ALJABAR/PENELITIAN DASAR

PROPOSAL

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

Sifat-Sifat Graf yang Diperoleh dari Grup Non Abelian

SUB JUDUL: Grup Automorfisma pada Graf Komuting dan Nonkomuting dari Grup Dihedral, Grup Simetri, dan Grup Quaternion

Oleh:

Dr. ABDUSSAKIR, M.Pd

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2015

PROPOSAL PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

1. Judul Penelitian	:	Sifat-Sifat Graf yang Diperoleh dari Grup Non Abelian
2. Ketua Peneliti Ilmu	:	Dr. Abdussakir
3. Peneliti dan Sub Judul Penelitian	:	(1). Grup Automorfisma pada Graf Komuting dari Grup Dihedral dan Grup Simetri. (2). Grup Automorfisma pada Graf Nonkomuting dari Grup Dihedral dan Grup Simetri.
4. Peneliti	:	Dr. Abdussakir, M.Pd (NIP. 197510062003121 001) Ziyadatur Rohmah F (NIM. 12610007) Dini Chandra (NIM. 12610019)
5. Jurusan	:	Matematika
6. Lama kegiatan	:	6 (Enam) Bulan
7. Biaya yang diusulkan	:	Rp. 10.000.000,- (Sepuluh Juta Rupiah)

Malang, 19 Mei 2015

Ketua Jurusan,	Peneliti,
Dr. Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	Dr. Abdussakir, M.Pd NIP 19751006 200312 1 001

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Cartrand & Lesniak, 1986).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik $u$dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident),* dan titik *u* dan *v* disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan *v*. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf *G*, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$ (Cartrand & Lesniak, 1986).

Perkembangan terbaru teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf komuting $C(G, X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik *x* dan *y* akan terhubung langsung di $C(G, X)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Terkait penelitian mengenai graf komuting, Vahidi & Talebi (2010) membahas tentang bilangan bebas, bilangan clique, dan bilangan cover minimum. Chelvam, dkk. (2011) meneliti tentang bilangan kromatik dan bilangan clique pada graf komuting yang diperoleh dari grup dihedral. Abdussakir, dkk. (2013) meneliti tentang spectrum dari graf komuting yang diperoleh dari grup dihedral.

Perkembangan berikutnya, muncul istilah graf nonkomuting dari suatu grup. Misalkan G grup tak komutatif dengan senter $Z(G)$. Graf non komuting $NC(G)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik $G\backslash Z(G)$ dan dua titik $x, y \in$

$G\backslash Z(G)$ akan terhubung langsung di $NC(G)$ jika $xy \neq yx$ di G (Abdollahi, et.al, 2006 dan Abdollahi, et.al, 2010). Karena G adalah grup tak komutatif, maka graf non komuting $NC(G)$ adalah graf terhubung. Terkait penelitian ini, Abdollahi, dkk. (2010) telah melakukan penelitian mengenai bilangan clique dari graf non komuting beberapa grup termasuk grup dihedral. Rivatul Ridho E. (2013) dan Nafisah (2013) telah meneliti spectrum pada graf non komuting yang diperoleh dari grup dihedral. Abdussakir, dkk. (2014) meneliti radius, diameter, multiplisitas sikel, dan dimensi metrik graf komuting dan non komuting dari grup dihedral. Faiqotul Himmah (2014) meneliti bilangan dominasi dan dominasi total graf komuting dan non komuting dari grup dihedral.

Automorfisma pada graf G adalah permutasi φ pada himpunan $V(G)$ dengan syarat bahwa untuk sebarang u, $v \in V(G)$ berlaku $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G)$ (Cartrand & lesniak, 1986:250; Cameron, 2001:1; Ganesan, 2012:1). Dengan kata lain, automorfisma pada graf G adalah permutasi pada himpunan titik di G yang mempertahankan keterhubungan langsung antara dua titik. Himpunan semua automorfisma pada graf G dengan operasi komposisi fungi membentuk grup yang disebut grup automorfisma, dan dinotasikan dengan $Aut(G)$ (Cameron, 2001:2). Kardinalitas himpunan $Aut(G)$, atau $|Aut(G)|$, dinamakan bilangan automorfisma pada G.

Beberapa penelitian mengenai automorfisma pada graf sudah dilakukan. Cameron (2001) meneliti mengenai automorfisma pada graf berhingga khususnya pada graf asimetris. Morris (2000) meneliti grup automorfisma pada graf sirkulan. Ganesan (2012) meneliti grup automorfisma pada graf Cayley yang dibangun dari himpunan transposisi. Himmah Rosyidah (2010) meneliti grup automorfisma pada graf komplit K_n dan graf sikel C_n. Any Tsalatsatul Fitriyah (2011) meneliti automorfisma graf roda dan graf tangga, sedangkan Reni Tri Damayanti (2011) meneliti automorfisma graf bintang dan graf lintasan.

Sampai saat ini belum ada penelitian mengenai grup automorfisme pada graf komuting dan non komuting dari grup non abelian. Dengan demikian, maka penulis merasa perlu untuk melakukan penelitian terkait topik grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dengan mengangkat judul "*grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup dihedral, grup* *simetri, dan grup quaternion*”. Topik ini menarik untuk dikaji karena melibatkan dua cabang penting dari matematika, yaitu aljabar dan teori graf. Pertama bekerja dalam struktur aljabar berupa grup. Selanjutnya bekerja dalam teori graf dan kemudian kembali ke struktur aljabar menggunakan konsep isomorfisma. Akhirnya berusaha menemukan pola umum grup automorfisma pada graf yang digunakan, yaitu graf komuting dan non komuting.

B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu

(1) bagaimana grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup dihedral?

(2) bagaimana grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup simetri?

(3) bagaimana grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup quaternion?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan

(1) pola umum grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup dihedral.

(2) pola umum grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup simetri.

(3) pola umum grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup quaternion.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai sumbangan teori dalam pengembangan kajian aljabar dan teori graf, khususnya pada kajian mengenai grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup non abelian. Hasil penelitian ini juga diharapkan menjadi landasan dasar untuk penelitian lanjutan terkait topik grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari suatu grup.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Grup Automorfisma pada Graf Komuting dan Graf Non Komuting dari Grup Dihedral

1. Grup Automorfisma pada Graf Komuting dari Grup Dihedral

Telah diketahui bahwa grup dihedral order 2n adalah $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$. Untuk menentukan grup automorfisma pada graf komuting dari grup dihedral, pembahasan akan dimulai dari beberapa kasus grup dihedral, yaitu D_6, D_8, D_{10}, dan D_{12}. Grup dihedral order 6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel *Cayley* dari Grup D_6

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	1	sr^2	s	sr
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	1	r	sr	sr^2	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	s	r^2	1	r
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan tabel di atas, *center* grup dihedral-6 adalah {1}, karena 1 komutatif dengan semua elemen grup dihedral-6. Elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

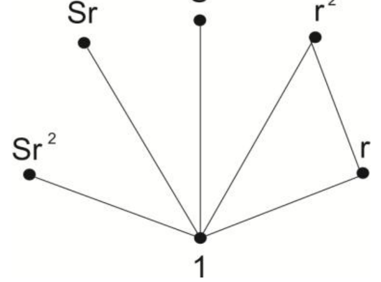
1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad 1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

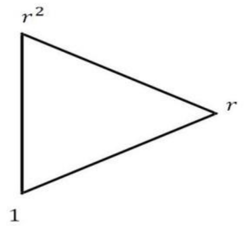
$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$$

Sehingga dapat digambarkan graf komutingnya sebagai berikut



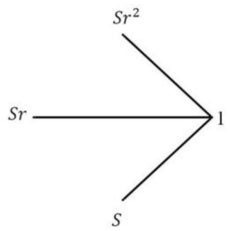
Dalam penelitian ini dari graf komuting yang telah terbentuk, kemudian akan dikelompokkan menjadi beberapa jenis graf lain berdasarkan anggota pada graf tersebut. Pertama akan diambil $X = \{1, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$ untuk membentuk graf komuting $C(D_{2n}, X)$ dan kedua akan diambil $X = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ untuk membentuk graf komuting $C(D_{2n}, X)$.

Graf komuting $C(D_6, X = \{1, r, r^2\})$ akan berbentuk graf komplit K_3 sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_6, X = \{1, r, r^2\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit K_3, yaitu himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2\}$. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_6, X = \{1, r, r^2\})$ akan berbentuk grup simetri S_3.

Graf komuting $C(D_6, X = \{1, s, sr, sr^2\})$ akan berbentuk graf bintang sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_6, X = \{1, s, sr, sr^2\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang S_3, yaitu himpunan permutasi dari $\{s, sr, sr^2\}$. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_6, X = \{1, s, sr, sr^2\})$ akan berbentuk grup simetri order 3 yaitu S_3.

Grup dihedral order 8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 4.2 Tabel *Cayley* dari Grup D$_8$

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel di atas, terdapat dua elemen yang menjadi *center* grup dihedral-8 yaitu $\{1, r^2\}$, karena keduanya bersifat komutatif dengan semua elemen grup dihedral-8. Elemen-elemen yang saling komutatif adalah:

1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad 1 \circ r^3 = r^3 \circ 1 \qquad r \circ r^3 = r^3 \circ r$$
$$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r \qquad r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$$
$$sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$$

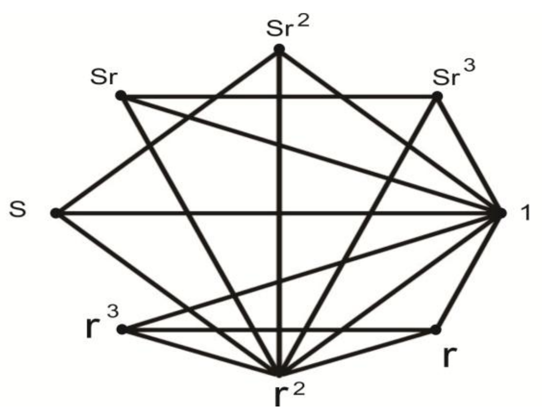
3. r^2 komutatif dengan elemen sr^i,

$$s \circ r^2 = r^2 \circ s \qquad sr^2 \circ r^2 = r^2 \circ sr^2$$
$$sr \circ r^2 = r^2 \circ sr \qquad sr^3 \circ r^2 = r^2 \circ sr^3$$

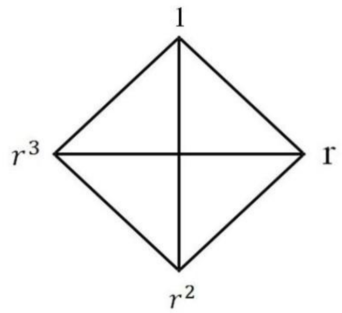
4. Elemen sr^i komutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$,

$$s \circ sr^2 = sr^2 \circ s \qquad sr \circ sr^3 = sr^3 \circ sr$$

Sehingga dapat digambarkan graf komutingnya sebagai berikut.

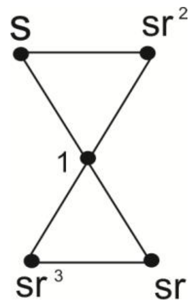


Graf komuting $C(D_8, X = \{1, r, r^2, r^3\})$ akan berbentuk graf komplit K_4 sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_8, X = \{1, r, r^2, r^3\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit K_4, yaitu himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3\}$. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_8, X = \{1, r, r^2, r^3\})$ akan berbentuk grup simetri S_4.

Graf komuting $C(D_8, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3\})$ berbentuk graf kincir $Wd_{3,2}$ sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_8, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf kincir $Wd_{3,2}$, yaitu graf kincir dengan dua daun kincir yang berbentuk graf komplit K_3.

Grup dihedral order 10 adalah $D_{10} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$.

Dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 4.3 Tabel *Cayley* dari Grup D_{10}

$\circ$		r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
		r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	

s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4		r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4		r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4		r	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4		r	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4		r	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Dari tabel di atas, terlihat bahwa *center* grup dihedral-10 yaitu {1}, karena 1 komutatif dengan semua elemen grup dihedral-*10.*Elemen-elemen yang saling komutatif pada grup dihedral-10 sebagai berikut.

1. Elemen r^i saling komutatif,

$1 \circ r = r \circ 1$ $\qquad$ $r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\qquad$ $r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$

$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$ $\qquad$ $r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $\qquad$ $r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$

$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$ $\qquad$ $r \circ r^4 = r^4 \circ r$

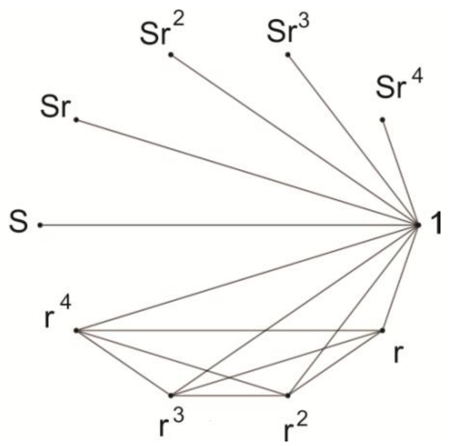
$1 \circ r^4 = r^4 \circ 1$ $\qquad$ $r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\qquad$ $sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\qquad$ $sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$

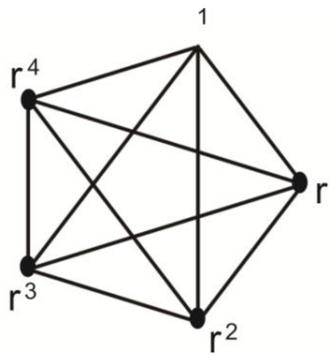
$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\qquad$ $sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$

Sehingga dapat digambarkan graf komutingnya sebagai berikut.



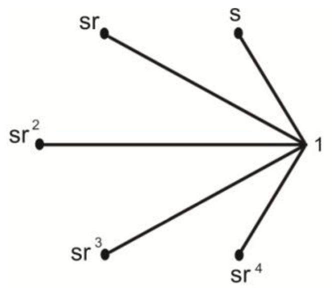
Graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ akan berbentuk graf komplit

K_5 sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit K_5, yaitu himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, r, r^2, r^3, r^4\})$ akan berbentuk grup simetri S_5.

Graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ akan berbentuk graf bintang S_5 atau $K_{1,5}$. Graf bintang $K_{1,5}$ ini memuat 6 titik yaitu $V(K_{1,5}) = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Masing-masing titik berderajat satu, kecuali titik pusat yang berderajat 5. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf bintang S_5, yaitu himpunan permutasi dari $\{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$ akan berbentuk grup simetri S_5. Berikut adalah gambar dari graf komuting $C(D_{10}, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\})$.



Grup dihedral order 12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Dengan operasi " $\circ$ ", maka diperoleh tabel *Cayley* sebagai berikut.

Tabel 4.3 Tabel *Cayley* dari Grup D_{12}

$\circ$		r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
		r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5		sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5			sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5		r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5		r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5		r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5		r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5		r^5		r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5		r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5		r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5		
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	

Berdasarkan tabel di atas, terdapat dua elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1, r^3\}$, karena keduanya bersifat komutatif dengan semua elemen grup dihedral-12. Elemen-elemen yang saling komutatif pada grup dihedral-12 sebagai berikut.

1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r \qquad r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$$
$$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^3 = r^3 \circ r \qquad r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$$
$$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1 \qquad r \circ r^4 = r^4 \circ r \qquad r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$$
$$1 \circ r^4 = r^4 \circ 1 \qquad r \circ r^5 = r^5 \circ r \qquad r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$$
$$1 \circ r^5 = r^5 \circ 1 \qquad r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2 \qquad r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2 \qquad sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$$
$$sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3 \qquad sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$$

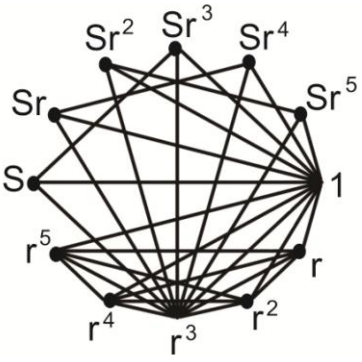
3. r^3 komutatif dengan elemen sr^i,

$$s \circ r^3 = r^3 \circ s \qquad sr^2 \circ r^3 = r^3 \circ sr^2 \qquad sr^4 \circ r^3 = r^3 \circ sr^4$$
$$sr \circ r^3 = r^3 \circ sr \qquad sr^3 \circ r^3 = r^3 \circ sr^3 \qquad sr^5 \circ r^3 = r^3 \circ sr^5$$

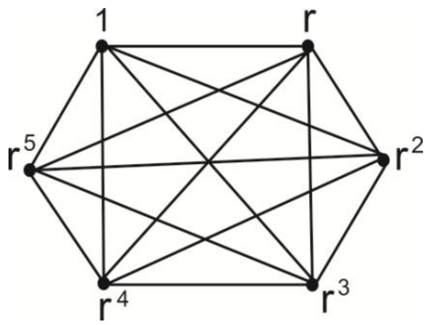
4. Elemen sr^i komutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$,

$$s \circ sr^3 = sr^3 \circ s \qquad sr \circ sr^4 = sr^4 \circ sr \qquad sr^2 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^2$$

Sehingga dapat digambarkan graf komutingnya sebagai berikut.

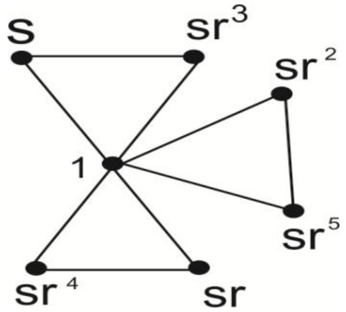


Graf komuting $C(D_{12}, X = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ akan berbentuk graf komplit K_6 sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{12}, X = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf komplit K_6, yaitu himpunan permutasi dari $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{12}, X = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$ akan berbentuk grup simetri S_6.

Graf komuting $C(D_{12}, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\})$ berbentuk graf kincir $Wd_{3,3}$ sebagai berikut.



Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{12}, X = \{1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\})$ akan isomorfik dengan grup automorfisma pada graf kincir $Wd_{3,3}$, yaitu graf kincir dengan tiga daun kincir yang berbentuk graf komplit K_3.

Berdasarkan beberapa kasus di atas dapat dirumuskan beberapa teorema berikut.

Teorema 1.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli dari 2. Misalkan $X = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n, yaitu berbentuk grup simetri S_n.

Bukti:

Karena semua anggota X saling komutatif, maka graf komuting $C(D_{2n}, X)$ yang memuat X sebagai himpunan titiknya akan berbentuk graf komplit dengan n titik atau K_n. Dengan demikian grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n. Karena K_n adalah graf komplit, maka grup automorfisma pada K_n tidak lain adalah semua permutasi pada $\{1, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$. Himpunan semua permutasi pada $\{1, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ tidak lain adalah grup simetri S_n. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ berbentuk grup simetri S_n.

Teorema 2.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil lebih dari 2. Misalkan $X = \{1, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang $K_{1,n}$, yaitu berbentuk grup simetri S_n.

Bukti:

Karena n bilangan asli ganjil, maka semua anggota X selain unsur 1 tidak saling komutatif dan unsur 1 saling komutatif dengan semua unsur yang lain, maka graf komuting $C(D_{2n}, X)$ yang memuat X sebagai himpunan titiknya akan berbentuk graf bintang dengan $n + 1$ titik atau $K_{1,n}$ dengan titik 1 sebagai titik pusat. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang $K_{1,n}$. Karena masing-masing $s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}$ berderajat satu di $K_{1,n}$, maka grup automorfisma pada $K_{1,n}$ tidak lain adalah permutasi pada $\{s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ karena unsur 1 harus dipetakan pada dirinya sendiri. Jadi, grup automorfisma pada $K_{1,n}$ akan berbentuk grup simetri dengan n unsur atau

Sn. Dengan demikian, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ berbentuk grup simetri S_n.

Teorema 3.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli genap dari 3. Misalkan $X = \{1, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$, yaitu graf kincir dengan $\frac{n}{2}$ daun kincir yang masing-masing berbentuk graf komplit K_3.

Bukti:

Diketahui bahwa semua anggota X saling komutatif dengan 1. Maka, semua unsur X akan terhubung langsung di $C(D_{2n}, X)$. Karena n bilangan asli genap, maka s dan $sr^{\frac{n}{2}}$, sr dan $sr^{\frac{n}{2}+1}$, sr^2 dan $sr^{\frac{n}{2}+2}$, …, $sr^{\frac{n}{2}-1}$ dan sr^{n-1} akan saling terhubung langsung di $C(D_{2n}, X)$. Dengan demikian, maka graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan berbentuk graf kincir dengan $\frac{n}{2}$ daun kincir yang masing-masing berbentuk graf komplit K_3. Jadi, grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$.

2. Grup Automorfisma pada Graf Non Komuting dari Grup Dihedral

Grup dihedral-6 (D_6) dibentuk oleh elemen-elemen $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jika grup dihedral dioperasikan dengan operasi "$\circ$", maka didapatkan hasil tabel *Cayley* adalah sebagai berikut:

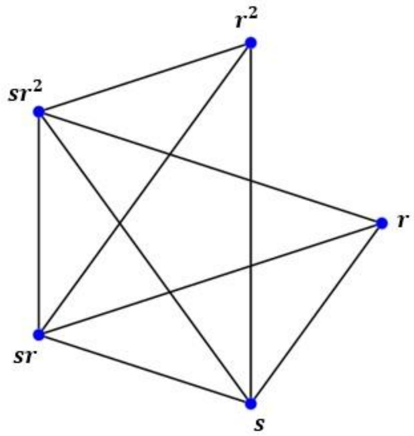
Tabel 4.5. Tabel *Cayley* dari Grup D_6

	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

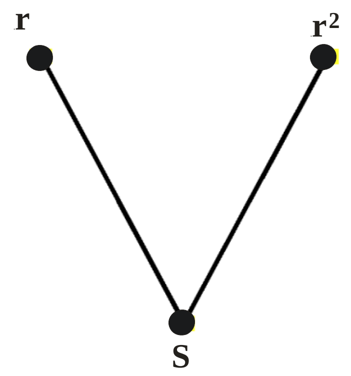
Berdasarkan tabel di atas, dapat dilihat bahwa *center* dari grup dihedral-6 (D_6) adalah $\{1\}$, karena $\{1\}$ jika dioperasikan dengan operasi biner "$\circ$" terhadap seluruh anggota grup dihedral-6 maka hasilnya adalah komutatif. Pada tabel kolom-kolom yang ditunjukkan dengan warna biru adalah unsur-unsur dari grup dihedral-6 yang non komutatif, sedangkan kolom-kolom yang berwarna kuning adalah unsur-unsur dari grup dihedral-6 (D_6) yang komutatif. Sehingga dapat ditentukan elemen-elemen yang non komutatif adalah:

$r \circ S \neq S \circ r$	$r^2 \circ S \neq \circ\, r^2$	$S \circ Sr \neq Sr \circ S$
$r \circ Sr \neq Sr \circ r$	$r^2 \circ Sr \neq Sr \circ r^2$	$S \circ Sr^2 \neq Sr^2 \circ S$
$r \circ Sr^2 \neq Sr^2 \circ r$	$r^2 \circ Sr^2 \neq Sr^2 \circ r^2$	$Sr \circ Sr^2 \neq Sr^2 \circ Sr$

Dari elemen-elemen yang non komutatif di atas, dapat digambarkan graf non komutatifnya sebagai berikut:



Jika dari gambar graf non komutating di atas diambil misalkan himpunan X dari salah satu unsur sr^i dan semua unsur r^i yaitu $X = \{s, r, r^2\}$ maka akan membentuk graf bintang-2 yang disimbolkan dengan $K_{1,2}$ atau S_2, sebagai berikut.



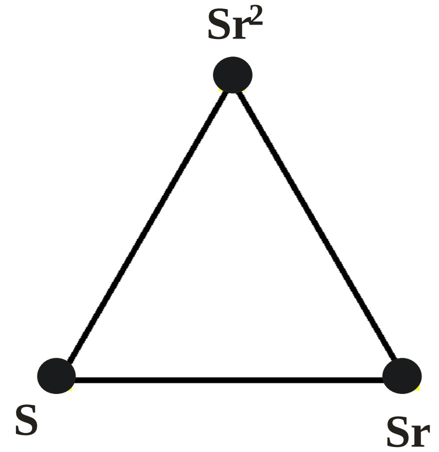
Gambar graf bintang$-2(S_2)$ terdiri dari tiga titik yaitu $\{s, r, r^2\}$ dimana titik s berderajat dua dan titik r^i berderajat satu. Maka berikut adalah fungsi-fungsi automorfisma yang mungkin dari graf bintang$-2(S_2)$ jika $\alpha: S_2 \rightarrow S_2$ adalah:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} S & r & r^2 \\ S & r & r^2 \end{pmatrix} = (S)(r)(r^2)$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} S & r & r^2 \\ S & r^2 & r \end{pmatrix} = (S)(r\,r^2)$$

Jika sudah ditemukan fungsi-fungsi automorfisma dari graf bintang-2 (S_2) maka dapat dituliskan himpunan permutasinya adalah $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Himpunan automorfisma graf bintang-2 (S_2) dengan anggota $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ merupakan suatu grup dengan jumlah anggota permutasi sebanyak dua anggota.

Apabila pada graf non komutating di atas jika diambil himpunan X dari seluruh unsur sr^i yaitu $X = \{s, sr, sr^2\}$ maka akan membentuk graf komplit order tiga yang disimbolkan dengan K_3



Gambar graf komplit$-3(K_3)$ terdiri dari tiga titik yaitu $V(K_2) = \{S, Sr, Sr^2\}$ dimana semua titik berderajat dua. Maka berikut adalah fungsi-fungsi automorfisma yang mungkin dari graf komplit$-3(K_3)$ jika $\varphi: K_3 \to K_3$ adalah:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^2 \\ S & Sr & Sr^2 \end{pmatrix} = (S)(Sr)(Sr^2)$$
$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^2 \\ S & Sr^2 & Sr \end{pmatrix} = (S)(Sr\, Sr^2)$$
$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^2 \\ Sr^2 & Sr & S \end{pmatrix} = (Sr)(S\, Sr^2)$$
$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^2 \\ Sr & S & Sr^2 \end{pmatrix} = (Sr^2)(S\, Sr)$$
$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^2 \\ Sr & Sr^2 & S \end{pmatrix} = (S\;\; Sr\;\; Sr^2)$$
$$\varphi_6 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^2 \\ Sr^2 & S & Sr \end{pmatrix} = (S\;\; Sr^2\;\; Sr)$$

Jika sudah ditemukan fungsi-fungsi automorfisma dari graf komplit-3 (K_3) maka dapat dituliskan himpunan permutasi yang automorfis adalah $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_4, \varphi_6\}$. Himpunan autoorfisma graf komplit-3 (K_3) memiliki permutasi yang automorfis sebanyak enam (6) anggota yaitu $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_4, \varphi_6\}$ yang tidak lain adalah grup simetri S_3.

Grup dihedral-8 (D_8) dibentuk oleh elemen-elemen $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Oleh karena itu jika grup dihedral-8 (D_8) dioperasikan dengan operasi " ∘ " akan menghasilkan unsur-unsur yang terdapat pada tabel *Cayley* di bawah ini:

Tabel 4.6. Tabel *Cayley* dari Grup D_8

$\circ$	**1**	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas menunjukkan bahwa pada grup dihedral-8 (D_8) terdapat dua elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1, r^2\}$, karena kedua elemen tersebut komutatif terhadap semua elemen grup dihedral-8 (D_8). Berikut adalah elemen-elemen yang non komutatif dari grup dihedral-8:

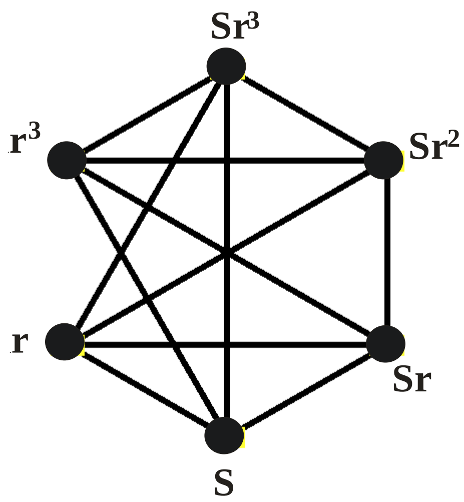
$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^3 \circ s \neq s \circ r^3 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3 \qquad s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$

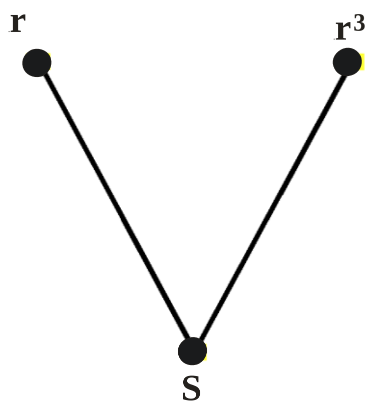
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r \qquad r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3 \qquad sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$$

Dari elemen-elemen yang non komutatif di atas, dapat digambarkan graf non komutingnya sebagai berikut:



Jika dari gambar graf non komuting di atas diambil misalkan himpunan X dari salah satu unsur Sr^i dan semua unsur r^i yaitu $X = \{s, r, r^3\}$ maka akan membentuk graf bintang-2 yang disimbolkan dengan S_2.



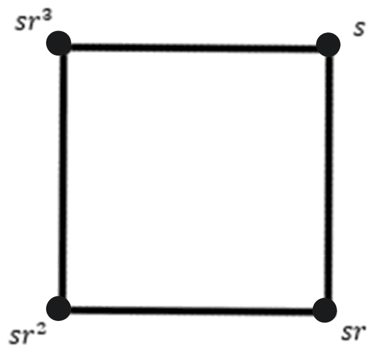
Gambar graf bintang-2 (S_2) terdiri dari tiga titik yaitu $V(S_2) = \{s, r, r^3\}$ dimana titik s berderajat dua dan titik r^i berderajat satu. Maka berikut adalah fungsi-fungsi automorfisma yang mungkin dari graf bintang$-2(S_2)$ jika $\alpha: S_2 \to S_2$ adalah:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^3 \\ S & Sr & Sr^3 \end{pmatrix} = (S)(Sr)(Sr^3)$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} S & Sr & Sr^3 \\ S & Sr^3 & Sr \end{pmatrix} = (S)(Sr\, Sr^3)$$

Jika sudah ditemukan fungsi-fungsi automorfisma dari graf bintang-2 (S_2) maka dapat dituliskan himpunan permutasinya adalah $\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Himpunan permutasi graf bintang-2 (S_2) dari salah satu unsur sr^i dan semua unsur r^i memiliki jumlah permutasi yang automorfis sebanyak dua (2) anggota yaitu $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Apabila dari gambar graf non komuting di atas di ambil himpunan X dari seluruh unsur Sr^i adalah $X = \{S, Sr, Sr^2, Sr^3\}$ maka akan membentuk graf sikel$-4(C_4)$.



Gambar graf sikel$-4(C_4)$ terdiri dari empat titik yaitu $V(C_4) = \{S, Sr, Sr^2, Sr^3\}$ dimana semua titik berderajat dua. Jika dimisalkan fungsi dari graf sikel-4 dari unsur seluruh Sr^idipetakan terhadap dirinya sendiri yaitu

$\varphi: C_4 \rightarrow C_4$, maka banyaknya kemungkinan fungsi permutasiφ yang automorfismedari sikel-4 sembilan (9) fungsi. Himpunan permutasi yang mungkin terjadi pada graf dihedral-8 $(D_{2.4})$ adalah sebagai berikut:

$$\varphi_1 = (s)(sr)(sr^2)(sr^3)$$

$$\varphi_2 = (s\ sr)(sr^2 sr^3)$$

$$\varphi_3 = (s\ sr^2)(sr\ sr^3)$$

$$\varphi_4 = (s\ sr^3)(sr\ sr^2)$$

$$\varphi_5 = (s)(sr^2)(sr\ sr^3)$$

$$\varphi_6 = (sr)(sr^2)(s\ sr^3)$$

$$\varphi_7 = (sr)(sr^3)(s\ sr^2)$$

$$\varphi_8 = (s\ sr\ sr^2 sr^3)$$

$$\varphi_9 = (s\ sr^2 sr^3\ sr)$$

Jika sudah ditemukan fungsi-fungsi automorfisma dari graf sikel-4 (C_3) maka dapat dituliskan himpunan permutasinya adalah $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{3,}\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9\}$ yang memuat sebanyak 9 anggota.

Grup dihedral-10 (D_{10}) dibentuk oleh elemen-elemen $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Oleh karena itu jika grup dihedral-10 (D_{10}) dioperasikan dengan operasi " $\circ$ " akan menghasilkan unsur-unsur yang terdapat pada tabel *Cayley* di bawah ini:

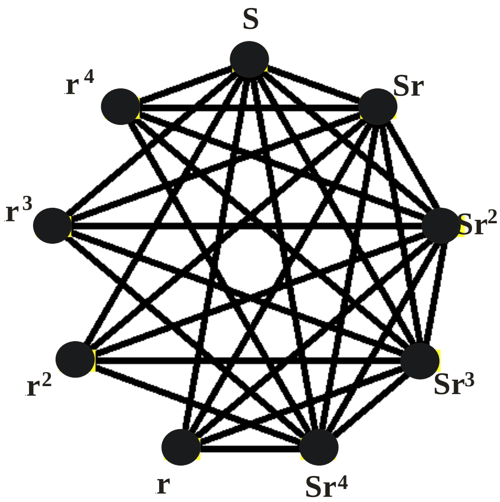
Tabel 4.7. Tabel *Cayley* dari Grup D_{10}

$\circ$	**1**	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{r^4}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$	$\boldsymbol{sr^4}$
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
$\boldsymbol{r^4}$	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
$\boldsymbol{sr^4}$	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

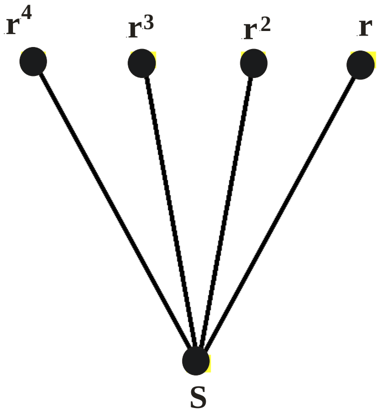
Berdasarkan tabel *Cayley* di atas menunjukkan bahwa pada grup dihedral-10 (D_{10}) terdapat elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1\}$, karena $\{1\}$ merupakan elemen komutatif terhadap semua elemen grup dihedral-10(D_{10}). Berikut adalah elemen-elemen yang non komutatif dari grup dihedral-10:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^{2} \circ s \neq s \circ r^{2} \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$
$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^{2} \circ sr \neq sr \circ r^{2} \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^{2} \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^{2} \qquad s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$
$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r \qquad r^{2} \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^{2} \qquad s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$$
$$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r \qquad r^{2} \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^{2} \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$
$$r^3 \circ s \neq s \circ r^3 \qquad r^4 \circ s \neq s \circ r^4 \qquad sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$$
$$r^{3} \circ sr \neq sr \circ r^3 \qquad r^4 \circ sr \neq sr \circ r^{4} \qquad sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$$
$$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^{3} \qquad r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^{4} \qquad sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$$
$$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3 \qquad r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4 \qquad sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$$
$$r^{3} \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3 \qquad r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4 \qquad sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$$

Dari elemen-elemen yang non komutatif di atas, dapat digambarkan graf non komutingnya sebagai berikut:



Jika dari gambar graf non komuting di atas jika kita ambil misalkan himpunan X dari salah satu unsur Sr^i dan semua unsur r^i yaitu $X = \{S, r, r^2, r^3, r^4\}$ maka akan membentuk graf bintang-4 (S_4).

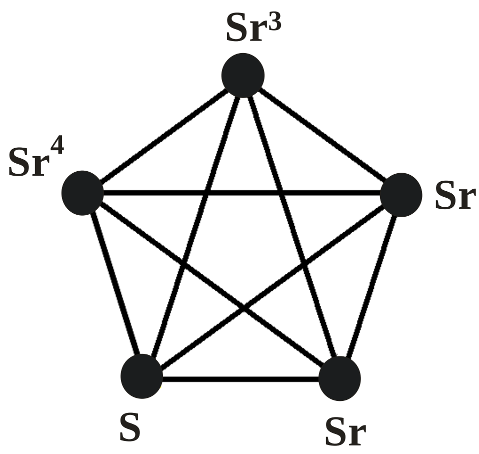


Gambar graf bintang$-4(S_4)$ terdiri dari lima titik yaitu $V(S_4) = \{S, r, r^2, r^3, r^4\}$ dimana titik S berderajat empat dan titik r^i berderajat satu. Maka berikut adalah fungsi-fungsi automorfisma yang mungkin dari graf bintang$-4(S_4)$ jika $\alpha: S_4 \rightarrow S_4$ adalah:

$\alpha_1 = (S)(r)(r^2)(r^3)(r^4)$
$\alpha_2 = (S)(r\,r^2r^3r^4)$
$\alpha_3 = (S)(r\,r^2r^4r^3)$
$\alpha_4 = (S)(r\,r^3r^2r^4)$
$\alpha_5 = (S)(r\,r^3r^4r^2)$
$\alpha_6 = (S)(r\,r^4r^2r^3)$
$\alpha_7 = (S)(r\,r^4r^3r^{42})$
$\alpha_8 = (S)(r)(\,r^2r^3r^4)$
$\alpha_9 = (S)(r)(\,r^2r^4r^3)$
$\alpha_{10} = (S)(r^2)(r\,r^3r^4)$
$\alpha_{11} = (S)(r^2)(r\;\,r^4r^3)$
$\alpha_{12} = (S)(r^3)(r\,r^2r^4)$
$\alpha_{13} = (S)(r^3)(r\,r^4r^2)$
$\alpha_{14} = (S)(r^4)(r\,r^2r^3)$
$\alpha_{15} = (S)(r^4)(r\,r^3r^2)$
$\alpha_{16} = (S)(r)(r^2)(r^3r^4)$
$\alpha_{17} = (S)(r)(r^3)(r^2r^4)$
$\alpha_{18} = (S)(r)(r^4)(r^2r^3)$
$\alpha_{19} = (S)(r^2)(r^3)(r\;\,r^4)$
$\alpha_{20} = (S)(r^2)(r^4)(r\,r^3)$
$\alpha_{21} = (S)(r^3)(r^4)(r\,r^2)$
$\alpha_{22} = (S)(r\,r^2)(\,r^3r^4)$
$\alpha_{23} = (S)(r\,r^3)\,(r^2r^4)$
$\alpha_{24} = (S)(r\,r^5)(\,r^2r^4)$

Jika sudah ditemukan fungsi-fungsi yang automorfisma dari graf bintang-4 ($V(S_4)$) maka dapat dituliskan bahwa himpunan permutasi yang automorfisma dari graf bintang$-4(V(S_4))$adalah berjumlah 24 permutasi.

Apabila dari gambar graf non komuting di atas diambil himpunan Y dari seluruh unsur Sr^i adalah $Y = \{S, Sr, Sr^2, Sr^3,\ Sr^4\}$ maka akan membentuk graf komplit$-5(K_5)$ yang disimbolkan dengan (K_5). Digambarkan sebagai berikut:



Gambar graf komplit-5 (K_5) terdiri dari lima titik yaitu $V(K_5) = \{S, Sr, Sr^2, Sr^3, Sr^4\}$ dimana semua titik berderajat empat. Jika dimisalkan fungsi dari graf sikel-4 dari unsur tersebut terhadap dirinya sendiri yaitu $\varphi: K_4 \rightarrow K_4$, maka banyaknya kemungkinan fungsi permutasi φ yang automorfisma dari sikel-4 kepada dirinya sendiri sebanyak 5! atau 120 permutasi.

Grup dihedral-12 (D_{12}) dibentuk oleh elemen-elemen $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^4\}$. Oleh karena itu jika grup dihedral-12 (D_{12}) dioperasikan dengan operasi " $\circ$ " akan menghasilkan unsur-unsur yang terdapat pada tabel *Cayley* di bawah ini:

Tabel 4.8. Tabel *Cayley* dari Grup D_{12}

$\circ$	**1**	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas menunjukkan bahwa pada grup dihedral-12(D_{12}) terdapat elemen yang menjadi *center* grup yaitu $\{1, r^3\}$, karena $\{1, r^3\}$ merupakan elemen komutatif terhadap semua elemen grup dihedral-12$(D_{2.6})$. Berikut adalah elemen-elemen yang non komutatif dari grup dihedral-12:

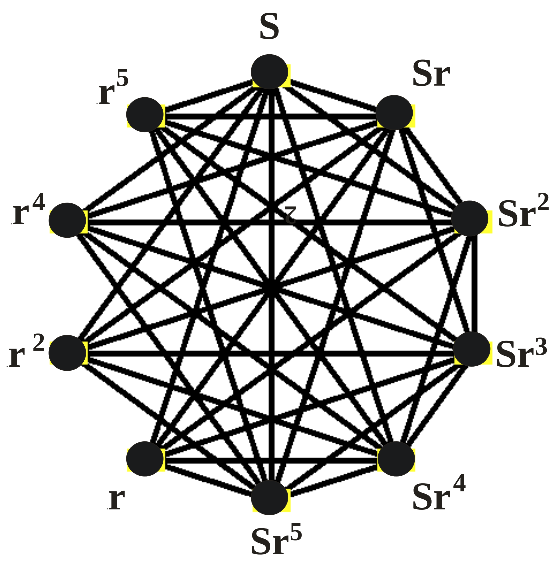
$$r \circ s \neq s \circ r$$
$$r \circ sr \neq sr \circ r$$
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$$
$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$$
$$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$$
$$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$$
$$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$$

$$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$$
$$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$$

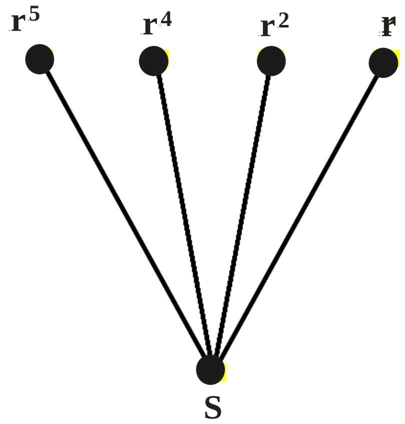
$$s \circ sr \neq sr \circ s$$
$$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$
$$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$$
$$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$$
$$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$
$$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$$
$$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$$

$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$
$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$
$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$	$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$	$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

Dari elemen-elemen yang non komutatif di atas, dapat digambarkan graf non komutingnya sebagai berikut:



Jika dari gambar graf non komuting di atas jika kita ambil misalkan himpunan Xdari salah satu unsur Sr^i dan semua unsur r^iyaitu $X = \{s, r, r^2, r^4, r^5\}$ maka akan membentuk graf bintang-4 yang disimbolkan dengan $V(S_4)$.

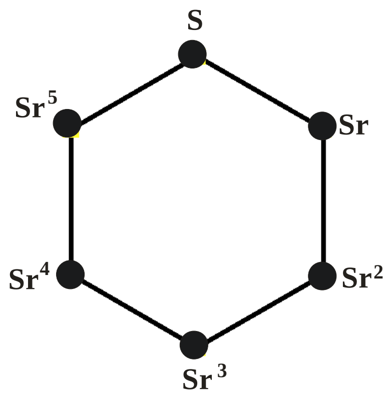


Gambar graf bintang$-4(S_4)$ terdiri dari lima titik yaitu $V(S_4) = \{S, r, r^2, r^4, r^5\}$ dimana titik s berderajat empat dan titik r^i berderajat satu. Maka berikut adalah fungsi-fungsi automorfisma yang mungkin dari graf bintang$-4(S_4)$ jika $\alpha: S_4 \to S_4$ adalah:

$\alpha_1 = (S)(r)(r^2)(r^4)(r^5)$
$\alpha_2 = (S)(r\, r^2 r^4 r^5)$
$\alpha_3 = (S)(r\, r^2 r^5 r^4)$
$\alpha_4 = (S)(r\, r^4 r^2 r^5)$
$\alpha_5 = (S)(r\, r^4 r^5 r^2)$
$\alpha_6 = (S)(r\, r^5 r^2 r^4)$
$\alpha_7 = (S)(r\, r^5 r^4 r^2)$
$\alpha_8 = (S)(r)(\, r^2 r^4 r^5)$
$\alpha_9 = (S)(r)(\, r^2 r^5 r^4)$
$\alpha_{10} = (S)(r^2)(r\, r^4 r^5)$
$\alpha_{11} = (S)(r^2)(r\ \ r^5 r^4)$
$\alpha_{12} = (S)(r^4)(r\, r^2 r^5)$
$\alpha_{13} = (S)(r^4)(r\, r^5 r^2)$
$\alpha_{14} = (S)(r^5)(r\, r^2 r^4)$
$\alpha_{15} = (S)(r^5)(r\, r^4 r^2)$
$\alpha_{16} = (S)(r)(r^2)(r^4 r^5)$
$\alpha_{17} = (S)(r)(r^4)(r^2 r^5)$
$\alpha_{18} = (S)(r)(r^5)(r^2 r^4)$
$\alpha_{19} = (S)(r^2)(r^4)(r\ \ r^5)$
$\alpha_{20} = (S)(r^2)(r^5)(r\, r^4)$
$\alpha_{21} = (S)(r^4)(r^5)(r\, r^2)$
$\alpha_{22} = (S)(r\, r^2)(\, r^4 r^5)$
$\alpha_{23} = (S)(r\, r^4)\ (r^2 r^5)$
$\alpha_{24} = (S)(r\, r^5)(\, r^2 r^5)$

Jika sudah ditemukan fungsi-fungsi automorfisma dari graf bintang-4 (S_4) maka dapat dituliskan bahwa himpunan permutasi yang automorfisma dari graf bintang-4 (S_4) adalah berjumlah 24 anggota permutasi.

Berdasarkan gambar graf non komuting di atas jika dimisalkan himpunan Y dari seluruh unsur Sr^i yaitu $Y = \{S, Sr, Sr^2, Sr^3,\ Sr^4, Sr^4\}$ maka akan membentuk graf sikel$-6(C_5)$ yang disimbolkan dengan $V(C_5)$. Digambarkan sebagai berikut:



Gambar graf sikel-6 (C_6) terdiri dari enam titik yaitu $V(C_6) = \{S, Sr, Sr^2, Sr^3, Sr^4, Sr^4\}$ dimana semua titik berderajat duat. Jika dimisalkan fungsi dari graf sikel-6 dari unsur tersebut terhadap dirinya sendiri yaitu $\varphi: C_6 \to C_6$, maka banyaknya kemungkinan fungsi φ yang satu-satu dan onto sdari sikel-6 kepada dirinya sendiri sebanyak 6! atau 720 fungsi.

Berdasarkan uraian beberapa kasus di atas dapat dirumuskan beberapa teorema berikut.

Teorema 4.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil lebih dari 2. Misalkan $X = \{sr^i, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-1}, yaitu berbentuk grup simetri S_{n-1}.

Bukti:

Pada $X = \{sr^i, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$, unsur $r, r^2, ..., r^{n-1}$ saling komutatif di D_{2n}. Akibatnya $r, r^2, ..., r^{n-1}$ tidak saling terhubung langsung di $NC(D_{2n}, X)$. Karena sr^i, $i = 0, 1, 2, ..., n$-1 tidak komutatif dengan $r, r^2, ..., r^{n-1}$ maka sr^i dan $r, r^2, ..., r^{n-1}$ akan saling terhubung langsung di $NC(D_{2n}, X)$. Dengan demikian akan diperoleh graf bintang $n - 1$, dengan sr^i sebagai titik pusat. Akibatnya grup automorfisma graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-1}. Karena grup automorfisma pada graf bintang S_{n-1} berisi semupa permutasi pada $\{ r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ maka grup ini akan berbentuk grup simetri S_{n-1}. Jadi, grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-1}, yaitu berbentuk grup simetri S_{n-1}.

Teorema 5.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli genap lebih dari 2. Misalkan

$$X = \{sr^i, r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}\}$$

adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-2}, yaitu berbentuk grup simetri S_{n-2}.

Bukti:

Pada $X = \{sr^i, r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}\}$ unsur $r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}$ saling komutatif di D_{2n}. Akibatnya $r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}$ tidak saling terhubung langsung di $NC(D_{2n}, X)$. Karena sr^i, $i = 0, 1, 2, ..., n$-1 tidak komutatif dengan $r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}$ maka sr^i dan $r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}$ akan saling terhubung langsung di $NC(D_{2n}, X)$. Dengan demikian akan diperoleh graf bintang $n - 2$, dengan sr^i sebagai titik pusat. Akibatnya grup automorfisma graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-2}. Karena grup automorfisma pada graf bintang S_{n-2} berisi semupa permutasi pada $\{ r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}\}$ maka grup ini akan berbentuk grup simetri S_{n-2}. Jadi, grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-2}, yaitu berbentuk grup simetri S_{n-2}.

Teorema 6.

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil lebih dari 2. Misalkan $X = \{sr^i \mid i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n, yaitu berbentuk grup simetri S_n.

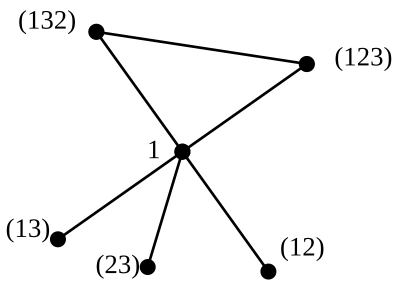
Bukti:

Pada $X = \{sr^i \mid i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1\}$ unsur sr^i, $i = 0, 1, 2, ..., n$-1 tidak komutatif di D_{2n} sehingga akan saling terhubung langsung di $NC(D_{2n}, X)$. Dengan demikian akan diperoleh graf komplit n. Akibatnya grup automorfisma graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n. Karena grup automorfisma pada graf komplit K_n berisi semua permutasi pada $\{sr^i \mid i = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1\}$ maka grup ini akan berbentuk grup simetri S_n. Jadi, grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n, yaitu berbentuk grup simetri S_n.

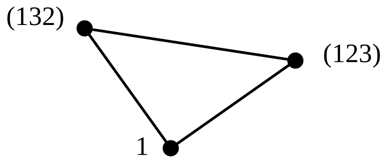
B. Grup Automorfisma pada Graf Komuting dari Grup Simetri

Diketahui bahwa grup simetri S_n memuat semuat permutasi pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Dengan demikian, maka banyak unsur pada S_n sebanyak $n!$ pada penelitian ini, pembahasan grup simetri dibatasi untuk n bilangan asli ganjil dan n lebih dari 2.

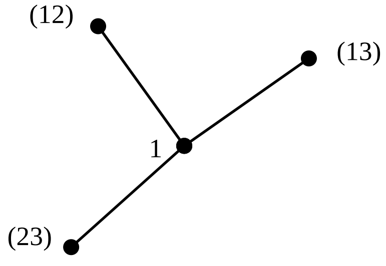
Pada grup simetri S_3, terdapat 6 unsur yaitu 1, (12), (13), (23), (123) dan (132). Karena grup simetri S_3 isomorfik dengan grup dihedral D_6, maka graf komuting S_3 bentuknya sama dengan graf komuting D_6, yaitu sebagai berikut.



Dengan memilih X = {1, (123), (132)} subset dari S_3, maka diperoleh graf komuting $C(S_3, X)$ berbentuk graf komplit K_3 berikut.



Selanjutnya dengan memilih X = {1, (12), (13), (23)} subset dari S_3, maka diperoleh graf komuting $C(S_3, X)$ berbentuk graf bintang $K_{1,3}$ berikut.



Diperoleh bahwa graf komuting $C(S_3, X)$ dengan X = {1, (123), (132)} berbentuk graf komplit K_3 sehingga grup automorfisme graf komuting $C(S_3, X)$ akan berupa grup simetri S_3. Sedangkan graf komuting $C(S_3, X)$ dengan X = {1, (12), (13), (23)} berbentuk graf bintang $K_{1,3}$ sehingga grup automorfisme graf komuting $C(S_3, X)$ akan berupa grup simetri S_3 juga.

Berdasarkan kenyataan pada grap komuting pada S3 di atas, maka dapat dibuat teorema berikut.

Teorema 7.

Misalkan S_n adalah grup simetri onder n! dengan n bilangan asli lebih dari 2. Misalkan X adalah himpunan semua sikel 2 tunggal di S_n yang saling bersekutu tepat pada satu unsur dan 1. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(S_n, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang $K_{1,|X|-1}$ yaitu berbentuk grup simetri $S_{|X|-1}$.

Bukti:

Diketahui bahwa S_n memiliki anggota sebanyak n! X adalah memuat 1 (identitas) dan semua sikel 2 tunggal yang saling bersekutu tepat di satu unsur. Semua sikel 2 di X akan komutatif dengan 1, tetapi antara sikel 2 ini tidak akan ada yang saling komutatif. Misal $x = (ab)$ dan $y = (cb)$ yang tepat bersekutu di unsur b, maka $xy = (ab)(cb) = (cab)$ dan $yx = (cb)(ab) = (acb)$. Diperoleh bahwa $xy \neq yx$. Dengan demikian, maka graf komuting $C(S_n, X)$ akan berbentuk graf bintang $K_{1,|X|}$. Grup automorfisma pada graf bintang $K_{1,|X|-1}$ akan memuat semua permutasi dari sebanyak $|X| - 1$ unsur karena 1 harus dipetakan ke dirinya sendiri. Dengan demikian, maka grup automorfisma ini akan berbentuk grup simetri $S_{|X|-1}$. Jadi, grup automorfisma dari graf komuting $C(S_n, X)$ berbentuk grup simetri $S_{|X|-1}$.

C. Grup Automorfisma pada Graf Komuting dan Graf Non Komuting dari Grup Quaternion

Grup quaternion, ditulis Q_8, didefinisikan dengan

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

dimana operasi perkalian · ditentukan sebagai berikut.

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ untuk semua } a \in Q_8.$$

$$(-1) \cdot (-1) = 1,\ (-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a, \text{ untuk semua } a \in Q_8.$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$$

$$i \cdot j = k, \qquad j \cdot i = -k$$

$$j \cdot k = i, \quad k \cdot j = -i$$

$$k \cdot i = j, \qquad i \cdot k = -j.$$

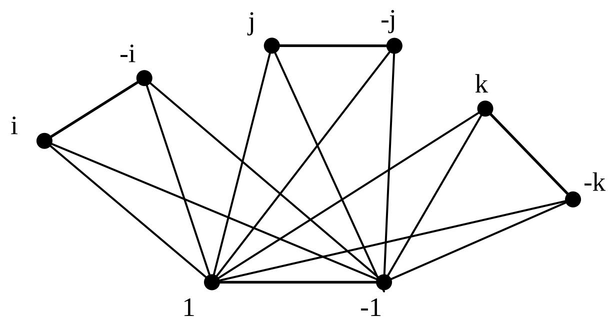
Dengan operasi tersebut, maka dapat diketahui bahwa Q_8 adalah grup non abelian order 8. Menggunakan tabel Cayley maka diperoleh Tabel 4.9.

Berdasarkan tabel tersebut, maka diperoleh bahwa unsur 1 dan -1 komutatif dengan semua unsur yang lain di Q_8. Unsur i dan –i, j dan –j, serta k dan –k saling komutatif.

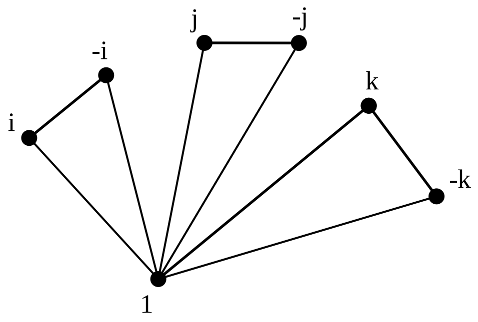
Tabel 4.9 Tabel *Cayley* dari Grup Q_8

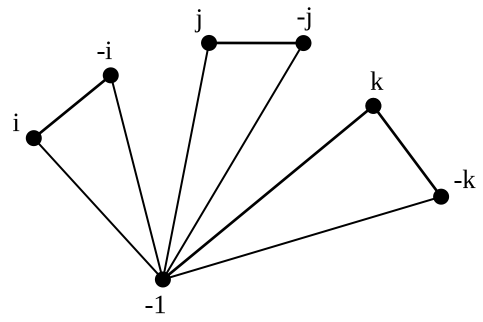
.	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	J	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Dengan demikian maka diperoleh graf komuting dari Q_8 sebagai berikut.



Dengan mengambil X = {1, i, -i, j, -j, k, -k} atau X = {-1, i, -i, j, -j, k, -k} maka graf komuting $C(Q_8, X)$ akan berbentuk graf kincir $Wd_{3,3}$, yaitu graf kincir dengan 3 daun kincir dan masing-masing daun berbentuk graf komplit K_3, sebagai berikut.





Dengan demikian maka grup automorfisma dari graf komuting $C(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $Wd_{3,3}$.

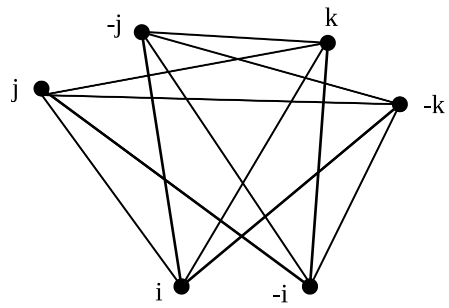
Lemma 1.

Misalkan Q_8 adalah grup quaternion dan $X = \{1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ atau $X = \{-1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $Wd_{3,3}$.

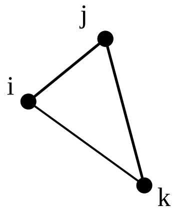
Bukti:

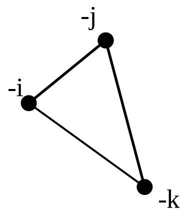
Pada grup Q_8 unsur 1 dan -1 komutatif dengan semua unsur di Q_8. Unsur i dan $-i$, j dan $-j$, serta k dan $-k$ juga saling komutatif. Akibatnya, pada graf komuting $C(Q_8, X)$ unsur-unsur yang saling komutatif tersebut akan saling terhubung langsung. Dengan demikian graf komuting $C(Q_8, X)$ akan berbentuk graf kincir $Wd_{3,3}$, yaitu graf kincir dengan 3 daun kincir dan masing-masing daun berbentuk graf komplit K_3. Jadi grup automorfisma dari graf komuting $C(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $Wd_{3,3}$.

Graf non komuting dari Q_8 sebagai berikut.



Graf non komuting ini tidak lain berbentuk graf multipatisi komplit $K_{3,3,3}$. Dengan mengambil X = {i, j, k} atau X = {-i, -j, -k} maka graf non komuting $C(Q_8, X)$ akan berbentuk graf komplit K_3.





Dengan demikian maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir K_3, yaitu himpunan semua permutasi pada X yang tidak lain adalah grup simetri S_3.

Lemma 2

Misalkan Q_8 adalah grup quaternion dan $X = \{i, j, k\}$ atau $X = \{-i, -j, -k\}$. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_3, yaitu berbentuk grup simetri S_3.

Bukti:

Pada grup Q_8, unsur $X = \{i, j, k\}$ atau $X = \{-i, -j, -k\}$ tidak saling komutatif. Dengan demikian, maka unsur-unsur tersebut di $NC(Q_8, X)$ akan saling terhubung langsung. Karena X hanya memuat 3 unsur, maka $NC(Q_8, X)$ akan berbentuk graf komplit K_3. Akibatnya, grup automorfisma dari graf non komuting $NC(Q_8, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma dari K_3, yaitu berbentuk grup simetri S_3.

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya maka kesimpulan yang dapat diajukan adalah:

1. Grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup dihedral memiliki sifat-sifat berikut.
   a. Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli lebih dari 2. Jika $X = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}, maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n, yaitu berbentuk grup simetri S_n.
   b. Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil lebih dari 2. Misalkan $X = \{1, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang $K_{1,n}$, yaitu berbentuk grup simetri S_n.
   c. Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli genap dari 3. Misalkan $X = \{1, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $W_{3,\frac{n}{2}}$, yaitu graf kincir dengan $\frac{n}{2}$ daun kincir yang masing-masing berbentuk graf komplit K_3.
   d. Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil lebih dari 2. Misalkan $X = \{sr^i, r, r^2, ..., r^{n-1}\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-1}, yaitu berbentuk grup simetri S_{n-1}.
   e. Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli genap lebih dari 2. Misalkan

$$X = \{sr^i, r, r^2, ..., r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, ..., r^{n-1}\}$$

adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang S_{n-2}, yaitu berbentuk grup simetri S_{n-2}.

f. Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n bilangan asli ganjil lebih dari 2. Misalkan $X = \{sr^i \mid i = 0, 1, 2, ..., n-1\}$ adalah subset dari D_{2n}. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(D_{2n}, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_n, yaitu berbentuk grup simetri S_n.

2. Grup automorfisma pada graf komuting grup simetri memiliki sifat-sifat berikut. Misalkan S_n adalah grup simetri onder $n!$ dengan n bilangan asli lebih dari 2. Misalkan X adalah himpunan semua sikel 2 tunggal di S_n yang saling bersekutu tepat pada satu unsur dan 1. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(S_n, X)$ akan isomorfik dengan grup automorfisma graf bintang $K_{1,|X|-1}$ yaitu berbentuk grup simetri $S_{|X|-1}$.
3. Grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup quaternion memiliki sifat-sifat berikut.
   a. Misalkan Q_8 adalah grup quaternion dan $X = \{1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ atau $X = \{-1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Maka grup automorfisma dari graf komuting $C(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf kincir $Wd_{3,3}$.
   b. Misalkan Q_8 adalah grup quaternion dan $X = \{i, j, k\}$ atau $X = \{-i, -j, -k\}$. Maka grup automorfisma dari graf non komuting $NC(Q_8, X)$ isomorfik dengan grup automorfisma graf komplit K_3, yaitu berbentuk grup simetri S_3.

B. Saran

Saran yang dapat diajukan berdasarkan hasil penelitian ini adalah masih perlunya dilakukan penelitian mengenai grup automorfisma pada graf komuting dan non komuting dari grup dihedral, grup simetri, serta grup quaternion dengan mengambil subset yang berbeda. Khusus untuk grup quaternion dapat dilakukan pada grup quaternion yang diperluas. Penelitian serupa juga dapat dilakukan pada jenis-jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. 2006. Non-commuting Graph of a Group. *Journal Of Algebra*, 468-492.

Abdussakir, Amalia, I. & Arifandi, Z. 2013. *Menentukan Spectrum Graf Commuting dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Agnarsson, G. dan Greenlaw, R. 2007. *Graph Theory: Modeling, Application, and Algorithms*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R.. 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R.. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Cameron, P.J. 2001. *Automorphisms of Graphs.* (Online) (http://www.designtheory.org/library.preprints/auts.pdf) diakses 23 April 2015.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. dan Oellermann, O.R.. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapore. McGraw-Hill, Inc.

Chelvam, Tamizh, T., Selvakumar, K., Raja, S. 2011. Commuting Graphs on Dihedral Groups. *The Journal of Mathematics and Computer* Science. 2 (2): 402-406.

Damayanti, R.T. 2011. *Automorphism of Star Graph and Path Graph.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Diestel, R. 2005. *Graph Theory, Electronic Edition 2005*. New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Fitriyah, A.T. 2011. *Automorfisme Graf Roda dan Graf Tangga.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ganesan, A. 2012. Automorphisms Group of Graphs. Presented at Pre-Conference Workshop on Algebraic Graph theory under the auspices of the 8th Annual Conference of the Academy of Discrete Mathematics and Applications, Virudhunagar, India, June 2012.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company.

Morris, J. 2000. *Automorphism Groups of Circulant Graphs: a Survey*. (Online) (http://www.cs.uleth.ca/~morris/Research/AutSurvey.pdf) diakses 23 April 2015.

Nawawi, Athirah dan Peter Rowley. 2012. *On Commuting Graphs for Elements of Order 3 in Symetry Groups.* Manchester: *The MIMS Secretary.*

Raisinghania, M., & Aggrawal, R. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi : S. Chand & Company Ltd.

Rosyidah, H. 2010. *Grup Automorfisme Graf Komplit dan Graf Sikel*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Vahidi, J. & Talebi, A.A.. 2010. The Commuting Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 1 (2): 123-127.