MATEMATIKA

LAPORAN

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

SPEKTRUM GRAF *COMMUTING* SUATU GRUP

Oleh:

ABDUSSAKIR, M.Pd (Ketua)

AMALIA INTIFADA (Anggota)

MOH. ZAINAL ARIFANDI (Anggota)

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2013

LAPORAN

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

1. Judul Penelitian Hibah	:	Spektrum Graf Commuting Suatu Grup
2. Bidang Ilmu	:	Aljabar
3. Peneliti	:	Abdussakir, M.Pd (NIP. 19751006 200312 1 001)
		Amalia Intifada (NIM. 09610090)
		Moh. Zainal Arifandi (NIM. 09610029)
4. Jurusan/Prodi Asal	:	Matematika

Telah disahkan pada tanggal 8 Nopember 2013.

	Malang, 8 Nopember 2013
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi,	Ketua Peneliti,
Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si	Abdussakir, M.Pd
NIP. 19710919 200003 2 001	NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui

Ketua LP2M,

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.

NIP. 19600910 198903 2 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, sehingga dengan rahmat dan hidayah-Nya proposal penelitian dengan judul "*Spektrum Graf Commuting Suatu Grup*" dapat diselesaikan. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang telah membimbing manusia menuju jalan yang lurus, yaitu agama Islam.

Pada penelitian ini, akan ditentukan spektrum (*adjacency*, Laplace, Signless Laplace, dan Detour) dari graf commuting beberapa grup, yaitu grup dihedral (D_{2n}), grup simetri (S_n), dan grup hasil bagi Z/nZ. Penelitian dimulai dengan menentukan graf commuting, menyatakan graf commuting dalam matriks, mencari nilai eigen dan vektor eigen, dan terakhir menentukan spektrumnya.

Selama penyusunan proposal ini, peneliti telah dibantu oleh banyak pihak. Pada kesempatan ini, peneliti menyampaikan terima kasih kepada.

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh Pembantu Dekan di Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, beserta rekan-rekan dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Staf Karyawan di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Peneliti mendo'akan semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT.

Malang, Juli 2013

Tim Peneliti

SPEKTRUM GRAF COMMUTING SUATU GRUP

ABSTRAK

Pada penelitian ini, ditentukan spektrum Laplace dari graf commuting beberapa grup dihedral (D_{2n}). Penelitian dimulai dengan menentukan graf commuting, menyatakan graf commuting dalam matriks, mencari nilai eigen dan vektor eigen, dan terakhir menentukan spektrumnya. Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa spektrum Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$spec_L(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik matriks signless Laplace graf commuting dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$p(\lambda) = 1(\lambda - (n - 2))^{n-2}(\lambda - 1)^{n-1}(-\lambda^3 + (4n-3)\lambda + (-4n^2+6n)\lambda + (2n^2-6n+4)).$$

Penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menentukan spektrum *Adjacency*, spekturm Detour, atau spectrum *Signless Laplace* pada graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n}. Selain itu penelitian dapat dilanjutkan pada penentuan spectrum *Adjacency*, spekturm Detour, spectrum Laplace, atau spectrum *Signless Laplace* graf *non commuting* dari suatu grup *non abelian*.

DAFTAR ISI

Halaman Sampul
Halaman Pengesahan
Kata Pengantar i
Abstrak ii
Daftar Isi iii

BAB I PENDAHULUAN
A. Latar Belakang 1
B. Rumusan Masalah 3
C. Tujuan Penelitian 4
D. Manfaat Penelitian 4

BAB II STUDI PUSTAKA
A. Graf 5
B. Derajat Titik 5
C. Graf Terhubung 8
D. Graf dan Matriks 11
E. Spektrum Graf 13
F. Grup 17
G. Graf Commuting 20

BAB III METODE PENELITIAN
A. Jenis Penelitian 22
B. Tahap Penelitian 22

BAB IV PEMBAHASAN
A. Spektrum Laplace Graf Commuting dari Grup Dihedral 24
B. Polinomial Karakteristik Matriks Signless Laplace Graf Commuting dari Grup Dihedral 48
C. Spektrum Laplace Graf Commuting dari Grup Dihedral D_8 59

BAB V PENUTUP
A. Kesimpulan 65
B. Saran 65

DAFTAR PUSTAKA

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$.

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks adjacency dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks adjacency suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks Laplace dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks Signed-Laplace dari graf G.

Pada graf G, lintasan-v_1v_n adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkankan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks Detour dari G adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G.

Pembahasan matriks Adjacency $A(G)$, matriks Laplace $L(G)$, matriks Signed-Laplace $L^+(G)$, dan matriks Detour $DD(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep *spectrum*. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan Spec(G). Jadi, spectrum graf G dapat ditulis dengan

$$\text{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum Adjacency, dari matriks $L(G)$ disebut spektrum Laplace, dari matriks $L^+(G)$ disebut spekturm Signed-Laplace, dan dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum Detour.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin (2008) meneliti spektrum Adjacency dan spektrum Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum adjacency pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy & Balachandran (2010) meneliti spektrum Detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n, n)$, graf Korona G dan K_1, graf perkalian Kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan. Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum Adjacency, Laplace, Singless Laplace, dan Detour graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat komutatif. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf commuting C(G,X) adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik x dan y akan terhubung langsung di C(G,X) jika dan hanya jika xy = yx di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Dalam penelitian mengenai graf commuting, Vahidi & Talebi (2010) membahas tentang bilangan bebas, bilangan clique, dan bilangan cover minimum. Chelvam, dkk (2011) meneliti tentang bilangan kromatik dan bilangan clique pada graf commuting yang diperoleh dari grup dihedral.

Berdasarkan uraian di atas, belum ada yang mengkaji spektrum pada graf commuting. Pada penelitian ini, dikaji spektrum Laplace dan Signless Laplace graf commuting grup dihedral (D_{2n}).

B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana spektrum Laplace dan signless Laplace graf commuting grup dihedral (D_{2n}).

C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan spektrum Laplace dan signless Laplace graf commuting grup dihedral (D_{2n}).

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai *spektrum* suatu graf commuting yang diperolah dari suatu grup.
2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topic dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai spektrum graf *Commuting* yang terbentuk dari grup dihedral berdasarkan tabel *Cayley*.

A. Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral

Seperti yang telah diketahui bahwa grup dihedral merupakan grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan. Di sini grup dihedral akan dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

i) $x = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian rotasi;

ii) $y = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ atau yang dikenal dengan himpunan bagian refleksi atau dapat dituliskan sebagai $x \subset D_{2n}$ dan $y \subset D_{2n}$. Hasil operasi komposisi pada grup dihedral akan diberikan dalam bentuk tabel *Cayley*.

1. Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_6

Hasil operasi komposisi pada grup dihedral berbentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

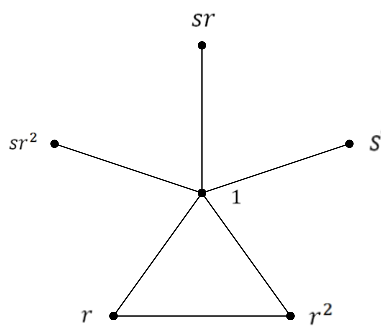
$\circ$	1	R	r^2	s	sr	sr^2
1	1	R	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	Sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	S	sr	r	r^2	1

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* D_6

Dari tabel *Cayley* 3.1, hasil operasi komposisi grup dihedral akan digambarkan ke dalam bentuk graf *Commuting*. Berdasarkan tabel *Cayley* berikut dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi $\circ$. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif disajikan dalam bentuk daftar seperti berikut:

$$
\begin{array}{ccc}
r \circ 1 = 1 \circ r & 1 \circ 1 = 1 \circ 1 & r \circ r^2 = r^2 \circ r \\
r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2 & r \circ r = r \circ r & \\
s \circ 1 = 1 \circ s & r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2 & \\
sr \circ 1 = 1 \circ sr & s \circ s = s \circ s & \\
sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2 & sr \circ sr = sr \circ sr & \\
 & sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2 &
\end{array}
$$

Elemen-elemen dari grup dihedral yang komutatif didapatkan graf sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf *Commuting* D_6

Untuk graf *Commuting* D_6 dengan graf tersebut mengahasilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
D = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$L = D - A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

$$\det(L-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & 2-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-6+\lambda)\,\lambda \end{bmatrix}$$

Karena det(L-λI) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\det(L-\lambda I) = -1(-3+\lambda)(-1+\lambda)^3((-6+\lambda)\lambda)$$

Karena det(L-λI)=0, maka

$$\det(L-\lambda I) = -1(-3+\lambda)(-1+\lambda)^3((-6+\lambda)\lambda) = 0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=0,\ \lambda=3,\ \lambda=1,\ \lambda=6$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-0 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=3 disubtitusikan ke dalam (L- λ I)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ =3 adalah 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=1 disubtitusikan ke dalam (L- λ I)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=1$ adalah 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk $\lambda_4=6$ disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)=0$ diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5-6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2-6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2-6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1-6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-6 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=6$ adalah 1.

Jadi spektrum Laplace untuk graf *Commuting* $D_6 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{10}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{10} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel *Cayley* dari D_{10}.

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* dari D_{10}

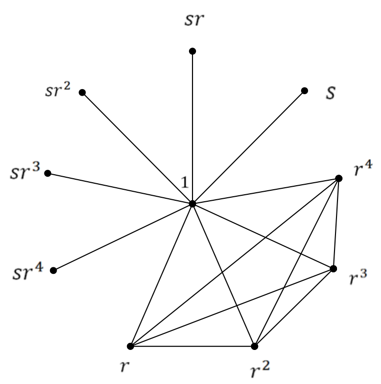
Berdasarkan tabel *Cayley* di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10} dengan operasi $\circ$. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10}, disajikan ke dalam daftar berikut:

$$r \circ 1 = 1 \circ r$$
$$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$$
$$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$$
$$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$$
$$s \circ 1 = 1 \circ s$$
$$sr \circ 1 = 1 \circ sr$$
$$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$$
$$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$$
$$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$$

$$r \circ r^2 = r^2 \circ r$$
$$r \circ r^3 = r^3 \circ r$$
$$r \circ r^4 = r^4 \circ r$$
$$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$$
$$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$$
$$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$$

$$1 \circ 1 = 1 \circ 1$$
$$r \circ r = r \circ r$$
$$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$$
$$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$$
$$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$$
$$s \circ s = s \circ s$$
$$sr \circ sr = sr \circ sr$$
$$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$$
$$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$$
$$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10}, maka didapatkan graf *Commuting* pada D_{10} tersebut:



Gambar 3.3 Graf *Commuting* pada D_{10}

$$A=\begin{array}{c|cccccccccc|} & 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sr & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sr^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sr^3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sr^4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\quad
\mathrm{D}=\begin{array}{c|cccccccccc|} & 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \\ \hline 1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ sr^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ sr^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ sr^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$L=D\text{-}A$$

$$=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

$$\text{Det}(L-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix} -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-10+\lambda)\lambda \end{bmatrix}$$

Karena det(L-λI) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I)= (-5+\lambda)^3(\lambda-1)^5(-10+\lambda)\lambda$$

Karena det(L-λI)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I)= (-5+\lambda)^3(\lambda-1)^5(-10+\lambda)\lambda=0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda=0$, $\lambda=10$, $\lambda=5$, $\lambda=1$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=1 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=1$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 5 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=1$ adalah 5. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=5 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=5 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 3 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=5 adalah 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk λ_4=10 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=10$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=10$ adalah 1. Jadi spektrum Laplace untuk graf *Commuting* D_{10} = $\begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

3. Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{14}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{14} yaitu $\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^{5,}r^6,s,sr,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel *Cayley* dari D_{14}.

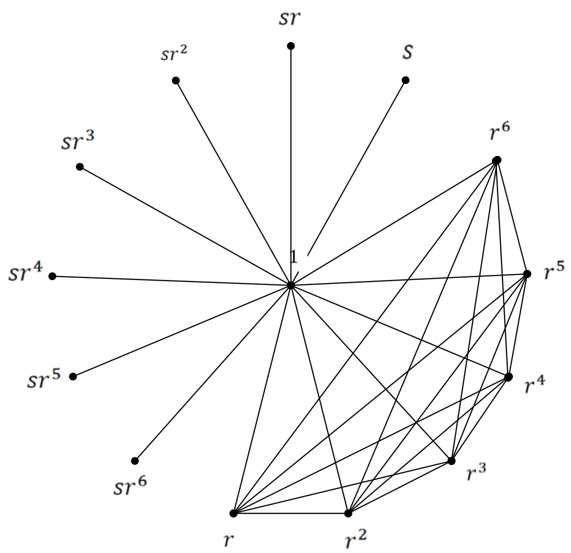
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Tabel 3.5 Tabel *Cayley* dari D_{14}

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{14} dengan operasi ° sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c}
r \circ 1 = 1 \circ r \\
r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2 \\
r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3 \\
r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4 \\
r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5 \\
r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6 \\
s \circ 1 = 1 \circ s \\
sr \circ 1 = 1 \circ sr \\
sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2 \\
sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3 \\
sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4 \\
sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5 \\
sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
r \circ r^2 = r^2 \circ r \\
r \circ r^3 = r^3 \circ r \\
r \circ r^4 = r^4 \circ r \\
r \circ r^5 = r^5 \circ r \\
r \circ r^6 = r^6 \circ r \\
r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2 \\
r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2 \\
r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2 \\
r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2 \\
r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3 \\
r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3 \\
r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3 \\
r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4 \\
r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4 \\
r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \circ 1 = 1 \circ 1 \\
r \circ r = r \circ r \\
r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2 \\
r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3 \\
r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4 \\
r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5 \\
r^6 \circ r^6 = r^6 \circ r^6 \\
s \circ s = s \circ s \\
sr \circ sr = sr \circ sr \\
sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2 \\
sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3 \\
sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4 \\
sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5 \\
sr^6 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^6
\end{array}
$$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{14}, maka didapatkan graf *Commuting* pada D_{14} tersebut



Gambar 3.5 Graf *Commuting* pada D_{14}

Untuk graf *Commuting* D_{14} dengan graf tersebut mengahsilkan matriks Laplace sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks Laplace maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

Det(L- λ I)=0

$$det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh suatu pola pada diagonal utamanya

$$\begin{bmatrix}
-1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7+\lambda & 7-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-14+\lambda)\lambda
\end{bmatrix}$$

Karena det(L-λI) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\text{Det}(L-\lambda I)=(-7+\lambda)^5(\lambda-1)^7(-14+\lambda)\lambda$$

Karena det(L-λI)=0, maka

$$\text{Det}(L-\lambda I)=(-7+\lambda)^5(\lambda-1)^7(-14+\lambda)\lambda=0$$

Dan diperoleh nilai eigennya

$\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=7$, $\lambda=14$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=0$ disubtitusikan ke dalam det(L-λI)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=0 sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=1 disubtitusikan ke dalam $(L-\lambda I)$= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk $\lambda=2$ yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 7 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=2$ adalah

7. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk λ_3=7 disubtitusikan ke dalam det(L-λI)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=7 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 5 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=7 adalah

5. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk λ_4=14 disubtitusikan ke dalam (L-λ I)= diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ=14 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ=14 adalah 1. Jadi spektrum Laplace untuk graf *Commuting* D_{14}= $\begin{bmatrix} 14 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

4. Pola Spektrum Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan spektrum Laplace pada graf *Commuting* dari grup dihedral D_6, D_{10}, dan D_{14} maka diperoleh tabel berikut

No	Graf *Commuting dari Grup*	Spektrum Laplace
1	D_6	$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
2	D_{10}	$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
3	D_{14}	$\begin{bmatrix} 14 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Dari tabel dapat dilihat adanya pola pada masing-masing spectrum jika dikaitkan dengan nilai n. Pola ini selanjutnya dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral order $2n$ dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$. Spektrum Laplace graf *Commuting* dari D_{2n} adalah:

$$spec_L(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$. Diperolah bahwa 1 komutatif dengan semua unsure yang lain karena merupakan identitas. $r^i r^j = r^j r^i$, untuk semua $1 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $i \neq j$. Selain itu tidak ada unsur yang saling komutatif. Diperoleh matriks keterhubungan titik

$$A(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat

$$D(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks Laplace graf *Commuting* dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$L(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan eliminasi Gauss-Jordan pada matriks $L(CD2n) - \lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & n-1-\lambda & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda-n & n-\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (\lambda-2n)\lambda \end{bmatrix}$$

dan diperoleh polinomial karakteristik dalam λ sebagai berikut

$$p(\lambda) = \boldsymbol{p}(\lambda) = \boldsymbol{-1}(\lambda - \boldsymbol{n})^{\boldsymbol{n-2}}(\lambda - \boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}}(\lambda - \boldsymbol{2n})\lambda$$

Maka diperoleh nilai eigen $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = n$, atau $\lambda = 2n$.

Selanjutnya, basis untuk ruang vektor eigen masing-masing nilai eigen ditentukan dengan menentukan banyaknya baris nol setelah matriks $L(CD_{2n})$ - λI dieliminasi dengan metode Gauss-Jordan untuk masing-masing λ.

Untuk $\lambda = 0$, diperoleh baris nol sebanyak 1.

Untuk $\lambda = 1$, diperoleh baris nol sebanyak n.

Untuk $\lambda = n$, diperoleh baris nol sebanyak $n - 2$.

Untuk $\lambda = 2n$, diperoleh baris nol sebanyak 1.

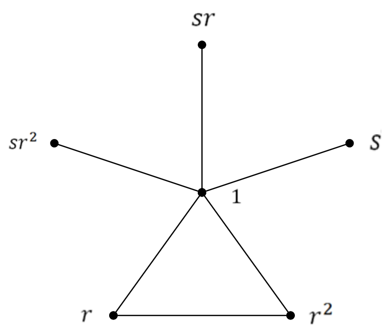
Jadi terbukti bahwa spectrum Laplace graf *Commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$spec_L(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{bmatrix}. \square$$

B. Polinomial Karakteristik Matriks Signless Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{2n}

1. Polinomial Karakteristik Matriks Signless Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_6

Graf commuting dari grup dihedral D_6 sebagai berikut



Gambar 3.4 Graf *Commuting* D_6

Untuk graf *commuting* dari D_6 tersebut menghasilkan matriks adjacency dan matriks derajat berikut

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad D=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jadi diperoleh matriks signless Laplace berikut

$$S=D+A=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks signless Laplace maka dicari persamaan karakteristiksnya, yaitu

$$\det(S-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}5&1&1&1&1&1\\1&2&1&0&0&0\\1&1&2&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}5&1&1&1&1&1\\1&2&1&0&0&0\\1&1&2&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix}5-\lambda&1&1&1&1&1\\1&2-\lambda&1&0&0&0\\1&1&2-\lambda&0&0&0\\1&0&0&1-\lambda&0&0\\1&0&0&0&1-\lambda&0\\1&0&0&0&0&1-\lambda\end{bmatrix}\right)=0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka diperoleh matriks segitiga atas berikut

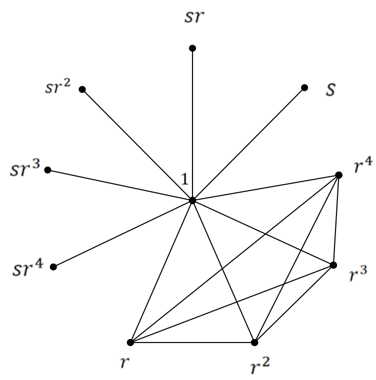
$$\begin{bmatrix}1&2-\lambda&1&0&0&0\\0&-1+\lambda&1-\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda-3&1-\lambda&0&0\\0&0&0&-1+\lambda&1-\lambda&0\\0&0&0&0&-1+\lambda&1-\lambda\\0&0&0&0&0&-\dfrac{18\lambda-4-9\lambda^2+\lambda^3}{\lambda-3}\end{bmatrix}$$

Karena det($S-\lambda I$) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polynomial karakteristiknya yaitu:

$$\det(S-\lambda I)= 1(\lambda - 1)(\lambda - 1)^2(-\lambda^3 + 9\lambda - 18\lambda + 4)$$

2. Polinomial Karakteristik Matriss Signless Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_{10}

Graf *Commuting* dari grup dihedral D_{10} adalah



Gambar 3.5 Graf *Commuting* pada D_{10}

Dari graf commuting dari grup dihedral D_{10} diperoleh matriks adjacency dan matriks derajat berikut.

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad D=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccc} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Maka diperoleh matriks signless Laplace berikut

$$S=D+A$$

$$S=\begin{bmatrix} 9&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&4&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&4&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} 9&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&4&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&4&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&4&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&4&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks signless Laplace maka dicari persamaan karakteristiksnya, yaitu

$$\det(S-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 9&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&4&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&4&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&4&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&4&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}\right)=0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka matriks segitiga atas berikut

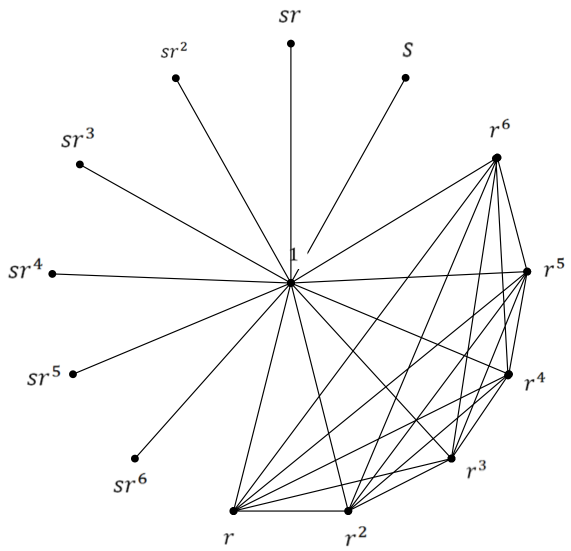
$$\begin{bmatrix} 1 & 4-\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-7 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{70\lambda-24+\lambda^3-17\lambda^2}{\lambda-7} \end{bmatrix}$$

Karena det($S-\lambda I$) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\det(S-\lambda I) = 1(\lambda - 3)^3(\lambda - 1)^4(-\lambda^3 + 17\lambda - 70\lambda + 24)$$

3. Polinomial Karakteristiks Matriks Signless Laplace Graf *Commuting* Grup dari Grup Dihedral D_{14}

Graf *Commuting* dari grup dihedral D_{14} sebagai berikut



Gambar 3.6 Graf *Commuting* pada D_{14}

Dari graf commuting dari grup dihedral D_{10} diperoleh matriks adjacency dan matriks derajat berikut.

$A=$

$$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$D=$

$$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ r^5 \\ r^6 \\ S \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \\ sr^5 \\ sr^6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 & sr^5 & sr^6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Maka diperoleh matriks signless Laplace berikut

$S=D+A$

$$S=\begin{bmatrix} 13 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks signless Laplace maka dicari persamaan karakteristiksnya, yaitu

$$\det(S-\lambda I)$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 13-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{bmatrix}
1 & 6-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5+\lambda & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-11 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{154\lambda-60+\lambda^3-25\lambda^2}{\lambda-11}
\end{bmatrix}$$

Karena det(S- λ I) adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\det(S-\lambda I)= 1(\lambda - 5)^5(\lambda - 1)^6(-\lambda^3 + 25\lambda - 154\lambda + 60)$$

Dari hasil di atas diperoleh bahwa polinomial karakteristik dari matriks signless Laplace graf commuting dari grup dihedral D_6, D_{10}, dan D_{14} sebagai berikut

$\det(S-\lambda I)= 1(\lambda - 1)(\lambda - 1)^2(-\lambda^3 + 9\lambda - 18\lambda + 4)$

$\det(S-\lambda I)= 1(\lambda - 3)^3(\lambda - 1)^4(-\lambda^3 + 17\lambda - 70\lambda + 24)$

$\det(S-\lambda I)= 1(\lambda - 5)^5(\lambda - 1)^6(-\lambda^3 + 25\lambda - 154\lambda + 60)$

Dari ketiga polinomial karakteristik tersebut diperoleh pola bahwa polinomial karakteristik matriks signless Laplace graf commuting dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$p(\lambda) = 1(\lambda - (n - 2))^{n-2}(\lambda - 1)^{n-1}(-\lambda^3 + (4n-3)\lambda + (-4n^2+6n)\lambda + (2n^2-6n+4)).$$

Hasil ini dinyatakan dalam teorema berikut beserta buktinya.

Teorema 3.2

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral order $2n$ dengan n bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$. polinomial karakteristik matriks signless Laplace graf commuting dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$p(\lambda) = 1(\lambda - (n - 2))^{n-2}(\lambda - 1)^{n-1}(-\lambda^3 + (4n-3)\lambda + (-4n^2+6n)\lambda + (2n^2-6n+4)).$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$. Diperolah bahwa 1 komutatif dengan semua unsur yang lain karena merupakan identitas. $r^i r^j = r^j r^i$, untuk semua $1 \leq i, j \leq n - 1$ dengan $i \neq j$. Selain itu tidak ada unsur yang saling komutatif. Diperoleh matriks keterhubungan titik

$$A(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat

$$D(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & n-1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks Signless Laplace graf *Commuting* dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$S(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & n-1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan eliminasi Gauss-Jordan pada matriks $S(CD2n) - \lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas berikut dengan unsur pada diagonal utama sebagai berikut

1,	sebanyak 1 faktor
$(\lambda - (n - 2))$,	sebanyak $(n - 2)$ faktor
$(\lambda - 2n + 3)$,	sebanyak 1 faktor
$(\lambda - 1)$,	sebanyak $(n - 1)$ faktor

$\frac{-\lambda^3+(4n-3)\lambda^2+(-4n^2+6n)\lambda+(2n^2-6n+4)}{\lambda-2n+3}$, sebanyak 1 faktor

Karena determinan matriks segitiga atas tersebut adalah perkalian semua unsure pada diagonal utama maka diperoleh polinomial karakteristik matriks signless Laplace dalam λ sebagai berikut

$$p(\lambda) = 1(\lambda - (n - 2))^{n-2}(\lambda - 1)^{n-1}(-\lambda^3 + (4n-3)\lambda + (-4n^2+6n)\lambda + (2n^2-6n+4)).$$

C. Spektrum Signless Laplace Graf *Commuting* dari Grup Dihedral D_8

Dari graf commuting dari grup dihedral D_8 diperoleh matriks adjacency dan matriks derajat berikut.

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
D=\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & s & sr & sr^2 & sr^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka diperoleh matriks sigless Laplace berikut.

$$S=D+A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks signless Laplace maka dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks-matriks tersebut:

$$\det(S-\lambda I)=0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) =0$$

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka diperoleh matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3-\lambda & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2+\lambda & 6-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6+\lambda & 2-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3+\lambda & 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2+\lambda & -\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} & -\dfrac{-2+\lambda}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} & -\dfrac{8-6\lambda+\lambda^2}{-3+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2+12\lambda-20 \end{bmatrix}$$

Karena det(S-λI) adalah hasil perkalian unsure diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$$\det(S-\lambda I)= 1(-2+\lambda)^2(-6+\lambda)(\lambda-4)(8-6\lambda+\lambda^2)(-20+12\lambda-\lambda^2)$$

Karena det(S-λI)=0, maka

$$\det(S-\lambda I)= 1(-2+\lambda)^2(-6+\lambda)(\lambda-4)(8-6\lambda+\lambda^2)(-20+12\lambda-\lambda^2)=0$$

Diperoleh nilai eigennya

$$\lambda=2,\ \lambda=4,\ \lambda=6, \lambda=10$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen. Untuk $\lambda=2$ disubtitusikan ke dalam det(S-λI)=0 diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 7-2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7-2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3-2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas dapat dikatakan bahwa banyak basis ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_1=2 sebanyak 4. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2. Untuk λ_2=4 disubtitusikan ke dalam (*S*- λ *I)*=0 diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 7-4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7-4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3-4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-4 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=4$ adalah 2. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_3. Untuk $\lambda_3=6$ disubtitusikan ke dalam (D- λI)=0 diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 7-6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7-6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3-6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-6 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=6$ adalah 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_4. Untuk $\lambda_4=10$ disubtitusikan ke dalam (S- λI)=0 diperoleh

$$\left(\begin{bmatrix} 7-10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-10 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7-10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3-10 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3-10 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3-10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3-10 \end{bmatrix}\right)$$

Dengan mengeliminasi matriks dengan metode Jordan yang ada pada *software* Maple 12, maka didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena untuk λ =10 yang elemennya menghasilkan 0 sebanyak 1 baris, maka banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ =10 adalah 1. Jadi spektrum signless Laplace untuk graf kommuting dari grup D_8 adalah

$$D_8 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa spektrum Laplace graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$spec_L(CD_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n & n & 1 & 0 \\ 1 & n-2 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

dan polinomial karakteristik matriks signless Laplace graf commuting dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$p(\lambda) = 1(\lambda - (n - 2))^{n-2}(\lambda - 1)^{n-1}(-\lambda^3 + (4n\text{-}3)\lambda + (-4n^2+6n)\lambda + (2n^2\text{-}6n+4)).$$

Karena polynomial karakteristiks matriks signless Laplace graf commuting dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil menghasilkan nilai eigen bilangan kompleks maka spektrum signless Laplace tidak dapat ditentukan. Spektrum signless Laplace untuk graf kommuting dari grup dihedral D_8 adalah

$$spec_S(CD_8) = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

B. Saran

Berdasarkan hasil penelitian, maka penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menentukan spektrum *Adjacency*, spekturm Detour, atau spektrum *Signless Laplace* pada graf *commuting* dari grup dihedral D_{2n}. Selain itu penelitian dapat dilanjutkan pada penentuan spectrum *Adjacency*, spekturm Detour, spectrum Laplace, atau spectrum *Signless Laplace* graf *non commuting* dari suatu grup *non abelian*.