ALJABAR/PENELITIAN DASAR

LAPORAN AKHIR

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

DIMENSI METRIK, MULTIPLISITAS SIKEL, SERTA RADIUS DAN DIAMETER GRAF KOMUTING DAN NONKOMUTING GRUP DIHEDRAL

Oleh:

Dr. ABDUSSAKIR, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2014

LAPORAN PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

1. Nama Peneliti	:	Dr. Abdussakir, M.Pd
2. NIP	:	19751006 200312 1 001
3. Pangkat/Golongan	:	Penata Tk I/IIId
4. Sub Judul Penelitian	:	Dimensi Metrik, Multiplisitas Sikel, serta Radius dan Diameter Graf Komuting dan Nonkomuting Grup Dihedral
5. Bidang Ilmu	:	Aljabar/Penelitian Dasar
6. Judul Penelitian Mahasiawa	:	(1). Dimensi Metrik Graf Komuting dan Nonkomuting Grup Dihedral (2). Multiplisitas Sikel Graf Komuting dan Nonkomuting Grup Dihedral
7. Jurusan	:	Matematika
8. Lama kegiatan	:	4 (Empat) Bulan
9. Biaya yang diusulkan	:	Rp. 12.500.000,- (Dua Belas Juta lima Ratus Ribu Rupiah)

Malang, 29 Oktober 2014

Disahkan oleh:
Dekan,

Peneliti,

Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si
NIP. 19710919 200003 2 001

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001

Ketua LP2M,

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.
NIP. 19600910 198903 2 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, sehingga dengan rahmat dan hidayah-Nya laporan penelitian dengan judul “Dimensi Metrik, Multiplisitas Sikel, serta Radius dan Diameter Graf Komuting dan Nonkomuting Grup Dihedral ” dapat diselesaikan. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang telah membimbing manusia menuju jalan yang lurus, yaitu agama Islam.

Pada penelitian ini, ditentukan beberapa sifat terkait graf komuting dan nonkomuting dari grup dihedral meliputi kajian mengenai dimensi metrik, multiplisitas sikel, radius dan diameter graf tersebut. Penelitian dimulai dengan percobaan dan pengamatan pada beberapa kasu graf komuting dan nonkomuting dari grup dihedral serta kemudian menarik kesimpulan umum yang dinyatakan sebagai teorema.

Selama penyusunan laporan ini, peneliti telah dibantu oleh banyak pihak. Pada kesempatan ini, peneliti menyampaikan terima kasih kepada.

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh Pembantu Dekan di Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, beserta rekan-rekan dosen Jurusan Matematika.
4. Dosen dan staf di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Peneliti mendo’akan semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT.

Malang, Oktober 2014

Peneliti

DIMENSI METRIK, MULTIPLISITAS SIKEL, SERTA RADIUS DAN DIAMETER GRAF KOMUTING DAN NONKOMUTING GRUP DIHEDRAL

ABSTRAK

Pada penelitian ini, ditentukan beberapa sifat terkait graf komuting dan nonkomuting dari grup dihedral meliputi kajian mengenai dimensi metrik, multiplisitas sikel, radius dan diameter, serta bilangan clique graf tersebut. Berdasarkan penelitian ini diperoleh:

1. Dimensi metrik graf komuting dari grup dihedral D_{2n} adalah $2n - 3$ untuk n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk n genap.
2. Multiplisitas sikel graf komuting dari grup dihedral adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$ untuk n ganjil dan $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right] + \frac{n}{2}$ untuk n genap.
3. Radius dan diameter graf komuting dari grup dihedral masing-masing adalah rad(G) = 1 dan diam(G) = 2, sedangkan radius dan diameter graf nonkomuting dari grup dihedral masing-masing adalah rad(G) = 1 (n ganjil) dan rad(G) = 2 (n genap) serta diam(G) = 2.
4. Bilangan clique graf komuting dari grup Dihedral D_{2n} adalah n, sedangkan bilangan clique graf nonkomuting dari grup Dihedral D_{2n} adalah n + 1 (n ganjil) dan $\frac{n}{2} + 1$ (n genap).

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf G adalah pasangan $\left(V(G), E(G)\right)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Cartrand & Lesniak, 1986).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik $u$dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan *e* serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik *u* dan *v* disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan *v*. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf *G*, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$ (Cartrand & Lesniak, 1986).

Perkembangan terbaru teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf *komuting* $C(G, X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik *x* dan *y*akan terhubung langsung di $C(G, X)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Terkait penelitian mengenai graf *komuting*, Vahidi & Talebi (2010) membahas tentang bilangan bebas, bilangan clique, dan bilangan cover minimum. Chelvam, dkk (2011) meneliti tentang bilangan kromatik dan bilangan clique pada graf *komuting* yang diperoleh dari grup dihedral. Abdussakir, dkk. (2013) meneliti tentang spektrum dari graf *komuting* yang diperoleh dari grup dihedral.

Perkembangan berikutnya, muncul graf *nonkomuting* dari suatu grup. Misalkan $\boldsymbol{G}$ grup tak komutatif dengan senter $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$. Graf *nonkomuting* $\boldsymbol{NCG}$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $\boldsymbol{G} \backslash \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$ dan dua titik $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{G} \backslash \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{G})$akan terhubung langsung di $\boldsymbol{NCG}$ jika $\boldsymbol{xy} \neq \boldsymbol{yx}$ di *G* (Abdollahi, dkk., 2006 dan Abdollahi, dkk., 2010). Karena $\boldsymbol{G}$ adalah grup tak komutatif, maka graf *nonkomuting* $\boldsymbol{NCG}$ adalah graf terhubung. Terkait penelitian ini, Abdollahi, dkk. (2010) telah melakukan penelitian mengenai bilangan clique dari graf *nonkomuting* beberapa grup termasuk grup dihedral. Rivatul Ridho E. (2013) dan Muflihatun Nafisah (2013) telah meneliti spectrum pada graf *nonkomuting* yang diperoleh dari grup dihedral.

Berdasarkan uraian di atas, sampai saat ini belum ada yang mengkaji secara parallel antara graf *komuting* dan *nonkomuting* grup dihedral. Pada penelitian ini, dikaji lebih dalam beberapa sifat pada graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral. Kajian diarahkan pada topik dimensi metrik, multiplisitas sikel serta radius dan diameter. Analisis juga dilakukan pada hasil yang diperoleh pada graf *komuting* dan graf *nonkomuting* dilihat dari aspek struktur grafnya.

B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana rumus umum

(1) dimensi metrik *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral?

(2) multiplisitas sikel graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral?

(3) radius dan diameter graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral?

(4) bilangan *clique* graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan rumus umum

(1) dimensi metric graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral.

(2) multiplisitas sikel graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral.

(3) radius dan diameter graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral.

(4) bilangan *clique* graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai sumbangan teori dalam pengembangan kajian dalam teori graf khususnya pada kajian mengenai graf *komuting* dan *nonkomuting* dari grup dihedral. Hasil penelitian ini juga diharapkan menjadi landasan dasar untuk penelitian lanjutan terkait topik graf *komuting* dan *nonkomuting*.

BAB II
STUDI PUSTAKA

A. Graf

Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut ***order*** dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ***ukuran*** dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Cartrand & Lesniak, 1986).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan *menghubungkan* titik $u$dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut ***terhubung langsung (adjacent)***, v dan e serta u dan e disebut ***terkait langsung (incident)***, dan titik $u$dan$v$ disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut ***terhubung langsung*** **(*adjacent*)**, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Cartrand & Lesniak, 1986).

B. Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut ***lingkungan dari v*** dan ditulis $NG(v)$. ***Derajat dari titik v*** di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$ dan $N_G(v)$disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

$$\deg(v) = |N(v)|$$

Titik yang berderajat 0 disebut ***titik terasing*** atau ***titik terisolasi***. Titik yang berderajat 1 disebut *titik ujung* atau *titik akhir*.Titik yang berderajat genap disebut *titik genap* dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil*. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$.

Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$. Maka

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q. \square$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.

Bukti

Misalkan G graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q.$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap.

Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap.

Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah ganjil.

Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap.□

Graf G dikatakan ***beraturan-r*** atau ***beraturan dengan derajat r*** jika masing-masing titik v di G, maka $\deg(v) = r$, untuk bilangan bulat taknegatif r. Suatu graf disebut ***beraturan*** jika graf tersebut beraturan-r untuk suatu bilangan bulat taknegatif r. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan ***graf kubik***.

Graf G dikatakan ***komplit*** jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan-(n – 1) dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Graf G dikatakan ***bipartisi*** jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisiberaturan-r, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan *partisi-n* jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong V_1, V_2,

$\ldots, V_n$, sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi-n disebut graf tripartisi.

Suatu graf G disebut ***bipartisi komplit*** jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$disebut graf ***bintang (star)*** dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order (n – 1) dan ukuran n.

Graf G dikatakan ***partisi-n komplit*** jika G adalah graf partisi-n dengan himpunan partisi $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sehingga jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$, maka graf ini dinotasikan dengan $K_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$. Urutan $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tidak begitu diperhatikan. Graf partisi-n komplit merupakan graf komplit K_n jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i. Jika $p_i = t$ untuk semua i, $t \geq 1$, maka graf partisi-n komplit ini merupakan graf beraturan dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Jadi, $K_{n(1)}$ tidak lain adalah K_n.

C. Graf Terhubung

Misalkan G graf.Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). ***Jalan u-v*** pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u=v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

adalah sisi di G. v_0 disebut *titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, titik $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut *jalan terbuka*. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*.

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan u-v

$$W: u=v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u=v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v.$$

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut ***trail***. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut ***lintasan***.Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan.

Teorema 3

Setiap jalan u-v pada suatu graf selalu memuat lintasan u-v.

Bukti

Misalkan W adalah jalan u-v di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G. Misalkan

$$W: u=v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v$$

adalah jalan u-v terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan u-v. Jika ada titik yang berulang di W, misalkan$i$ dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku v_i, v_{i+1}, …, v_j dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan u-v baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan u-v. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan u-v yang merupakan lintasan u-v. □

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan ***graf lintasan order n*** dan ditulis P_n. Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut ***sirkuit***. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut ***sikel***. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan taktrivial pada graf G disebut *sirkuit* di G. Sirkuit

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1 \ (n \geq 3)$$

denganv_i, i = 1, 2, 3, …, n berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k.Sikel-k disebut genap atau ganjil bergantung pada k genap atau ganjil.

Sikel yang melalui semua titik pada graf G disebut sikel Hamilton. Graf yang memuat sikel Hamilton disebut graf Hamilton. Sirkuit yang melalui semua sisi disebut sirkuit Euler. Graf yang memuat sirkuit Euler disebut graf Euler.

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Titik *u* dan *v* dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika terdapat lintasan *u-v* di *G*. Suatu graf *G* dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika untuk setiap titik *u* dan *v* yang berbeda di*G* terhubung. Dengan kata lain, suatu graf *G* dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika untuk setiap titik *u* dan *v* di*G* terdapat lintasan *u-v* di *G*. Sebaliknya, jika ada dua titik *u* dan *v* di *G*, tetapi tidak ada lintasan *u-v* di *G*, maka *G* dikatakan **tak terhubung (*disconnected*)**.

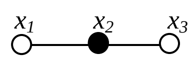
D. Radius dan Diameter Graf

Untuk suatu graf terhubung *G*, maka *jarak* $d(u,v)$ antara dua titik *u* dan *v* di *G* adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan *u* dan *v* di *G*. Jika tidak ada lintasan dari titik *u* ke *v*, maka didefinisikan jarak $d(u,v) = \infty$.*Eksentrisitase*(*v*) dari suatu titik *v* pada graf terhubung *G* adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik *v* ke setiap titik di *G* dapat dituliskan $e(v) = max\{ d(u,v) : u \in V(G) \}$. Titik *v* dikatakan *titik eksentrik* dari *u* jika jarak dari *u* ke *v* sama dengan eksentrisitas dari *u* atau $d(u,v)=e(u)$. *Radius* dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $rad\ G = min\{e(v), v \in V\}$. Sedangkan *diameter* dari *G*, dinotasikan *diam G* adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di *G*, dapat dituliskan $diam\ G = max\{e(v), v \in V\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

E. Dimensi Metrik

Misalkan S = $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ subset dari barisan himpunan titik dan *v* adalah sebuah titik yang menghubungkan graf G. Representasi dari *v* terhadap S adalah barisan berurut *n-tuple*, $r(u|S) = (d(v,x_1), ..., d(v,x_n))$, dimana $d(x,y)$ menggambarkan jarak antara titik *x* dan titik *y*. Himpunan S merupakan himpunan pemisah pada graf G jika untuk setiap titik pada graf G mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap S. Dimensi metrik pada graf G adalah jumlah anggota minimum pada himpunan pemisah, dilambangkan dengan dim(G). Sebuah himpunan pemisah yang mengandung jumlah anggota minimum dinamakan basis dari graf G.

Contoh:

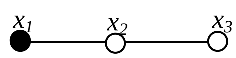


Gambar 2.1 Graf lintasan tiga titik dengan S = {x_2}

Misal diambil S = {x_2}, maka representasinya adalah:

r(x_1|S) = (1) r(x_2|S) = (0) r(x_3|S) = (1),

Karena masih terdapat nilai representasi yang sama yaitu r(x_1|S) = (1) = r(x_3|S), maka S = {x_2} bukan merupakan himpunan pemisah



Gambar 2.2 Graf lintasan tiga titik dengan S = {x_1}

Misal diambil S = {x_1}, maka representasinya adalah:

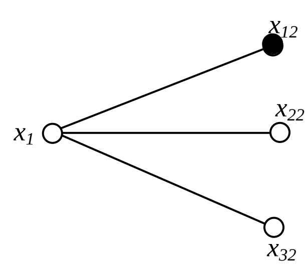
r(x_1|S) = (0) r(x_2|S) = (1) r(x_3|S) = (2),

Karena semua titik pada graf tersebut mempunyai representasi yang berbeda terhadap S = {x_1}, maka S = {x_1} merupakan salah satu himpunan pemisah. Begitu juga apabila diambil S = {x_3}, representasinya adalah sebagaimana berikut:

r(x_1|S) = (2) r(x_2|S) = (1) r(x_3|S) = (0),

Jadi S = {x_1} dan S = {x_3} merupakan himpunan pemisah dari graf di atas. S = {x_1} dan S = {x_3} disebut sebagai himpunan pemisah yang mempunyai jumlah anggota minimum (basis metrik) sehingga dim(G) = 1. Untuk selanjutnya apabila ada dua basis metrik maka akan diambil satu basis metrik untuk mempercepat penghitungan dimensi metriknya.

Contoh:



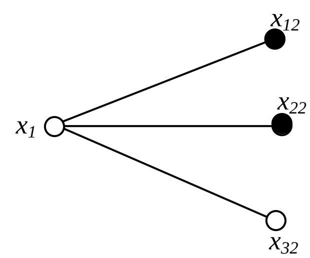
Gambar 2.3 Graf Bintang dengan S = {x_{12}}

Ambil S = {x_{12}}, maka representasinya adalah :

r(x_1|S) = (1) r(x_{12}|S) = (0)

r(x_{22}|S) = (2) r(x_{32}|S) = (2),

karena masih terdapat representasi yang sama yaitu r(x_{22}|S) = (2) = r(x_{32}|S) maka S = {x_{12}} bukan merupakan himpunan pemisah. Oleh sebab itu dicoba untuk mengambil dua titik.



Gambar 2. 4 Graf Bintang dengan S = {x_{12},x_{22}}

Ambil S = {x_{12},x_{22}}, maka representasi semua titik terhadap S untuk himpunan S yang memiliki lebih dari satu anggota dihitung mulai dari representasi jarak dari anggota pertama diikuti representasi anggota kedua dan seterusnya seperti itu. Keterangan lebih jelas, dapat diamati pada representasi berikut,

Representasi semua titik terhadap S = {x_{12},x_{22}} adalah :

r(x_1|S) = (1,1) r(x_{12}|S) = (0,2)

r(x_{22}|S) = (2,0) r(x_{32}|S) = (2,2).

Karena S = {x_{12},x_{22}}mempunyai representasi yang berbeda dan mempunyai jumlah anggota minimum yaitu 2, maka S = {x_{12},x_{22}} adalah basis metrik graf bintang (S_3), maka dimensi metrik graf (S_3) adalah dua atau dim(S_3) = 2.

F. Multiplisitas Sikel

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut ***graf sikel*** dan ditulis C_n. Graf sikel sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya graf sikel digambar dalam bentuk suatu lingkaran.

Graf sikel dapat juga digambar dalam bentuk poligon.C_3 dapat disebut segitiga, C_4 segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut ***segi-n***.Sikel yang banyak titiknya ganjil disebut *sikel ganjil* dan sikel yang banyak titiknya genap disebut *sikel genap*.

Jika G adalah sebuah graf, V(G) dan E(G) adalah himpunan titik dan sisi dari graf G. Multiplisitas sikel dari graf G dinotasikan dengan CM(G) didefinisikan sebagai banyaknya sikel maksimal yang *disjoint* sisi yang terdapat pada graf G (Ali dan Panayappan, 2010:1).

G. Grup Dihedral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$assosiatif).
2. Ada suatu elemen *e* di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (*e* disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari *a*)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a,b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14). Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi jumlah memenuhi aksioma grup, yakni (Z, +) adalah grup abelian.

Grup *dihedral* adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dihedral* dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:24-25). Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *st* untuk $s,t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi).Jika s,t akibat permutasi titik berturut-turut σ,τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk *k* = 0 atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991:26).

Sebagai contoh D_6 adalah grup dihendral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

H. Graf *Komuting*

Misal G adalah grup berhingga dan *X* adalah subset dari G, graf komuting $C(G, X)$ adalah graf dengan *X* sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di *X* terhubung langsung jika keduanya adalah elemen yang saling komutatif di G (Nawawi dkk, 2012).

Sebagai contoh pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Diambil $X = D_6$ maka akan ditentukan unsur yang saling komutatif melalui tabel berikut.

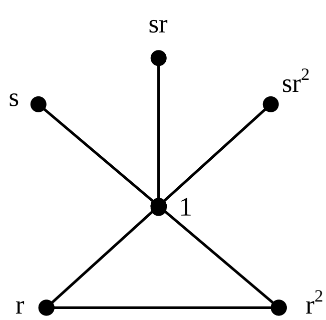
Tabel 2.1 Tabel *Cayley* untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa:

1. 1 komutatif dengan setiap elemen D_6 (sifat elemen identitas) sehingga 1 terhubung langsung dengan setiap elemen di $C(D_6, X)$.
2. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga terhubung langsung di $C(D_6, X)$.
3. Untuk elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di $C(D_6, X)$.

Secara geometri, graf komuting pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.6 Graf Komuting dari D_6

I. Graf *Nonkomuting*

Misal G adalah sebuah grup, maka himpunan Z dikatakan center dari grup G, dituliskan

$$Z = \{z \in G : zx = xz, \forall x \in G\} \text{(Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 229).}$$

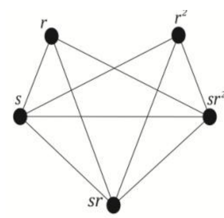
Misal G grup *non* abelian dan *Z(G)* adalah center dari G. Graf *nonkomuting* Γ_G adalah sebuah graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y bertetangga jika dan hanya jika $xy \neq yx$(Abdollahi, A, 2006).

Sebagai contoh pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Dihedral D_6dibangun dari elemen-elemen $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral berbentuk tabel *Cayley* yang menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada D_6sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel *Cayley* D_6

$\circ$	**1**	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.2, diperoleh center D_6 atau $Z(D_6)$ yaitu $\{1\}$ yang ditunjukkan pada tabel dengan warna merah, dan elemen-elemen pada D_6 yang tidak komutatif ditunjukkan pada tabel dengan warna biru. Sehingga graf *non* kommuting dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titiknya $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dari hasil tersebut akan digambarkan ke dalam bentuk graf *nonkomuting* sebagai berikut:



Gambar 2.7 Graf *Nonkomuting* dari D_6

BAB III
METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*).Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori grafdan aljabar abstrak.Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai graf *komuting* dan *nonkomuting* beserta topic-topik yang berkaitan.Kajian pada buku aljabar abstrak berkaitan dengan topik grup dan centralizer suatu grup.Kajian secara komprehensif meliputi ketiga bidang tersebut (teori graf dan aljabar abstrak) adalah mengkaji jurnal penelitian terbaru mengenai graf komuting dan *non*komuting yang sudah dilakukan.

B. Tahap Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif.Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif.Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Mengumpulkan berbagai literatur yang berhubungan dengan topik.
2. Mempelajari topik.
3. Menentukan unsur yang saling komutatif dan tidak saling komutatif pada suatu grup D_{2n} untuk beberapa kasus n, yaitu n = 3, 4, 5, 6.
4. Menggambar graf komuting dan *non*komuting.
5. Mengamati pola terkait topik yang diteliti, meliputi dimensi metrik, radius dan diameter, dan multiplisitas sikel.
6. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
7. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
8. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.
9. Menulis laporan penelitian.

BAB IV
PEMBAHASAN

A. Graf *Komuting* dari Grup Dihedral D_{2n}

1. Graf *Komuting* dari Grup Dihedral D_6

Hasil operasi komposisi pada grup dihedral berbentuk tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Cayley D_6

$\circ$	1	R	r^2	s	sr	sr^2
1	1	R	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	Sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	S	sr	r	r^2	1

Dari tabel 4.1, hasil operasi komposisi grup dihedral akan digambarkan ke dalam bentuk graf *komuting*. Berdasarkan tabel Cayley berikut dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi°. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif disajikan dalam bentuk daftar seperti berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$ $\qquad$ $1 \circ 1 = 1 \circ 1$

$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$ $\qquad$ $r \circ r = r \circ r$

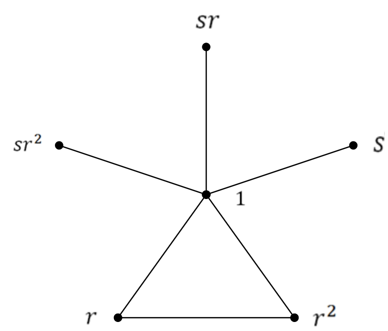
$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\qquad$ $r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$

$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\qquad$ $s \circ s = s \circ s$

$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\qquad$ $sr \circ sr = sr \circ sr$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\qquad$ $sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$

Elemen-elemen dari grup dihedral yang komutatif menghasilkan graf sebagai berikut:



Gambar 4.1 Graf *Komuting dari D_6*

Berdasarkan graf pada Gambar 4.1 diperoleh bahwa:

(a) radius adalah 1, yaitu dari nilai e(1).

(b) diameter adalah 2, yaitu dari eksentrisitas titik selain 1.

(c) order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 3.

(d) multiplisitas sikel adalah 1.

(e) dimensi metrik adalah 3, dengan S = {*s*, *sr*, *r*}.

2. Graf *Komuting* dari Grup Dihedral D_8

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_8 yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_8 sebagai berikut:

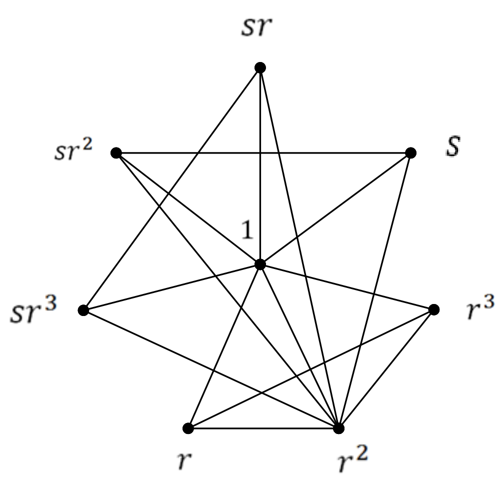
Tabel 4.2 Tabel Cayley D_8

	1	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_8 dengan operasi °. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi ° pada D_8:

$1 \circ 1 = 1 \circ 1$	$r \circ r = r \circ r$	$r^2 \circ sr = sr \circ r^2$	$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$1 \circ r = r \circ 1$	$r \circ r^2 = r^2 \circ r$	$r^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ r^2$	$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$
$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$	$r \circ r^3 = r^3 \circ r$	$r^2 \circ sr^3 = sr^3 \circ r^2$	$1 \circ sr^2 = sr^2 \circ 1$
$1 \circ sr^3 = sr^3 \circ 1$	$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$	$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$	$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$1 \circ s = s \circ 1$	$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$	$1 \circ sr = sr \circ 1$	$r^2 \circ s = s \circ r^2$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_8, maka didapatkan graf *komuting* dari D_8 yaitu:



Gambar 4.2 Graf *Komuting* dari D_8

Berdasarkan graf pada Gambar 4.2 diperoleh bahwa:

(a) radius adalah 1, yaitu dari nilai e(1).

(b) diameter adalah 2, yaitu dari eksentrisitas titik selain 1.

(c) order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 4.

(d) multiplisitas sikel adalah 3.

(e) dimensi metrik adalah 4, dengan S = {s, sr, r, r^2}.

3. Graf *Komuting dari* Grup Dihedral D_{10}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{10} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berdasarkan elemen-elemen tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{10}.

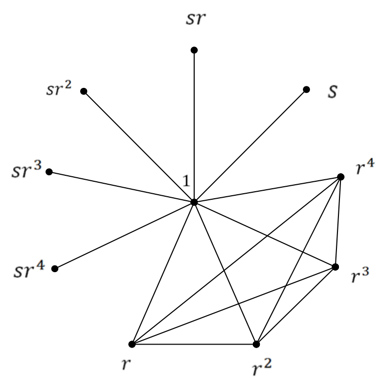
Tabel 4.3 Tabel Cayley D_{10}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10} dengan operasi $\circ$. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{10}, disajikan ke dalam daftar berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$	$r \circ r^2 = r^2 \circ r$	$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$	$r \circ r^3 = r^3 \circ r$	$r \circ r = r \circ r$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$	$r \circ r^4 = r^4 \circ r$	$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$	$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$	$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$s \circ 1 = 1 \circ s$	$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$	$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$	$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$	$s \circ s = s \circ s$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$	$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$	$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$		$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$		$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{10}, maka didapatkan graf *komuting* pada D_{10} tersebut:



Gambar 4.3 Graf *Komuting* dari D_{10}

Berdasarkan graf pada Gambar 4.3 diperoleh bahwa:

(a) radius adalah 1, yaitu dari nilai e(1).

(b) diameter adalah 2, yaitu dari eksentrisitas titik selain 1.

(c) order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 5.

(d) multiplisitas sikel adalah 3.

(e) dimensi metrik adalah 7, dengan S = $\{s, sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3\}$.

4. Graf *Komuting* dari Grup Dihedral D_{12}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{12} yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Berdasarkan elemen-elemen tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{12}.

Tabel 4.4 Tabel Cayley D_{12}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

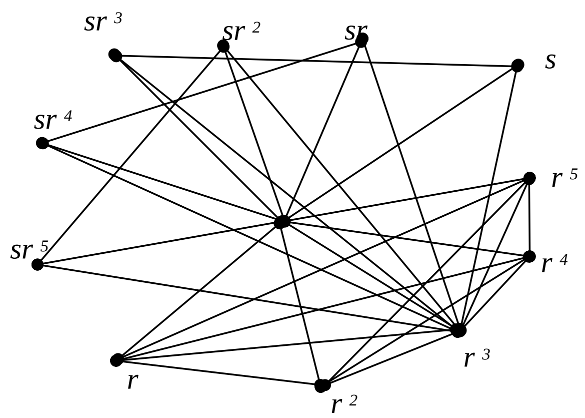
Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{12} dengan operasi $\circ$. Pada tabel di atas, elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12} ditunjukkan dengan warna yang berbeda. Elemen-elemen yang memenuhi sifat komutatif dengan operasi $\circ$ pada D_{12}, disajikan sebagai berikut

$r \circ 1 = 1 \circ r$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$
$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$
$s \circ 1 = 1 \circ s$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$
$sr^4 \circ = 1 \circ sr^4$
$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$
$r \circ r^3 = r^3 \circ r$
$r \circ r^4 = r^4 \circ r$
$r \circ r^5 = r^5 \circ r$
$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$
$sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5$
$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$
$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$
$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$
$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$
$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$

$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r \circ r = r \circ r$
$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5$
$s \circ s = s \circ s$
$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$
$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{12}, maka didapatkan graf *komuting* dari D_{12} tersebut:



Gambar 4.4 Graf *Komuting* dari D_{12}

Berdasarkan graf pada Gambar 4.4 diperoleh bahwa:

(a) radius adalah 1, yaitu dari nilai e(1).

(b) diameter adalah 2, yaitu dari eksentrisitas titik selain 1.

(c) order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 6.

(d) multiplisitas sikel adalah 8.

(e) dimensi metrik adalah 7, dengan S = {s, sr, sr^2, r, r^2, r^3, r^4}.

5. Graf *Komuting* dari Grup Dihedral D_{14}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{14} yaitu {$1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,s,sr,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6$}. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{14}.

Tabel 4.5 Tabel Cayley D_{14}

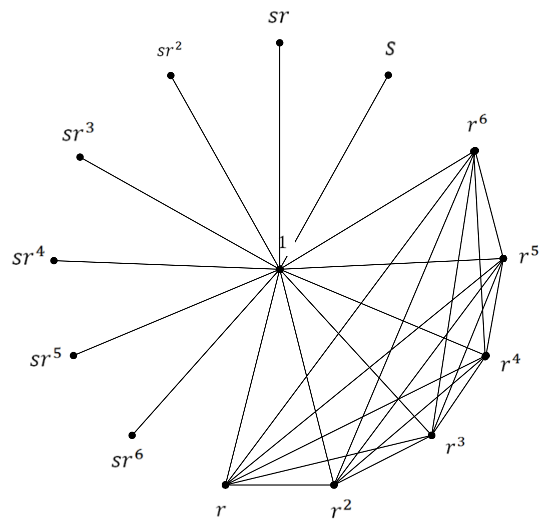
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2

$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
$\boldsymbol{r^6}$	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Berdasarkan tabel Cayley di atas diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{14} dengan operasi $\circ$ sebagai berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$	$r \circ r^2 = r^2 \circ r$	$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$	$r \circ r^3 = r^3 \circ r$	$r \circ r = r \circ r$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$	$r \circ r^4 = r^4 \circ r$	$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$	$r \circ r^5 = r^5 \circ r$	$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$	$r \circ r^6 = r^6 \circ r$	$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6$	$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$	$r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5$
$s \circ 1 = 1 \circ s$	$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$	$r^6 \circ r^6 = r^6 \circ r^6$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$	$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$	$s \circ s = s \circ s$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$	$r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2$	$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$	$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$	$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$	$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$	$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$
$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$	$r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$	$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$
$sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$	$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$	$sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5$
$r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$	$r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$	$sr^6 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^6$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{14}, maka didapatkan graf *komuting* pada D_{14} tersebut



Gambar 4.5 Graf *Komuting* pada D_{14}

Berdasarkan graf pada Gambar 4.5 diperoleh bahwa:

(a) radius adalah 1, yaitu dari nilai e(1).

(b) diameter adalah 2, yaitu dari eksentrisitas titik selain 1.

(c) order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 7.

(d) multiplisitas sikel adalah 7.

(e) dimensi metrik adalah 11, dengan S = {s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 , sr^5, r, r^2, r^3, r^4, r^5}.

6. Graf *Komuting* dari Grup Dihedral D_{16}

Elemen-elemen pembangun dari grup dihedral D_{16} yaitu $\{1,r,r^2,r^3,r^4,r^5,r^6,r^7,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4,sr^5,sr^6,sr^7\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya tersebut, maka diperoleh tabel Cayley dari D_{16}.

Tabel 4.6 Tabel Cayley D_{16}

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{r^5}$	$\boldsymbol{r^6}$	$\boldsymbol{r^7}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$	$\boldsymbol{sr^5}$	$\boldsymbol{sr^6}$	$\boldsymbol{sr^7}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^5}$	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2

$\boldsymbol{r^6}$	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
$\boldsymbol{r^7}$	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^5}$	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^6}$	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
$\boldsymbol{sr^7}$	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

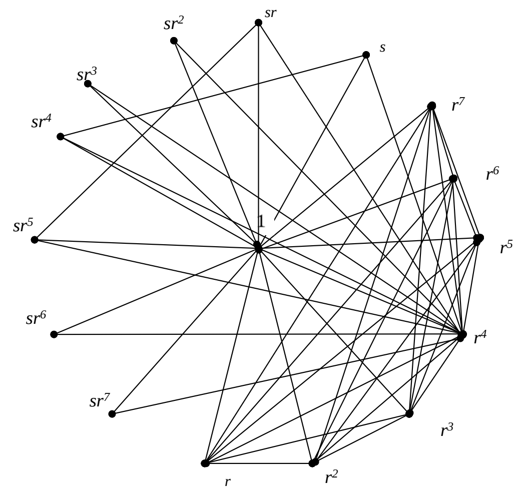
Berdasarkan tabel Cayley di atas dapat diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{16} dengan operasi $\circ$ sebagai berikut:

$r \circ 1 = 1 \circ r$
$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$
$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$
$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$
$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$
$r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6$
$r^7 \circ 1 = 1 \circ r^7$
$s \circ 1 = 1 \circ s$
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$
$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$
$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$
$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$
$sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$
$sr^7 \circ 1 = 1 \circ sr^7$
$r^4 \circ s = s \circ r^4$
$r^4 \circ sr = sr \circ r^4$
$r^4 \circ sr^2 = sr^2 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^3 = sr^3 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^5 = sr^5 \circ r^4$
$r^4 \circ sr^6 = sr^6 \circ r^4$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$
$r \circ r^3 = r^3 \circ r$
$r \circ r^4 = r^4 \circ r$
$r \circ r^5 = r^5 \circ r$
$r \circ r^6 = r^6 \circ r$
$r \circ r^7 = r^7 \circ r$
$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$
$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$
$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$
$r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2$
$r^2 \circ r^7 = r^7 \circ r^2$
$r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$
$r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$
$r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$
$r^3 \circ r^7 = r^7 \circ r^3$
$r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$
$r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$
$r^4 \circ r^7 = r^7 \circ r^4$
$r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$
$r^5 \circ r^7 = r^7 \circ r^5$
$r^6 \circ r^7 = r^7 \circ r^6$

$1 \circ 1 = 1 \circ 1$
$r \circ r = r \circ r$
$r^2 \circ r^2 = r^2 \circ r^2$
$r^3 \circ r^3 = r^3 \circ r^3$
$r^4 \circ r^4 = r^4 \circ r^4$
$r^5 \circ r^5 = r^5 \circ r^5$
$r^6 \circ r^6 = r^6 \circ r^6$
$r^7 \circ r^7 = r^7 \circ r^7$
$s \circ s = s \circ s$
$sr \circ sr = sr \circ sr$
$sr^2 \circ sr^2 = sr^2 \circ sr^2$
$sr^3 \circ sr^3 = sr^3 \circ sr^3$
$sr^4 \circ sr^4 = sr^4 \circ sr^4$
$sr^5 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^5$
$sr^6 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^6$
$sr^7 \circ sr^7 = sr^7 \circ sr^7$
$s \circ sr^4 = sr^4 \circ s$
$sr \circ sr^5 = sr^5 \circ sr$
$sr^2 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^2$
$sr^3 \circ sr^7 = sr^7 \circ sr^3$
$r^4 \circ sr^7 = sr^7 \circ r^4$

Setelah diketahui elemen-elemen komutatif dari D_{16} , maka didapatkan graf *komuting* pada D_{16} tersebut



Gambar 4.6 Graf *Komuting* dari D_{16}

Berdasarkan graf pada Gambar 4.6 diperoleh bahwa:

a. radius adalah 1, yaitu dari nilai e(1).
b. diameter adalah 2, yaitu dari eksentrisitas titik selain 1.
c. order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 8.
d. multiplisitas sikel adalah 7.
e. dimensi metrik adalah 10, dengan S = $\{s, sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$.

Berdasarkan pengamatan pada beberapa graf, maka dapat diperoleh tabel berikut.

Aspek	**D_6**	**D_8**	**D_{10}**	**D_{12}**	**D_{14}**	**D_{16}**	**...**	**D_{2n}**
Radius	1	1	1	1	1	1	...	1
Diameter	2	2	2	2	2	2	...	2
Clique	3	4	5	6	7	8	...	n
Multiplisitas sikel	1	3	3	7	7	12	...	$\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$, n ganjil $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]+\frac{n}{2}$, n genap
Dimensi metric	3	4	7	7	11	10	...	2n – 3, n ganjil

								$\frac{3n-4}{2}$, n genap

Hasil 1.

Misalkan G adalah graf komuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka radius dan diameter G masing-masing adalah rad(G) = 1 dan diam(G) = 2.

Bukti

Diketahui bahwa $1 \circ x = x \circ 1$, untuk semua $x \in D_{2n}$. Dengan demikian titik 1 akan terhubung langsung dengan semua titik yang lain di G. Dengan demikian, maka e(1) = 1. Karena radius G adalah eksentrisitas terkecil di G maka diperoleh rad(G) = 1.

Karena semua titik terhubung langsung dengan 1, maka jarak dua titik berbeda di G hanya memuat dengan kemungkinan, yaitu 1 atau 2. Dua titik berbeda akan berjarak 1 jika saling terhubung langsung dan berjarak dua jika tidak saling terhubung langsung. Karena s dan r tidak komutatif di D_{2n}, maka d(s, r) = 2. Dengan demikian, maka e(s) = e(r) = 2. Karena diameter adalah eksentrisitas terbesar dan ada titik di G yang bereksentrisitas 2, maka diperoleh diam(G) = 2.

Hasil 2.

Misalkan G adalah graf komuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka bilangan clique dari G adalah n.

Bukti

Untuk n ganjil, diketahui bahwa $r^i r^j = r^j r^i$, untuk i, j = 0, 1, 2, 3, …, n-1 di D_{2n}. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Di lain pihak, sr^i hanya komutatif dengan 1 di D_{2n}, untuk i = 0, 1, 2, …, n-1. Jadi, sr^i tidak terhubung langsung dengan r^j, untuk i, j = 0, 1, 2, …, n-1. Dengan demikian, maka 1, r, r^2, …, r^{n-1} membentuk subgraf komplit yang terbesar di G dengan order n. Jadi, diperoleh bilangan clique di G adalah n, untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui bahwa $r^i r^j = r^j r^i$, untuk i, j = 0, 1, 2, 3, …, n-1 di D_{2n}. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Walaupun $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tetapi sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tidak komutatif dengan r^j untuk j selain $\frac{n}{2}$. Akibatnya, subgrap komplit terbesar di G hanyalah memuat titik 1, r, r^2, …, r^{n-1}. Jadi, diperoleh bilangan clique di G adalah n, untuk n genap.

Hasil 3.

Misalkan G adalah graf komuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka multiplisitas sikel dari G adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$ untuk n ganjil dan $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]+\frac{n}{2}$ untuk n genap.

Bukti

Untuk n ganjil, maka sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tidak komutatif dengan r^j, untuk j = 1, 2, 3, …, n – 1. Dengan demikian, maka sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tidak terhubung langsung dengan r^j, untuk j = 1, 2, 3, …, n – 1 di G. Unsur yang saling komutatif hanyalah r^j, untuk j = 0, 1, 2, 3, …, n – 1 sehingga membentuk subgraf komplit K_n. Sudah diperoleh pada penelitian terdahulu bahwa multiplisitas sikel pada K_n adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$, untuk n ganjil. Jadi multiplisitas sikel untuk graf G adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$, untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui bahwa $r^i r^j = r^j r^i$, untuk i, j = 0, 1, 2, 3, …, n-1 di D_{2n}. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Walaupun $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan sr^i, i = 0, 1, 2, …, n -1 tetapi sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tidak komutatif dengan r^j untuk j selain $\frac{n}{2}$. Akibatnya, subgrap komplit terbesar di G hanyalah memuat titik 1, r, r^2, …, r^{n-1}. Jadi, multiplisitas sikel di G sama dengan multiplisitas sikel di K_n. Sudah diperoleh pada penelitian terdahulu bahwa multiplisitas sikel pada K_n adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]+\frac{n}{2}$, untuk n genap. Jadi multiplisitas sikel untuk graf G adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]+\frac{n}{2}$, untuk n genap.

Hasil 4.

Misalkan G adalah graf komuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka dimensi metrik dari G adalah 2n – 3 untuk n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk n genap.

Bukti

Untuk n ganjil, diketahui bahwa $r^i r^j = r^j r^i$, untuk i, j = 0, 1, 2, 3, …, n-1 di D_{2n}. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Di lain pihak, sr^i hanya komutatif dengan 1 di D_{2n}, untuk i = 0, 1, 2, …, n-1. Jadi, sr^i tidak terhubung langsung dengan r^j, untuk i, j = 0, 1, 2, …, n-1 di G. Ambil

$$S = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-2}, r, r^2, \ldots, r^{n-2}\}.$$

Jadi, S memuat sebanyak 2n – 3 anggota.

Akan diperoleh bahwa representasi jarak semua titik di G terhadap S adalah berbeda. Jadi diperoleh dimensi metrik graf G adalah

$$\dim(G) \leq 2n - 3$$

Ambil R himpunan bagian dari V(G) dengan $|R| = |S| - 1 < |S|$. Berarti ada minimal satu sr^i, i = 0, 2, 3, …, n – 2 atau r^j , j = 1, 2, 3, …, n – 2 yang tidak masuk di R, sebut sr^p atau r^q. Akibatnya, sr^p dan sr^{n-1} akan mempunyai representasi jarak yang sama atau r^q dengan r^{n-1} akan mempunyai representasi jarak yang sama. Jadi diperoleh dimensi metrk graf G adalah

$$\dim(G) > 2n - 4$$

atau

$$\dim(G) \geq 2n - 3$$

Terbukti, dim(G) = 2n – 3, untuk n ganjil.

$\{s, sr, sr^2, sr^3, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$.

Untuk n genap, diketahui bahwa $r^i r^j = r^j r^i$, untuk i, j = 0, 1, 2, 3, …, n-1 di D_{2n}. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Walaupun $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tetapi sr^i, i = 0, 1, 2, …, n-1 tidak komutatif dengan r^j untuk j selain $\frac{n}{2}$.

Ambil

$$S = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{\frac{n-2}{2}}, r, r^2, \ldots, r^{n-2}\}.$$

Jadi, S memuat sebanyak $\frac{3n-4}{2}$ anggota.

Akan diperoleh bahwa representasi jarak semua titik di G terhadap S adalah berbeda. Jadi diperoleh dimensi metrik graf G adalah

$$\dim(G) \leq \frac{3n-4}{2}$$

Ambil R himpunan bagian dari V(G) dengan $|R| = |S| - 1 < |S|$. Berarti ada minimal satu sr^i, i = 0, 2, 3, …, n – 2 atau r^j , j = 1, 2, 3, …, n – 2 yang tidak masuk di R, sebut sr^p atau r^q. Akibatnya, sr^p dan sr^{n-1} akan mempunyai representasi jarak yang sama atau r^q dengan r^{n-1} akan mempunyai representasi jarak yang sama. Jadi diperoleh dimensi metrk graf G adalah

$$\dim(G) > \frac{3n-4}{2} - 1$$

atau

$$\dim(G) \geq \frac{3n-4}{2}$$

Terbukti, $\dim(G) = \frac{3n-4}{2}$, untuk n genap.

B. Graf Nonkomuting dari Grup Dihedral D_{2n}

1. Graf *Non*komuting Grup Dihedral D_6

Elemen-elemen dari grup dihedral D_6 adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 4.7. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_6}$

$\circ$	**1**	***r***	***r²***	***s***	***sr***	***sr²***
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r²	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	S	r^2	1	r
sr²	sr^2	s	sr	r	r^2	1

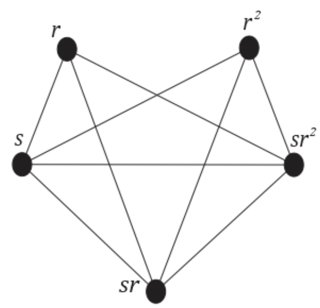
Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_6 yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_6. Sedangkan warna kuning menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6 sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^2 \circ s \neq s \circ r^2 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2 \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$

$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_6 yaitu $Z(D_6) = \{1\}$, sehingga graf *non komuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non komuting* sebagai berikut:



Gambar 4.7. Graf *Nonkomuting* dari Grup $\boldsymbol{D_6}$

Berdasarkan graf pada Gambar 4.7 diperoleh bahwa:

a. radius adalah 1, yaitu dari nilai e(s).
b. diameter adalah 2, yaitu dari nilai e(r).
c. order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 4, dari subgraf dengan titik $\{s, r^2, sr, sr^2\}$.
d. multiplisitas sikel adalah 2.

2. Graf *Non*komuting Grup Dihedral $\boldsymbol{D_8}$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_8 adalah $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_8 dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

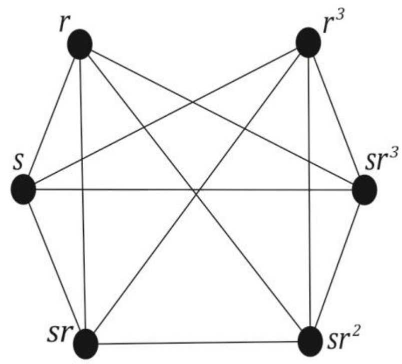
Tabel 4.8. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_8}$

$\circ$	**1**	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_8 yaitu $\{1, r^2\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^2 komutatif dengan semua elemen di D_8. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^3 \circ s \neq s \circ r^3 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$
$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3 \qquad s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$
$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r \qquad r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3 \qquad sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_8 yaitu $Z(D_8) = \{1, r^2\}$, sehingga graf *non komuting* dari grup D_8 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_8} = \{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non komuting* sebagai berikut:



Gambar 4.8. Graf *Nonkomuting* dari Grup $\boldsymbol{D_8}$

Berdasarkan graf pada Gambar 4.8 diperoleh bahwa:

a. radius adalah 2, yaitu dari nilai e(s).
b. diameter adalah 2, yaitu dari nilai e(r).
c. order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 3, dari subgraf dengan titik {s, sr, r^3}.
d. multiplisitas sikel adalah 3.

3. Graf *Nonkomuting* Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{10}}$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{10} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2$, sr^3, $sr^4\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{10} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

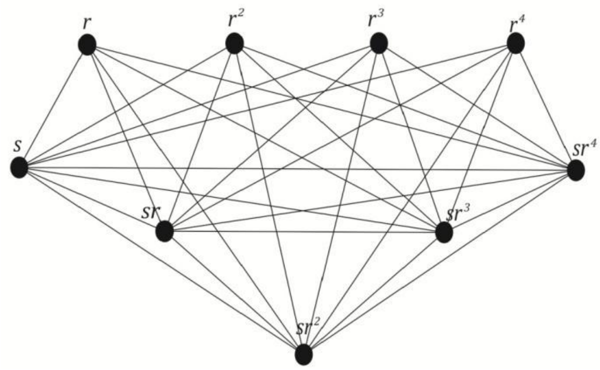
Tabel 4.9. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_{10}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{10} yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_{10}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccc}
r \circ s \neq s \circ r & r^3 \circ s \neq s \circ r^3 & s \circ sr \neq sr \circ s \\
r \circ sr \neq sr \circ r & r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3 & s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s \\
r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r & r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3 & s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s \\
r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r & r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3 & s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s \\
r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r & r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3 & sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr \\
r^2 \circ s \neq s \circ r^2 & r^4 \circ s \neq s \circ r^4 & sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr \\
r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2 & r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4 & sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr \\
r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2 & r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4 & sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2 \\
r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2 & r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4 & sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2 \\
r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2 & r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4 & sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3
\end{array}$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{10} yaitu $Z(D_{10}) = \{1\}$, sehingga graf *non komuting* dari grup D_{10} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{10}} = \{r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non komuting* sebagai berikut:



Gambar 4.9. Graf *Nonkomuting* pada Grup $\boldsymbol{D_{10}}$

Berdasarkan graf pada Gambar 4.9 diperoleh bahwa:

e. radius adalah 1, yaitu dari nilai e(s).
f. diameter adalah 2, yaitu dari nilai e(r).
g. order subgraf komplit terbesar atau bilangan *clique* adalah 6, dari subgraf dengan titik {r, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4}.
h. multiplisitas sikel adalah 3.

4. Graf *Nonkomuting* Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{12}}$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{12} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{12} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 4.10. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_{12}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

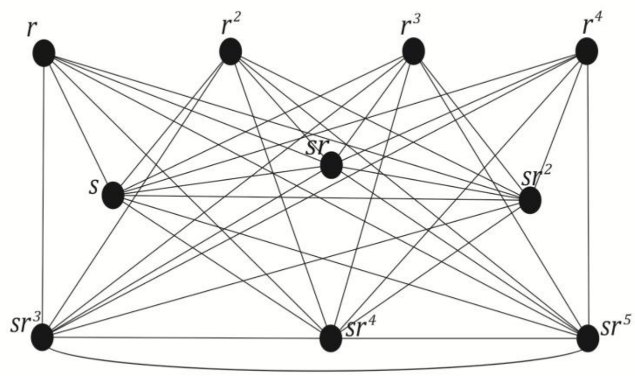
Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{12} yaitu $\{1, r^3\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^3 komutatif dengan semua elemen di D_{12}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{12}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$	$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$	$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

$r^{2} \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$

$r^{2} \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{12} yaitu $Z(D_{12}) = \{1, r^3\}$, sehingga graf *non komuting* dari grup D_{12} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{12}} = r, r^2, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non komuting* sebagai berikut:



Gambar 4.10. Graf *Nonkomuting* dari Grup $\boldsymbol{D_{12}}$

5. Graf *Nonkomuting* Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{14}}$

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2$, sr^3, sr^4, sr^5, $sr^6\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{14} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

Tabel 4.11. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_{14}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{14} yaitu $\{1\}$, karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_{14}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^4 \circ s \neq s \circ r^4 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4 \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$

$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4 \qquad s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$

$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r \qquad r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4 \qquad s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$$

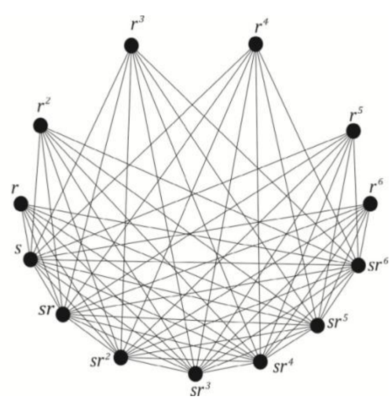
$$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r \qquad r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4 \qquad s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$$

$$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r \qquad r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4 \qquad s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$$

$$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r \qquad r^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^4 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

$$r^{2} \circ s \neq s \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ s \neq s \circ r^{5} \qquad sr \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ sr$$
$$r^{2} \circ sr \neq sr \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ sr \neq sr \circ r^{5} \qquad sr \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ sr$$
$$r^{2} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{5} \qquad sr \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr$$
$$r^{2} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{5} \qquad sr \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr$$
$$r^{2} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{5} \qquad sr^{2} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ sr^{2}$$
$$r^{2} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{5} \qquad sr^{2} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ sr^{2}$$
$$r^{2} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{2} \qquad r^{5} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{5} \qquad sr^{2} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr^{2}$$
$$r^{3} \circ s \neq s \circ r^{3} \qquad r^{6} \circ s \neq s \circ r^{6} \qquad sr^{2} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{2}$$
$$r^{3} \circ sr \neq sr \circ r^{3} \qquad r^{6} \circ sr \neq sr \circ r^{6} \qquad sr^{3} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ sr^{3}$$
$$r^{3} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{3} \qquad r^{6} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{6} \qquad sr^{3} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr^{3}$$
$$r^{3} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{3} \qquad r^{6} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{6} \qquad sr^{3} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{3}$$
$$r^{3} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{3} \qquad r^{6} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{6} \qquad sr^{4} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr^{4}$$
$$r^{3} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{3} \qquad r^{6} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{6} \qquad sr^{4} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{4}$$
$$r^{3} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{2} \qquad r^{6} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{6} \qquad sr^{5} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{5}$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{14} yaitu $Z(D_{14}) = \{1\}$, sehingga graf *non komuting* dari grup D_{14} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{14}} = \{r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non komuting* sebagai berikut:



Gambar 4.11. Graf *Nonkomuting* dari Grup $\boldsymbol{D_{14}}$

6. Spektrum Detour Graf *Non Komuting* Grup Dihedral D_{16}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{16} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{16} dalam bentuk tabel *cayley* sebagai berikut:

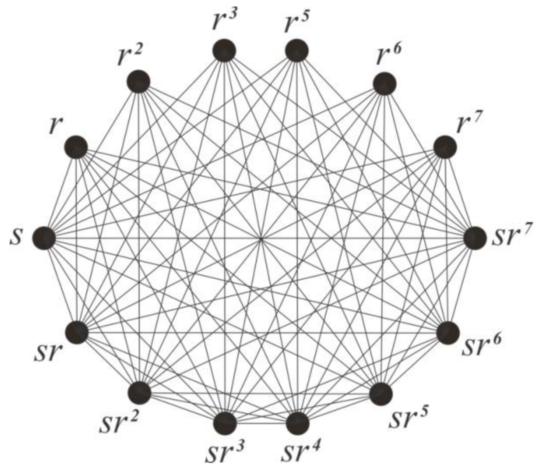
Tabel 4.12. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_{16}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari tabel di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{16} yaitu $\{1, r^4\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^4 komutatif dengan semua elemen di D_{16}. Sedangkan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{16}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$	$s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$	$s \circ sr^7 \neq sr^7 \circ s$
$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r$	$r^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^5$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r$	$r^5 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^5$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^6 \circ s \neq s \circ r^6$	$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^6 \circ sr \neq sr \circ r^6$	$sr \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^6$	$sr \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^6$	$sr^2 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^6$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$
$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$r^7 \circ s \neq s \circ r^7$	$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$
$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$	$r^7 \circ sr \neq sr \circ r^7$	$sr^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^3$
$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$	$r^7 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^7$	$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$
$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$	$r^7 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^7$	$sr^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^4$
$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$	$r^7 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^7$	$sr^4 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^4$
$r^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^3$	$r^7 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^7$	$sr^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^5$
$r^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$	$r^7 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^7$	$sr^5 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^5$
$r^3 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^2$	$r^7 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^7$	$sr^6 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^6$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{16} yaitu $Z(D_{16}) = \{1, r^4\}$, sehingga graf *non komuting* dari grup D_{16} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{16}} = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non komuting* sebagai berikut:



Gambar 4.12. Graf *Non Komuting* dari Grup D_{16}

Berdasarkan pengamatan pada beberapa graf, maka dapat diperoleh tabel berikut.

Aspek	**D_6**	**D_8**	**D_{10}**	**D_{12}**	**D_{14}**	**D_{16}**	**...**	**D_{2n}**
Radius	1	2	1	2	1	2	...	1, ganjil 2, n genap
Diameter	2	2	2	2	2	2	...	2
Bilangan Clique	4	3	6	4	8	5	...	n + 1, n ganjil $\frac{n}{2} + 1$, n genap

Hasil 5.

Misalkan G adalah graf nonkomuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka radius graf G adalah rad(G) = 1 (n ganjil) dan rad(G) = 2 (n genap).

Bukti

Untuk n ganjil, maka Z(G) = {1} dan s tidak saling komutatif untuk semua unsur yang lain. Maka diperoleh e(s) = 1. Karena rad(G) adalah eksentrisitas terkecil, maka rad(G) = 1, untuk n ganjil.

Untuk n genap, maka Z(G) = {1, $r^{\frac{n}{2}}$}. Karena r^i dan r^j saling komutatif, maka r^i dan r^j tidak terhubung langsung di G. Karena sr^i (i = 0, 1, 2, …, $\frac{n}{2}$) saling komutatif dengan sr^j (j = $\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2$, …, n - 1) maka sr^i tidak terhubung langsung dengan sr^j. Diperoleh $e(r^j) = e(sr^i) = e(sr^j) = 2$. Artinya semua unsur mempunyai eksentrisitas 2. Jadi rad(G) = 2, untuk n genap.

Hasil 6.

Misalkan G adalah graf nonkomuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka diameter graf G adalah diam(G) = 2 (n ganjil) dan rad(G) = 2 (n genap).

Bukti

Untuk n ganjil, maka Z(G) = {1}. Karena s tidak saling komutatif untuk semua unsur yang lain, maka jarak terbesar antara titik yang lain adalah 2, yaitu lintasan yang melalui s. Karena r^i dan r^j saling komutatif, maka r^i dan r^j tidak terhubung langsung di G dan $e(r^i) = 2$. Karena diameter G adalah eksentrisitas terbesar, maka diam(G) = 2.

Untuk n genap, maka $Z(G) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$. Karena r^i dan r^j saling komutatif, maka r^i dan r^j tidak terhubung langsung di G. Karena sr^i ($i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$) saling komutatif dengan sr^j ($j = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \ldots, n - 1$) maka sr^i tidak terhubung langsung dengan sr^j. Diperoleh $e(r^j) = e(sr^i) = e(sr^j) = 2$. Artinya semua unsur mempunyai eksentrisitas 2. Jadi diam(G) = rad(G) = 2, untuk n genap.

Terbukti bahwa diam(G) = 2.

Hasil 7.

Misalkan G adalah graf nonkomuting dari grup Dihedral D_{2n}. Maka bilangan clique dari G adalah n + 1 (n ganjil) dan $\frac{n}{2} + 1$ (n genap).

Bukti

Untuk n ganjil, diperoleh bahwa himpunan $S = \{r, s, sr, sr^2, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$ saling tidak komutatif di D_{2n}. Dengan demikian, maka $S = \{r, s, sr, sr^2, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$ akan membentuk subgraf komplit terbesar di G. Dengan demikian, maka bilangan clique graf G adalah n + 1, yaitu kardinalitas himpunan S.

Untuk n genap, maka Z(G) = {1, $r^{\frac{n}{2}}$}. Karena r^i dan sr^j tidak saling komutatif, maka r^i dan sr^j tidak terhubung langsung di G. Karena sr^i (i = 0, 1, 2, …, $\frac{n}{2}$) saling komutatif dengan sr^j (j = $\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2$, …, n - 1) maka sr^i tidak terhubung langsung dengan sr^j. Namun demikian, sr^i (i = 0, 1, 2, …, $\frac{n}{2}$) tidak saling komutatif satu sama lain. Maka sr^i (i = 0, 1, 2, …, $\frac{n}{2}$) akan membentuk graf komplit. Karena sr^i (i = 0, 1, 2, …, $\frac{n}{2}$) terhubung langsung dengan r, maka diperoleh subgraf komplit terbesar yang memuat $\frac{n}{2} + 1$ titik. Jadi bilangan clique untuk G adalah $\frac{n}{2} + 1$, untuk n genap.

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa

1. Dimensi metrik graf komuting dari grup dihedral D_{2n} adalah 2n – 3 untuk n ganjil dan $\frac{3n-4}{2}$ untuk n genap.
2. Multiplisitas sikel graf komuting dari grup dihedral adalah $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]$ untuk n ganjil dan $\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]+\frac{n}{2}$ untuk n genap.
3. Radius dan diameter graf komuting dari grup dihedral masing-masing adalah rad(G) = 1 dan diam(G) = 2, sedangkan radius dan diameter graf nonkomuting dari grup dihedral masing-masing adalah rad(G) = 1 (n ganjil) dan rad(G) = 2 (n genap) serta diam(G) = 2.
4. Bilangan clique graf komuting dari grup Dihedral D_{2n} adalah n, sedangkan bilangan clique graf nonkomuting dari grup Dihedral D_{2n} adalah n + 1 (n ganjil) dan $\frac{n}{2}+1$ (n genap).

B. Saran

Saran yang dapat diajukan berkaitan dengan hasil penelitian ini adalah perlu penelitian lanjutan untuk menentukan multiplisitas sikel dan dimensi metrik graf nonkomuting dari grup dihedral. Panelitian lainnya dapat diarahkan pada aspek yang lain dari graf komuting atau non komuting dari grup dihedral.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. (2006). *Non*-komuting Graph of a Group. *Journal Of Algebra* , 468-492.

Abdussakir, Fahruddin, I. & Rahmawati, N.D. 2009. *Menentukan Spectrum Suatu Graf Berbantuan Matlab*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Sari, FNK., & Shandya, D.. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Amalia, I. & Arifandi, Z. 2013. *Menentukan Spectrum Graf Komuting dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition.* New York: JohnWilley&Sons, Inc.

Agnarsson, G. dan Greenlaw, R. 2007. *Graph Theory: Modeling, Application, and Algorithms*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. Nomor 4 Volume 5 Halaman: 250-252.

Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press.

Bondy, J.A. &Murty, U.S.R., 1976.*Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 2008.*Graph Theory*. New York:Springer.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. dan Oellermann, O.R.. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapore. McGraw-Hill, Inc.

Chelvam, Tamizh, T., Selvakumar, K., Raja, S. 2011.Komuting Graphs on Dihedral Groups. *The Journal of Mathematics and Computer* Science. Vol 2, No 2, Hal: 402-406.

Diestel, R. 2005. *Graph Theory, Electronic Edition 2005*. New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company.

Intifaada, A. 2013. *Spectrum Laplace Graf Komuting dari Graf Dihedral*. Skripsi. Tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Miller, M. 2000. *Open Problems in Graf Theory: Labeling and ExtremalGraphs*. Prosiding Konferensi Nasional X Matematika di Bandung, tanggal 17-20 Juli.

Nafisah, M. 2013. Spektrum Detour Graf *Non-Komuting* dari Group Dihedral. Skripsi.Tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nawawi, Athirah dan Peter Rowley. 2012. *On Komuting Graphs for Elements of Order 3 in Symetry Groups.* Manchester: *The MIMS Secretary.*

Raisinghania, M., & Aggrawal, R. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi : S. Chand & Company Ltd.

Elvierayani, R.R. 2013. Spektrum Adjacency Laplace dan Sigless Laplace Graf *Non*-Komuting dari Grup Dihedral (D_{2n}). Skripsi. Tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Trinajstic, Nenad. 1992. Chemical Graph Theory, 2nd Edition. Florida: CRC Press.

Vahidi, J. & Talebi, A.A.. 2010. The Komuting Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. Vol1, No2, Hal:123-127.

BIODATA PENELITI

IDENTITAS DIRI	
Nama	: Dr. ABDUSSAKIR, M.Pd
NIP/NIK	: 19751006 200312 1 001
Jenis Kelamin	: Laki-laki
Tempat dan Tanggal Lahir	: PAMEKASAN, 6 OKTOBER 1975
Status Perkawinan	: Kawin
Agama	: ISLAM
Golongan / Pangkat	: IIID / PENATA TK I
Jabatan Fungsional Akademik	: LEKTOR
Perguruan Tinggi	: UIN MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Alamat	:JL. GAJAYANA 50 MALANG
Telp./Faks.	: (0341) 558933
Alamat Rumah	: PERUM OMA VIEW BLOK EF-01 MALANG
Telp./Faks.	: 08179605672
Alamat E-mail	: abdussakir1975@yahoo.co.id

RIWAYAT PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI

Tahun Lulus	Jenjang	Perguruan Tinggi	Jurusan/ Bidang Studi
2000	SARJANA	UNIVERSITAS NEGERI MALANG	PEND MATEMATIKA
2003	MAGISTER	UNIVERSITAS NEGERI MALANG	PEND MATEMATIKA
2014	DOKTOR	UNIVERSITAS NEGERI MALANG	PEND MATEMATIKA

PELATIHAN PROFESIONAL

Tahun	Pelatihan	Penyelenggara
2004	Pelatihan Penerapan Model Realistics Mathematics Education bagi Guru Madrasah Ibtidaiyah se-Kota Malang	UIN Malang
2005	Pelatihan Standar Mutu Dosen	UIN Malang
2006	Pelatihan Pembuatan Media Pembelajaran Berbasis Teknologi Komputer	UIN MALANG dan MAN 1 PAMEKASAN
2008	Pelatihan Pembuatan WEB-BLOG di F Saintek UIN Malang	UIN MALANG
2009	Pelatihan Peningkatan Validasi dan Kualitas Soal	UIN Malang

PRODUK BAHAN AJAR

Mata Kuliah	Program Pendidikan	Jenis Bahan Ajar (Cetak dan *Non*cetak)	Semester / Tahun Akademik
Analisis Real I	S1 Matematika	Cetak	Genap/ 2005/2006
Matematika I	S1 PGMI	Cetak	Genap/2007/2008
Teori Graf	S1 Matematika	Cetak	Genap/2009/2010

PENGALAMAN PENELITIAN			
Tahun	Judul Penelitian	Ketua / Anggota Tim	Sumber Dana
2005	Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $K_{1,n}$ dan C_n.	Ketua	Mandiri
2005	Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph P_n dan mP2.	Ketua	Mandiri
2005	Bilangan dalam Al Qur'an.	Ketua	Mandiri
2005	Rahasia Bilangan 19 dalam Al Qur'an	Ketua	Mandiri
2005	Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat Model "⊥" dengan Panjang n	Ketua	Mandiri
2005	Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat Model "H" dengan Panjang n	Ketua	Mandiri
2005	Rahasia Penyebutan Bilangan dalam Al-Qur'an	Anggota	DIPA 2005
2006	Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat dengan Himpunan Derajat {1, 4} dan n Titik Berderajat 4, n Bilangan Asli	Ketua	Mandiri
2006	Penerapan Model Pembelajaran Matematika Berorientasi PAKEM untuk Meningkatkan"	Anggota	Depag Pusat
2006	Pola Matematika pada Surat Al-Ashr, Al-Kautsar, dan An-Nashr	Ketua	DIPA 2006
2009	Menentukan Spectrum suatu Graf Berbantuan Matlab	Ketua	DIPA 2009
2010	Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Multi Star	Ketua	Mandiri
2011	Analisis Matematik terhadap Azimat Numerik dan Alfabetik	Ketua	DIPA 2011
2012	Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit	Ketua	DIPA 2012
2013	Spektrum Graf Komuting Beberapa Grup	Ketua	DIPA 2013

KARYA ILMIAH

A. Buku/Bab Buku/Jurnal

Tahun	Judul	Penerbit/Jurnal
2006	Ada Matematika dalam Al Qur'an	UIN-Malang Press
2006	Analisis Shalat melalui Logika Matematika dalam buku Islam, Sains dan Teknologi	UIN-Malang Press
2006	Analisis Matematis terhadap Filsafat Al Qur'an	UIN-Malang Press
2007	Ketika Kyai Mengajar Matematika	UIN-Malang Press
2009	Matematika I: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur'an	UIN-Malang Press
2010	Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi	UIN-Malang Press
2004	Pembelajaran Geometri Berdasar Teori van Hiele Berbantuan Komputer	Jurnal Matematika UM
2004	Menjawab TekaTeki Langkah Kuda pada Beberapa Ukuran Papan Catur dengan Teori Graph	Jurnal Saintika UIN Malang
2005	Edge Magic Total Labeling pada Graph mP_2 (m bilangan asli ganjil)	Jurnal Saintika UIN Malang
2008	Pembelajaran Matematika Berparadigma Al-Qur'an untuk Mengatasi Kesulitan Siswa Madrasah dalam Mempelajari Matematika	Jurnal Madrasah UIN Malang
2010	Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat dengan Himpunan Derajat {1, 4} dan n Titik Berderajat 4, n Bilangan Asli	Jurnal Cauchy UIN Malang

B. Makalah/Poster

Tahun	Judul	Penyelenggara
2004	Realistics Mathematics Education (RME) dan Penerapannya di Sekolah Dasar	Fakultas Tarbiyah UIN MALANG
2005	Matematika dan Al-Qur'an	TOPDAM V / Brawijaya Malang
2005	Sains dan Teknologi dalam Al-Qur'an	UIN Malang
2006	Kajian Matematis terhadap Fenomena Penyebutan *"Ulul Albab"* dalam Al-Qur'an	Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
2006	Pengembangan Evaluasi Pembelajaran Berbasis Kompetensi	Pemkab Magetan
2006	Pembelajaran Matematika Berbantuan Komputer	UIN Malang dan MAN 1 Pamekasan
2008	Pentingnya Matematika dalam	UIN Malang

	Pemikiran Islam	
2009	Umat Islam Perlu Menguasai Matematika	Jurusan Tadris Matematika IAIN Mataram
2009	Pembelajaran Keliling dan Luas Lingkaran dengan Strategi REACT pada Siswa Kelas VIII SMP Negeri 6 Kota Mojokerto	Jurusan Pendidikan Matematika Universits Negeri Yogyakarta
2010	Super Edge Magic Labeling pada Beberapa Bentuk Graf Ulat	Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia
2010	Transisi Berpikir dari Sekolah Menengah ke Perguruan Tinggi	FMIPA UM Malang
2010	Jalur Menujur Berpikir Formal dalam Matematika	FMIPA UM Malang
2010	Jalur Menuju Berpikir Formal pada Materi Fungsi Komposisi	PPS UM Malang
2012	Belajar Matematika dengan Hati: Mewujudkan Pendidik Profesional	FKIP UNISDA Lamongan

Malang, 1 April 2014
Dosen Ybs

Dr. ABDUSSAKIR, M.PD