) \leq p + q$

Diketahui $f(a_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 5i + 5$

$$1 \leq i \leq 5i + 5$$

Jadi $1 \leq f(a_i) \leq p + q$

b. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_i) \leq p + q$

Diketahui $f(b_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 5i + 1$

$$1 \leq i \leq 5i + 1$$

Jadi $1 \leq f(b_i) \leq p + q$

c. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_i) \leq p + q$

Diketahui $f(c_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 5i + 2$

$$1 \leq i \leq 5i + 2$$

Jadi $1 \leq f(c_i) \leq p + q$

d. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_i) \leq p + q$

Diketahui $f(d_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 5i + 3$

$$1 \leq i \leq 5i + 3$$

Jadi $1 \leq f(d_i) \leq p + q$

e. Akan dibuktikan $1 \leq f(e_i) \leq p + q$

Diketahui $f(e_i) = i, \forall\ 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $1 \leq i \leq m \leq 5i + 4$

$$1 \leq i \leq 5i + 4$$

Jadi $1 \leq f(e_i) \leq p + q$

f. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0) = n - 4$

Karena $1 \leq n - 4 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(a_0) \leq p + q$

g. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0) = n - 1$

Karena $1 \leq n - 1 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(b_0) \leq p+q$

h. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0) \leq p+q$

Diketahui $f(c_0) = n-3$

Karena $1 \leq n-3 \leq 2n(m+1)$

Jadi $1 \leq f(c_0) \leq p+q$

i. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_0) \leq p+q$

Diketahui $f(d_0) = n$

Karena $1 \leq n-3 \leq 2n(m+1)$

Jadi $1 \leq f(d_0) \leq p+q$

j. Akan dibuktikan $1 \leq f(e_0) \leq p+q$

Diketahui $f(e_0) = n-2$

Karena $1 \leq n-2 \leq 2n(m+1)$

Jadi $1 \leq f(e_0) \leq p+q$

k. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0a_i) \leq p+q$

Diketahui $f(a_0a_i) = 10m+8-5i,\ \forall\, 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$$-1 \leq -i \leq -m$$

$$10m+8-4i-1 \leq 10m+8-4i-i \leq 10m+8-4i-m$$

$$10m+7-4i \leq 10m+8-5i \leq 9m+8-4i$$

$$1 \leq 10m+7-4i \leq 10m+8-5i \leq 9m+8-4i \leq 2n(m+1)$$

$$1 \leq 10m+8-5i \leq 2n(m+1)$$

Jadi $1 \leq f(a_0a_i) \leq p+q$

l. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0b_i) \leq p+q$

Diketahui $f(b_0b_i) = 10m + 9 - 5i,\ \forall\, 1 \le i \le m$

Karena $1 \le i \le m$

Maka $-1.1 \le -1.i \le -1.m$

$-1 \le -i \le -m$

$10m + 9 - 4i - 1 \le 10m + 9 - 4i - i \le 10m + 9 - 4i - m$

$10m + 8 - 4i \le 10m + 9 - 5i \le 9m + 9 - 4i$

$1 \le 10m + 8 - 4i \le 10m + 9 - 5i \le 9m + 9 - 4i \le 2n(m + 1)$

$1 \le 10m + 9 - 5i \le 2n(m + 1)$

Jadi $1 \le f(b_0b_i) \le p + q$

m. Akan dibuktikan $1 \le f(c_0c_i) \le p + q$

Diketahui $f(c_0c_i) = 10m + 10 - 5i,\ \forall\, 1 \le i \le m$

Karena $1 \le i \le m$

Maka $-1.1 \le -1.i \le -1.m$

$-1 \le -i \le -m$

$10m + 10 - 4i - 1 \le 10m + 10 - 4i - i \le 10m + 10 - 4i - m$

$10m + 9 - 4i \le 10m + 10 - 5i \le 9m + 10 - 4i$

$1 \le 10m + 9 - 4i \le 10m + 10 - 5i \le 9m + 10 - 4i \le 2n(m + 1)$

$1 \le 10m + 10 - 5i \le 2n(m + 1)$

Jadi $1 \le f(c_0c_i) \le p + q$

n. Akan dibuktikan $1 \le f(d_0d_i) \le p + q$

Diketahui $f(d_0d_i) = 10m + 6 - 5i,\ \forall\, 1 \le i \le m$

Karena $1 \le i \le m$

Maka $-1.1 \le -1.i \le -1.m$

$-1 \le -i \le -m$

$$10m + 6 - 4i - 1 \leq 10m + 6 - 4i - i \leq 10m + 6 - 4i - m$$

$$10m + 5 - 4i \leq 10m + 6 - 5i \leq 9m + 6 - 4i$$

$$1 \leq 10m + 5 - 4i \leq 10m + 6 - 5i \leq 9m + 6 - 4i \leq 2n(m + 1)$$

$$1 \leq 10m + 6 - 5i \leq 2n(m + 1)$$

Jadi $1 \leq f(d_0 d_i) \leq p + q$

o. Akan dibuktikan $1 \leq f(e_0 e_i) \leq p + q$

Diketahui $f(e_0 e_i) = 10m + 7 - 5i, \ \forall\, 1 \leq i \leq m$

Karena $1 \leq i \leq m$

Maka $-1.1 \leq -1.i \leq -1.m$

$$-1 \leq -i \leq -m$$

$$10m + 7 - 4i - 1 \leq 10m + 7 - 4i - i \leq 10m + 7 - 4i - m$$

$$10m + 6 - 4i \leq 10m + 7 - 5i \leq 9m + 7 - 4i$$

$$1 \leq 10m + 6 - 4i \leq 10m + 7 - 5i \leq 9m + 7 - 4i \leq 2n(m + 1)$$

$$1 \leq 10m + 7 - 5i \leq 2n(m + 1)$$

Jadi $1 \leq f(e_0 e_i) \leq p + q$

p. Akan dibuktikan $1 \leq f(a_0 b_0) \leq p + q$

Diketahui $f(a_0 b_0) = 10m + 9$

Karena $1 \leq 10m + 9 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(a_0 b_0) \leq p + q$

q. Akan dibuktikan $1 \leq f(b_0 c_0) \leq p + q$

Diketahui $f(b_0 c_0) = 10m + 8$

Karena $1 \leq 10m + 8 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(b_0 c_0) \leq p + q$

r. Akan dibuktikan $1 \leq f(c_0 d_0) \leq p + q$

Diketahui $f(c_0d_0) = 6m + 4$

Karena $1 \leq 10m + 7 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(c_0d_0) \leq p + q$

s. Akan dibuktikan $1 \leq f(d_0e_0) \leq p + q$

Diketahui $f(d_0e_0) = 10m + 6$

Karena $1 \leq 10m + 6 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(d_0e_0) \leq p + q$

t. Akan dibuktikan $1 \leq f(e_0a_0) \leq p + q$

Diketahui $f(e_0a_0) = 10m + 10$

Karena $1 \leq 10m + 10 \leq 2n(m + 1)$

Jadi $1 \leq f(e_0a_0) \leq p + q$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $1 \leq f(V) \leq p + q$ dan $1 \leq f(E) \leq p + q$. Artinya $V(G) \cup E(G)$ dipetakan ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$. Karena $|V(G) \cup E(G)| = |\{1, 2, 3, \dots, p + q\}|$ dan $f(G)$ adalah injektif maka sudah pasti $f(G)$ adalah surjektif. Karena $f(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka $f(G)$ bijektif.

ii). Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi xy di G berlaku:

$f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi a_0a_i di G diperoleh:

$$f(a_0) + f(a_0a_i) + f(a_i) = 1 + (10m + 8) - 5i + (5i + 5)$$
$$= 10m + 14$$

b. Untuk sisi b_0b_i di G diperoleh:

$$f(b_0) + f(b_0b_i) + f(b_i) = 4 + (10m + 9) - 5i + (5i + 1)$$
$$= 10m + 14$$

c. Untuk sisi c_0c_i di G diperoleh:

$f(c_0) + f(c_0c_i) + f(c_i) = 2 + (10m + 10) - 5i + (5i + 2)$

$= 10m + 14$

d. Untuk sisi e_0e_i di G diperoleh:

$f(d_0) + f(d_0d_i) + f(d_i) = 5 + (10m + 6) - 5i + (5i + 3) = 10m + 14$

e. Untuk sisi e_0e_i di G diperoleh:

$f(e_0) + f(e_0e_i) + f(e_i) = 3 + (10m + 7) - 5i + (5i + 4) = 10m + 14$

f. Untuk sisi a_0b_0 di G diperoleh:

$f(a_0) + f(a_0b_0) + f(b_0) = 1 + (10m + 9) + 4 = 10m + 14$

g. Untuk sisi b_0c_0 di G diperoleh:

$f(b_0) + f(b_0c_0) + f(c_0) = 4 + (10m + 8) + 2 = 10m + 14$

h. Untuk sisi c_0d_0 di G diperoleh:

$f(c_0) + f(c_0d_0) + f(d_0) = 2 + (10m + 7) + 5 = 10m + 14$

i. Untuk sisi d_0e_0 di G diperoleh:

$f(d_0) + f(d_0e_0) + f(e_0) = 5 + (10m + 6) + 3 = 10m + 14$

j. Untuk sisi e_0a_0 di G diperoleh:

$f(e_0) + f(e_0a_0) + f(a_0) = 3 + (10m + 10) + 1 = 10m + 14$

Jadi $G(C_3^{'}$ dengan m rambut $)$ adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 10m + 14$$

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka beberapa kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut.

1. Graf multi star tipe 1 $MS^1(m)$ adalah super sisi ajaib
2. Graf multi star tipe 2 $MS^2(m)$ adalah super sisi ajaib
3. Graf Hairy Cycle C'_3, C'_4, C'_5 dan C'_6 adalah total sisi ajaib.

B. Saran

Berdasarkan penelitian, disarankan kepada peneliti yang lain untuk mengkaji pelabelan super sisi ajaib pada graf yang lain serta melanjutkan penelitian pelabelan total sisi ajaib untuk graf hairy cycle secara umum.

.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2010. *Pelabelan Sisi Ajaib Super pada Beberapa Bentuk Graf Ulat*. Prosiding Seminar Nasional UI-UNPAD 2010.

Baskoro, E.T. Sudarsana, I.W., dan Cholily, Y.M.. 2005. How to Construct New Super Edge-magic Grafs from Some Old Ones. *J. Indones. Math. Soc.* (MIHMI) 11:2: 155-162.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graf Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graf and Digraf 2^nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Gallian, J. A.. 2009. A Dynamic Survey of Graf Labeling, 12^th Edition. *The Electronic Journal of Combinatorics*.

Hussain, M., Baskoro, E.T. dan Slamin. 2009. On Super Edge-Magic Total Labeling of Banana Trees. *Utilitas Math.* 79: 243-251.

Irawan, Andy. 2007. Super Edge Magic Labeling pada Graf Ulat Model Trisula dengan Panjang n. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. Malang: UIN Malang

Miller, Mirka. 2000. *Open Problems in Graf Theory: Labelings and Extremal Grafs*. Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.

Khikmah, Syafa'atul. 2005. Super Edge-Magic Labeling pada Graf Ulat dengan n Badan dan n Kaki. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. Malang: UIN Malang.

Lorentz, Thereziea. 2009. Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Ulat (Caterpillars) yang Mempunyai n Badan dan 2n Kaki dengan n Bilangan Asli. Skripsi Jurusan Matematika - Fakultas MIPA UM. (Online http://karya-ilmiah.um.ac.id/index.php/matematika/article/view/5098 diakses 3 September 2010)

Park, J.Y., Choi, J.H., dan Bae, Jae-Hyeong. 2008. On Super Edge-Magic Labeling of Some Grafs. *Bull. Korean Math. Soc*. 45, No. 1 hal: 11–21

Rohima, Nur. 2005. Super Edge-Magic Labeling pada Graf Ulat Berekor dengan n Badan dan 2 Kaki pada Tiap Badan. Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang. Malang: UIN Malang.

Wallis, W.D. Baskoro, E.T. Miller, M. dan Slamin. 2000. Edge-Magic Total Labelings *Australas. J. Combin.* 22: 177-190

Williyanto, Candra dan Irawanto, Bambang (2009) *Super Edge-Magic Labeling on Caterpillar Graf Model T€ With Length n.* Undergraduate thesis, FMIPA Universitas Diponegoro. (online http://eprints.undip.ac.id/2022/ diakses 3 September 2010)