MATEMATIKA

LAPORAN

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

SIFAT-SIFAT GRAF KOSET DAN GRAF KONJUGASI DARI GRUP NON KOMUTATIF

Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen

Graf Konjugasi dari Grup Dihedral

Disusun oleh:

Dr. Abdussakir, M.Pd

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG

2016

LAPORAN

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

SPEKTRUM GRAF KONJUGASI DAN GRAF KOMPLEMEN GRAF KONJUGASI DARI GRUP DIHEDRAL

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2016

PENGESAHAN LAPORAN

PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI

1	Judul Penelitian	:	**Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral**	
2	Ketua Peneliti	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	
3	Peneliti & Judul Penelitian	:	Ketua	Spektrum Adjacency Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral
			Mahasiswa 1	Spektrum Laplace Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral
			Mahasiswa 2	Spektrum Laplace Graf Konjugasi dari Grup Dihedral
4	Bidang Ilmu	:	Aljabar	
5	Mahasiswa	:	1. M. Muzakir (NIM. 13610077) 2. Rhoul Khasanah (NIM. 13610021)	
6	Lama Kegiatan	:	5 (Lima) Bulan	
7	Biaya yang diusulkan	:	Rp. 10.000.000,-	

Malang, 19 Desember 2016

Disahkan oleh:
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si
NIP. 19710919 200003 2 001

Peneliti,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001

Ketua LP2M
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.
NIP. 19600910 198903 2 001

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt., sehingga dengan rahmat dan hidayah-Nya laporan penelitian dengan judul “Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral**”** dapat diselesaikan. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia menuju jalan yang lurus, yaitu agama Islam.

Selama penyusunan laporan ini, peneliti telah dibantu oleh banyak pihak. Pada kesempatan ini, peneliti menyampaikan terima kasih kepada.

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh Pembantu Dekan di Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, beserta rekan-rekan dosen Jurusan Matematika.
4. Dosen dan staf di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Semua anggota tim penelitian.

Peneliti mendo’akan semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT.

Malang, Desember 2016
Peneliti

ABSTRAK

Pada penelitian ini ditentukan beberapa spektrum dari graf konjugasi dan graf komplemen graf kojugasi dari grup dihedral. Spektrum yang diteliti meliputi spektrum adjacency dan spektrum Laplace. Berdasarkan penelitian ini diperoleh:

1. Spektrum *adjacency* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_A\big(G(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & n-1 \\ \frac{3(n-1)}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_L(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & n \\ \frac{n+3}{2} & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum Laplace graf komplemen dari graf konjugasi pada D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$spec_L\left(\overline{G(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & n & \frac{2n-2}{\frac{n-1}{2}} & \frac{2n}{\frac{n-1}{2}} \\ 1 & n-1 & & \end{bmatrix}$$

4. Spektrum Laplace graf komplemen dari graf konjugasi pada D_{2n} untuk n genap adalah

$$spec_L\left(\overline{G(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3n}{2} & \frac{2n-2}{\frac{n-2}{2}} & \frac{2n}{\frac{n+4}{2}} \\ 1 & n-2 & & \end{bmatrix}$$

Kata kunci: Spektrum adjacency, spektrum Laplace, graf konjugasi, grup dihedral

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. *Derajat dari titik v* di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$.

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks adjacency dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks adjacency suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3,$

…, p. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \le i, j \le p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks Laplace dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks Signless Laplace dari graf G.

Pada graf G, lintasan-v_1v_n adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkankan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks Detour dari G adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G.

Pembahasan matriks Adjacency $A(G)$, matriks Laplace $L(G)$, matriks Signless Laplace $L^+(G)$, dan matriks Detour $DD(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep *spectrum*. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan Spec(G). Jadi, spectrum graf G dapat ditulis dengan

$$\mathrm{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum Adjacency, dari matriks $L(G)$ disebut spektrum Laplace, dari matriks $L^+(G)$ disebut spekturm Signed-Laplace, dan dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum Detour.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin (2006) meneliti spektrum Adjacency dan spektrum Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum adjacency pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy & Balachandran (2010) meneliti spektrum Detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n, n)$, graf Korona G dan K_1, graf perkalian Kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan. Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum Adjacency, Laplace, Singless Laplace, dan Detour graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Abdussakir, dkk (2013) meneliti spektrum spektrum Adjacency, Laplace, Singless Laplace, dan Detour graf commuting dari grup dehidral. Rivatul Ridho Elvierayani (2014) meneliti spektrum Adjacency, Laplace, Singless Laplace graf non commuting dari grup dehidral, sedangkan Nafisah (2014) meneliti spektrum Detour graf non commuting dari grup dehidral.

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat saling konjugasi. Misalkan G grup non komutatif. Unsur g dan h di G dikatakan saling konjugasi jika ada x di G sehingga $g = xhx^{-1}$. Misalkan semua kelas konjugasi di G adalah [e], $[g_1]$, $[g_2]$, …, $[g_n]$. Pada graf konjugasi dari grup G, unsur h akan terhubung langsung ke g_i, jika h anggota $[g_i]$.

Penelitian mengenai graf konjugasi telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Hartanto (2012) sudah meneliti sifat-sifat graf konjugasi dari grup dehidral terkait bentuk grafnya. Wahyu H. Irawan (2015) meneliti pola umum graf konjugasi dari grup dehidral dan grup simetri.

Sampai saat ini belum ada yang mengkaji spektrum pada graf konjugasi dari grup dehidral. Pada penelitian ini, akan dikaji spektrum dari graf konjugasi dan graf komplemen graf konjugasi dari grup dehidral (D_{2n}).

B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana pola umum spektrum (*Adjacency*, Laplace, Signless Laplace, atau Detour) graf konjugasi dan graf komplemen graf konjugasi dari grup dehidral (D_{2n}).

C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan pola umum spektrum (*Adjacency*, Laplace, Signless Laplace, atau Detour) graf konjugasi dan graf komplemen graf konjugasi dari grup dehidral (D_{2n}).

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai *spektrum* suatu graf yang diperolah dari suatu grup.
2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topic dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak.

BAB II
STUDI PUSTAKA

A. Graf

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan *menghubungkan* titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut *terhubung langsung* (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$.

B. Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut *lingkungan dari v* dan ditulis $N_G(v)$. *Derajat dari titik v* di graf G, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

$$\deg(v) = |N(v)|$$

Titik yang berderajat 0 disebut *titik terasing* atau *titik terisolasi*. Titik yang berderajat 1 disebut *titik ujung* atau *titik akhir*. Titik yang berderajat genap disebut *titik genap* dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil*. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$.

Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

disebut sebagai "Teorema Pertama dalam Teori Graf" yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$. Maka

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$$

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa

$$\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q \,. \; \square$$

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graf selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.

Bukti

Misalkan G graf. Misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G. Maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q.$$

Karena X adalah himpunan titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap.

Karena $2q$ adalah bilangan genap dan $\sum_{v\in X}\deg(v)$ juga genap maka

$\sum_{v\in Y}\deg(v)$ haruslah bilangan genap.

Karena Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v\in Y}\deg(v)$ adalah bilangan genap, maka

banyak titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka

$\sum_{v\in Y}\deg(v)$ adalah ganjil.

Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap. □

Graf G dikatakan *beraturan-r* atau *beraturan dengan derajat r* jika masing-masing titik v di G, maka $deg(v) = r$, untuk bilangan bulat taknegatif r. Suatu graf disebut *beraturan* jika graf tersebut beraturan-r untuk suatu bilangan bulat taknegatif r. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan *graf kubik*.

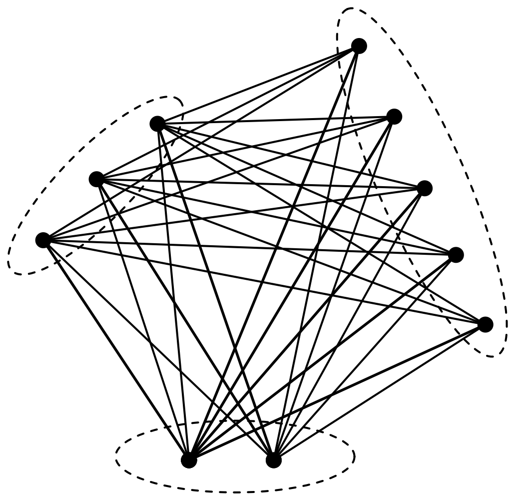
Graf G dikatakan *komplit* jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan-$(n-1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Graf G dikatakan *bipartisi* jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisi beraturan-r, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan *partisi-n* jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi-n disebut graf tripartisi.

Suatu graf G disebut *bipartisi komplit* jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf *bintang (star)* dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order (n – 1) dan ukuran n.

Graf G dikatakan *partisi-n komplit* jika G adalah graf partisi-n dengan himpunan partisi V_1, V_2, …, V_n, sehingga jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$, maka graf ini dinotasikan dengan $K_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$. Urutan p_1, p_2, …, p_n tidak begitu diperhatikan. Graf partisi-n komplit merupakan graf komplit K_n jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i. Jika $p_i = t$ untuk semua i, $t \geq 1$, maka graf partisi-n komplit ini merupakan graf beraturan dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Jadi, $K_{n(1)}$ tidak lain adalah K_n. Berikut ini adalah contoh graf tripartisi komplit $K_{2,3,5}$. Perhatikan bahwa titik dalam satu partisi tidak boleh terhubung langsung.

$K_{2,3,5}$:



C. Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). *Jalan u-v* pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u=v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

adalah sisi di G. v_0 disebut *titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, titik v_1, v_2, …, v_{n-1} disebut *titik internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut *jalan terbuka*. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*.

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan u-v

$$W: u=v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u=v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v.$$

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut ***trail***. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut ***lintasan***. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan.

Teorema 3

Setiap jalan u-v pada suatu graf selalu memuat lintasan u-v.

Bukti

Misalkan W adalah jalan u-v di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G. Misalkan

$$W: u=v_o, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v$$

adalah jalan u-v terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan u-v. Jika ada titik yang berulang di W, misakan i dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan u-v baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan u-v. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan u-v yang merupakan lintasan u-v. □

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan *graf lintasan order n* dan ditulis P_n. Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut *sirkuit*. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut *sikel*. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan taktrivial pada graf G disebut *sirkuit* di G. Sirkuit

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1 \ (n \geq 3)$$

dengan dengan v_i, i = 1, 2, 3, …, n berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k. Sikel-k disebut genap atau ganjil bergantung pada k genap atau ganjil.

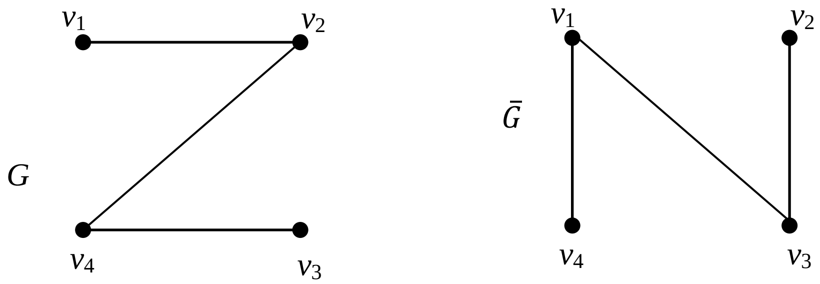
Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut *graf sikel* dan ditulis C_n. Graf sikel sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya graf sikel digambar dalam bentuk suatu lingkaran.

Graf sikel dapat juga digambar dalam bentuk poligon. C_3 dapat disebut segitiga, C_4 segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut *segi-n*. Sikel yang banyak titiknya ganjil disebut *sikel ganjil* dan sikel yang banyak titiknya genap disebut *sikel genap*.

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan *terhubung* (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dikatakan *terhubung* (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan *terhubung* (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*).

Untuk suatu graf terhubung G, maka *jarak* $d(u,v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G. Jika tidak ada lintasan dari titik u ke v, maka didefinisikan jarak $d(u,v) = \infty$. *Eksentrisitas* $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari titik v ke setiap titik di G dapat dituliskan $e(v) = max\{d(u,v) : u \in V(G)\}$. Titik v dikatakan *titik eksentrik* dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(u,v)=e(u)$. *Radius* dari G adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $rad\ G = min\{e(v), v \in V\}$. Sedangkan *diameter* dari G, dinotasikan *diam* G adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di G, dapat dituliskan $diam\ G = max\{e(v), v \in V\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Graf komplemen $\bar{G}$ dari graf G adalah graf dengan himpunan titik V($\bar{G}$) = V(G) dan dua titik akan terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Artinya jika xy $\in$ E(G) maka xy $\notin$ E($\bar{G}$) dan sebaliknya. Dengan demikian maka gabungan antara $\bar{G}$ dan G akan menghasilkan graf komplit, atau q + $\bar{q}$ = $\binom{n}{2}$. Sebagai contoh perhatikan graf berikut.



D. Graf dan Matriks

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks keterhubungan*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel.

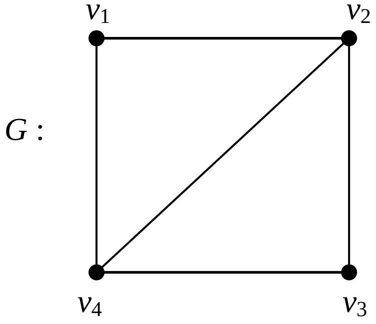
Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf G dengan himpunan titik

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}.$$

Maka, diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut.



$$A(G) : \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$. *Matriks keterhubungan sisi* dari graf G, dinotasikan dengan $B(G)$ adalah matriks ($q \times q$) yang unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika sisi e_i terhubung langsung dengan sisi e_j, dan 0 untuk lainnya. Dengan kata lain, matriks keterhubungan sisi dapat ditulis $B(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq q$, dengan

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ terhubung langsung} \\ 0 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ tidak terhubung langsung} \end{cases}$$

Matriks keterhubungan sisi suatu graf G juga merupakan matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf G dengan himpunan titik

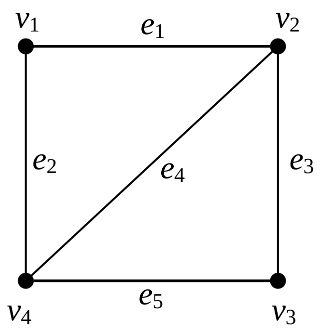
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}.$$

Maka, diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut.

G :



$$B(G) : \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$. *Matriks keterkaitan* dari graf G, dinotasikan dengan $I(G)$ adalah matriks ($p \times q$) yang unsur pada baris i dan kolom j adalah bilangan yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j. Dengan kata lain, matriks keterkaitan dapat ditulis $I(G) = [c_{ij}]$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ dengan

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0 & \text{, jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

Matriks keterkaitan suatu graf G adalah matriks dengan unsur 0 dan 1.

Perhatikan contoh berikut. Misalkan graf G dengan himpunan titik

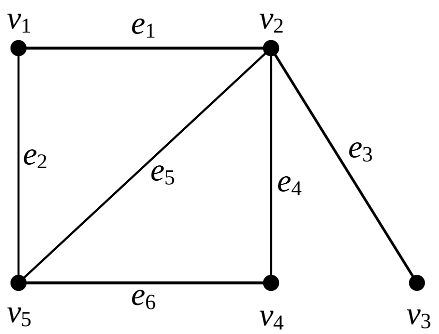
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

dan himpunan sisi

$$E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}.$$

Maka, diagram dan matriks keterkaitan dari graf G sebagai berikut.

G :



$$I(G) : \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

E. Spektrum Graf

Matriks keterhubungan banyak digunakan untuk membahas karakteristik graf karena matriks keterhubungan merupakan matriks persegi. Bekerja dengan matriks persegi memberikan banyak kemudahan dibanding dengan matriks tidak persegi. Berikut ini merupakan suatu perluasan pembahasan matriks keterhubungan suatu graf dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier.

Misalkan G graf berorder p dan A adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen *(eigen vector)* dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah suatu kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; yakni, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, untuk sebarang scalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari A, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ. Untuk menentukan nilai eigen dari matriks A, persamaan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ditulis kembali dalam bentuk

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0,$$

dengan I adalah matriks identitas berordo $(1 \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

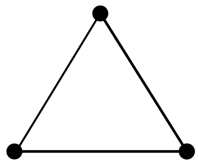
Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variable λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks *A*. Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai–nilai eigen dari matriks *A*.

Misalkan λ_1, λ_2, …, λ_n adalah nilai eigen berbeda dari *A*, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_1)$, …, $m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat λ_1, λ_2, …, λ_n pada baris pertama dan $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_1)$, …, $m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf *G*, dan dinotasikan dengan Spec(*G*). Jadi, spectrum graf *G* dapat ditulis dengan

$$\text{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Sebagai contoh untuk menentukan spectrum suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungannya berikut ini.

K_3 :



$$A : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertama akan ditentukan nilai eigen dari *A* menggunakan persamaan $det(A - \lambda I) = 0$. Diperoleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda^3 - 2)(\lambda + 1)^2 = 0.$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Melalui operasi baris elementer pada matriks yang diperluas dari persamaan homogen ini, diperoleh matriks eselon tereduksi baris berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, terdapat 1 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_1 = 2$.

Untuk $\lambda_2 = -1$, maka

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Akan diperoleh suatu persamaan tunggal, yaitu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_2 + x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, terdapat 2 basis untuk ruang vektor eigen pada $\lambda_2 = -1$.

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ serta $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$. Dengan demikian, maka spectrum graf K_3 adalah

$$\text{Spec}(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Spektrum yang dicontohkan di atas disebut spectrum Adjacency karena diperoleh dari matriks adjacency graf.

Selain konsep matriks adjacency, masih terdapat konsep matriks lainnya yang dapat diperoleh dari suatu graf. Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \le i, j \le p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks Laplace dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks Signless Laplacedari graf G.

Pada graf G, lintasan-v_1v_n adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkankan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks Detour dari G adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G.

F. Grup Dehidral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b=b*a$ untuk semua $a,b\in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14). Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi jumlah memenuhi aksioma grup, yakni (Z, +) adalah grup abelian.

Grup *dehidral* adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* bilangan bulat positif dan $n\geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dehidral* dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:24-25). Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s,t\in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi).Jika s,t akibat permutasi titik berturut-turut σ,τ, maka *st* akibat dari $\sigma\circ\tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s\in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Karena grup dehidral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s|=2$,

(3) $s\neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i\neq sr^j$ untuk semua $0\leq i, j\leq n-1$ dengan $i\neq j$. Jadi

$$D_{2n}=\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\ldots,sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk *k* = 0 atau 1 dan $0\leq i\leq n-1$.

(5) $sr=r^{-1}s$.

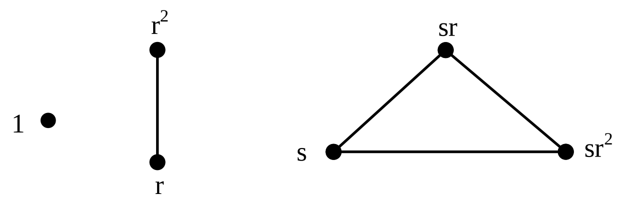
(6) $sr^i=r^{-i}s$, untuk semua $0\leq i\leq n$ (Dummit dan Foote, 1991:26).

Sebagai contoh D_6 adalah grup dihendral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga D_6 = {1, r, r^2, s, sr, sr^2}.

G. Graf Konjugasi

Misalkan G grup non komutatif. Unsur g dan h di G dikatakan saling konjugasi jika ada x di G sehingga $g = xhx^{-1}$. Karena $g = xhx^{-1}$ maka akan diperoleh $h = x^{-1}g(x^{-1})^{-1}$. Misalkan semua kelas konjugasi di G adalah $[e]$, $[g_1]$, $[g_2]$, …, $[g_n]$. Pada graf konjugasi dari grup G, unsur h akan terhubung langsung ke g_i, jika h anggota $[g_i]$.

Sebagai contoh pada grup dehidral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Maka klas konjugasi dari D_6 adalah $[1]$, $[r] = \{r, r^2\}$, dan $[s] = \{s, sr, sr^2\}$. Dengan demikian akan diperoleh graf konjugasi dari grup D_6 sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf Konjugasi dari D_6

BAB IV
PEMBAHASAN

A. Spektrum *Adjacency* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral

1. Spektrum *Adjacency* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_6})$

Grup dihedral $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan operasi komposisi diperoleh tabel cayley sebagai berikut:

Tabel 4.1 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 $(\boldsymbol{D_6})$

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas dapat ditunjukkan kelas-kelas konjugasi (D_6). Dikatakan saling konjugasi jika ada $x \in D_6$ sehingga $g = xhx^{-1}$. Karena $g = xhx^{-1}$ maka akan diperoleh $h = x^{-1}\, g(x^{-1})^{-1}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi. Ambil $g = 1$ dan $h = 1$ dimana $1 \in D_6$, pilih $x = 1$ maka diperoleh

   $g = xhx^{-1}$

   $1 = 1\ 11^{-1}$

   $1 = 1\ 1$

   $1 = 1$

   $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $1 = 1\ 11^{-1}$.

   Sehingga kelas konjugasi [1] adalah $\{1\}$.

2. Akan ditunjukkan bahwa r dan r^2 saling konjugasi.

   Ambil $g = r$ dan $h = r^2$ dimana $r, r^2 \in D_6$, pilih $x = s$ maka diperoleh

   $g = xhx^{-1}$

$r = sr^2s^{-1}$

$r = sr^2s$

$r = r$

r dan r^2 saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $r = sr^2s^{-1}$. Sehingga kelas konjugasi $[r] = \{r, r^2\}$.

3. Akan ditunjukkan bahwa s, sr, sr^2 saling konjugasi.

a) Akan ditunjukkan s, sr saling konjugasi

Ambil $g = s$ dan $h = sr$ dimana $s, sr \in D_6$, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$s = r^2sr(r^2)^{-1}$

$s = sr^2r$

$s = s$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $r = sr^2s^{-1}$.

b) Akan ditunjukkan sr, sr^2 saling konjugasi

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2$ dimana $sr, sr^2 \in D_6$, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$sr = r^2sr^2(r^2)^{-1}$

$sr = sr$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $sr = r^2sr^2(r^2)^{-1}$.

c) Akan ditunjukkan sr^2, s saling konjugasi

Ambil $g = sr^2$ dan $h = s$ dimana $sr^2, s \in D_6$, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$sr^2 = r^2s(r^2)^{-1}$

$sr^2 = sr\,r$

$sr^2 = sr^2$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $sr^2 = r^2s(r^2)^{-1}$.

Dari poin a), b), dan c) terbentuklah suatu kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, sr^2\}$ dimana s, sr dan sr^2 saling konjugasi.

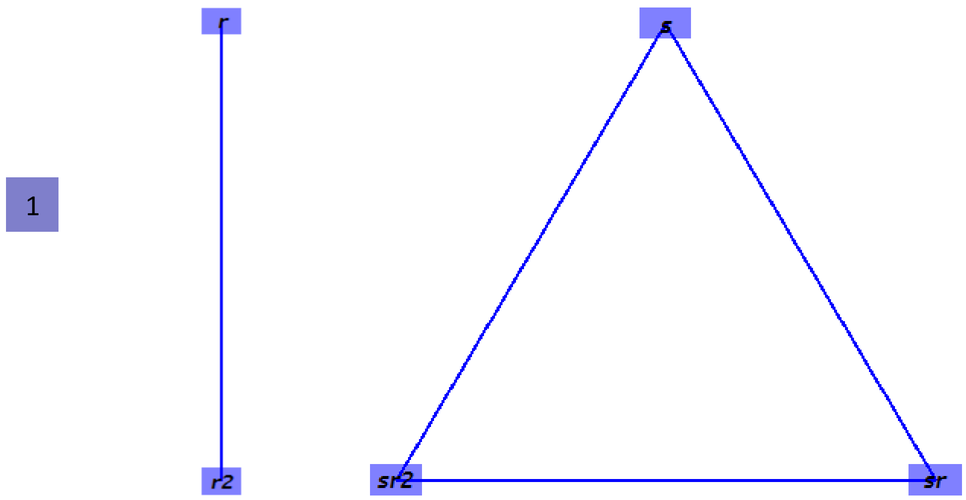
Dari poin 1, 2, dan 3 maka terbentuklah kelas-kelas konjugasi dari grup D_6 yaitu:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{ r, r^2\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi D_6 sebagai berikut:



Gambar 4.1 Graf Konjugasi D_6

Dari graf tersebut dapat diketahui matriks *adjacency* dari graf konjugasi grup D_6 :

$$A(D_6) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan matriks *Adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *Adjacency* tersebut

$det(A(D_6) - \lambda I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gaus* yang terdapat pada *software* Maple 18 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

Karena $det(A(D_6) - \lambda I)$ merupakan hasil perkalian diagonal matriks segitiga maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$det(A(D_6) - \lambda I) = (-\lambda)^3 \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2 \left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)$$

Karena $det(A(D_6) - \lambda I) = 0$ maka,

$det(A(D_6) - \lambda I) = (-\lambda)^3 \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2 \left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right) = 0$

Sehingga diperoleh nilai eigenya:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut .

Untuk $\lambda_1 = -1$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ sebanyak 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 0$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 1$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 1$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = 2$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi* Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = 2$ sebanyak 1.

Matriks *Adjacency* dengan persamaan $(L(D_6) - \lambda I)$ dapat diketahui nilai eigen dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen, dengan demikian terbentuklah spektrum *Adjacency* dari graf konjugasi dari grup D_6 sebagai berikut:

$$spec_A(G(D_6)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum *Adjacency* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{10})

Grup dihedral $(D_{10}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Dengan operasi komposisi, maka akan diketahui kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral (D_{10}). Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup (D_{10}) maka dilakukan langkah-langkah seperti pada D_6 sehingga diperoleh kelas-kelas konjugasi sebagai berikut:

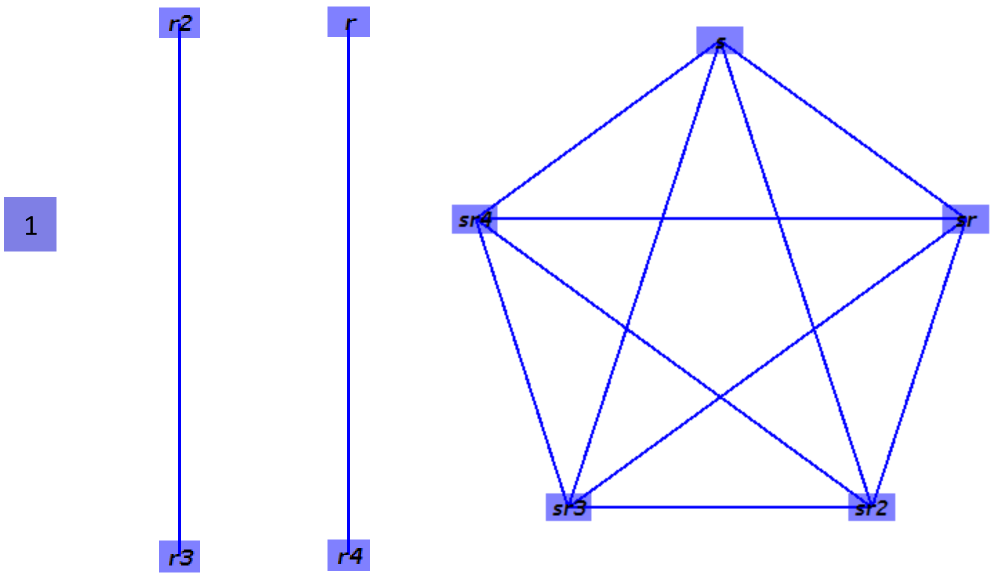
$[1] = \{1\}$

$[r] = \{ r, r^4\}$

$[r^2] = \{ r^2, r^3\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup (D_{10}) sebagai berikut:



Gambar 4.2 Graf Konjugasi D_{10}

Dari graf konjugasi dari grup (D_{10}) yang telah diperoleh dapat ditentukan matriks *Adjacency* sebagai berikut:

$$
A(D_{10}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ r^3 \\ r^4 \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ sr^4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & s & sr & sr^2 & sr^3 & sr^4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Setelah mendapatkan matriks *Adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A(D_{10})$ dengan cara:

$det(A(D_{10}) - \lambda I) = 0$

maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$(-\lambda)^4 \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^3 \left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}\right)$

Karena $det(A(D_{10}) - \lambda I) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya yaitu:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4.$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ sebanyak 6. Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 1. Untuk $\lambda_3 = 1$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 1$ sebanyak 2. Untuk $\lambda_4 = 4$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = 4$ sebanyak 1. Matriks *Adjacency* dengan persamaan $(A(D_{10}) - \lambda I)$ yang telah diketahui nilai eigen dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen, dengan demikian terbentuklah spektrum *Adjacency* dari graf konjugasi dari grup D_{10} sebagai berikut:

$$spec_A(G(D_{10})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum *Adjacency* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{14}})$

Grup dihedral $(D_{14}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan operasi komposisi, maka akan diketahui kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral (D_{14}). Untuk memperoleh kelas-kelas konjugasi dari grup (D_{14}) maka dilakukan langkah-langkah seperti sebelumnya sehingga kelas-kelas konjugasi dari grup (D_{14}) sebagai berikut:

$[1] = \{1\}$

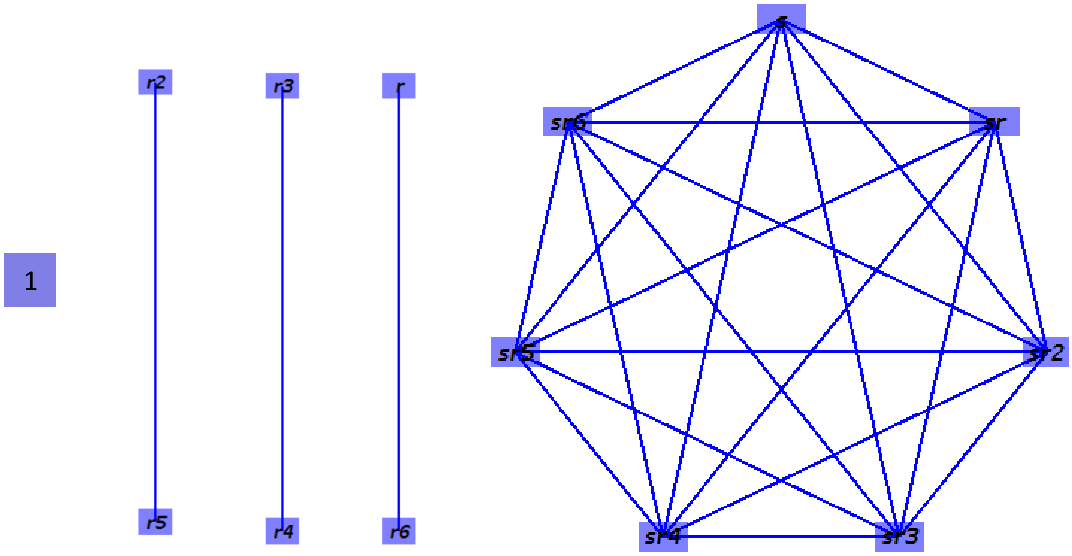
$[r] = \{ r, r^6\}$

$[r^2] = \{ r^2, r^5\}$

$[r^3] = \{ r^3, r^4\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup (D_{14}) sebagai berikut:



Gambar 4.3 Graf Konjugasi D_{14}

Dari graf konjugasi dari grup (D_{14}) yang telah diperoleh dapat ditentukan matriks *Adjacency* sebagai berikut:

$$A(D_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A(D_{14})$ dengan cara

$det(A(D_{14}) - \lambda I) = 0$

Maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$(-\lambda)^5\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^4\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}\right)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^2-5\lambda-6}{\lambda-5}\right)$$

Karena $det(L(D_{14}) - \lambda I) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya yaitu:

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 6$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{14}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ sebanyak 9. Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{14}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 0$ sebanyak 1. Untuk $\lambda_3 = 1$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{14}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 1$ sebanyak 3. Untuk $\lambda_4 = 6$ disubstitusikan ke dalam $(A(D_{14}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_4 = 6$ sebanyak 1.

Matriks *Adjacency* dengan persamaan $(A(D_{14}) - \lambda I)$ yang telah diketahui nilai eigen dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen, dengan demikian terbentuklah spektrum *Adjacency* dari graf konjugasi dari grup D_{14} sebagai berikut:

$$spec_A(G(D_{14})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Pola Spektrum *Adjacency* Graf Konjugasi pada (D_{2n})

Dari spektrun yang telah ditemukan maka diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *Adjacency* dari graf konjugasi dari beberapa grup dihedral di antaranya:

Tabel 4.2 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* dari Beberapa Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	Graf Konjugasi	Polinomial Graf Konjugasi
1.	Graf konjugasi D_6	$(-\lambda)^3 \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2 \left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)$
2.	Graf konjugasi D_{10}	$(-\lambda)^4 \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^3 \left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}\right)$
3.	Graf konjugasi D_{14}	$(-\lambda)^5 \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^4 \left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}\right)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^2-5\lambda-6}{\lambda-5}\right)$

Tabel 4.3 Spektrum *Adjacency* dari Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	Graf Konjugasi	Spektrum Graf Konjugasi
1.	Graf konjugasi D_6	$spec_{A(D_6)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
2.	Graf konjugasi D_{10}	$spec_{A(D_{10})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
3.	Graf konjugasi D_{14}	$spec_{A(D_{14})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 6 \\ 9 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Dari tabel di atas dapat dirumuskan teorem berikut:

Teorema 1

Polinomial karakteristik matriks *adjacency* $A(D_{2n})$ pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left((n-1)\right.$$
$$\left.-\lambda\right)\left\{\left(-\frac{\lambda^2-(2n-2)\lambda+(n^2-2n)}{\lambda-(1-n)}\right)\dots\left(-\frac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1}\right)\right\}$$

Bukti

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil diperoleh bahwa $(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n+1}{2}}\}$,$\forall\, 1, r^{\frac{n+1}{2}}$ jika dioperasikan dengan opersi komposisi ($\circ$) di D_{2n} maka akan menghasilkan unsur-unsur yang saling konjugasi. Dengan demikian terbentuklah graf konjugasi D_{2n} yang mempunyai himpunan titik $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan $n \in Z$ ganjil dan himpunan titiknya sebanyak $2n$. Karena graf konjugasi maka berlaku $g = xhx^{-1}$ untuk setiap $x \in D_{2n}$ dan unsur $g \in D_{2n}$ dan $h \in D_{2n}$ adalah unsur yang saling terhubung langsung di graf konjugasi D_{2n}. Dengan unsur yang saling terhubung langsung maka diperoleh matrik keterhubungan titik:

$$A(D_{2n}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan eliminasi Gaus-Jordan pada $A(D_{2n}) - \lambda I$ maka diperoleh polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left((n-1)\right.$$
$$\left.-\lambda\right)\left\{\left(-\frac{\lambda^2-(2n-2)\lambda+(n^2-2n)}{\lambda-(1-n)}\right)\dots\left(-\frac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1}\right)\right\}$$

Teorema 2

Spektrum *adjacency* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_A(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & n-1 \\ \frac{3(n-1)}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh nilai eigen matriks *adjacency* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 6$

Akan diperoleh multiplisitas untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$m(\lambda_1) = \frac{3(n-1)}{2}, m(\lambda_2) = 1, m(\lambda_3) = \frac{n-1}{2}, m(\lambda_4) = 1$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$spec_A(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & n-1 \\ \frac{3(n-1)}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

B. Spektrum Laplace Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{2n})

1. Spektrum Laplace Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_6)

Grup dihedral $(D_6) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dengan operasi komposisi diperoleh tabel cayley sebagai berikut:

Tabel 4.4 Tabel Cayley Grup Dihedral-6 (D_6)

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas dapat ditunjukkan kelas-kelas konjugasi (D_6). Dikatakan saling konjugasi jika ada $x \in D_6$ sehingga $g = xhx^{-1}$. Karena $g = xhx^{-1}$ maka akan diperoleh $h = x^{-1}\, g(x^{-1})^{-1}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi. Ambil $g = 1$ dan $h = 1$ dimana $1 \in D_6$, pilih $x = 1$ maka diperoleh

   $g = xhx^{-1}$

   $1 = 1\ 11^{-1}$

   $1 = 1\ 1$

   $1 = 1$

   $g = 1$ dan $h = 1$ saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $1 = 1\ 11^{-1}$.

   Sehingga kelas konjugasi $[1]$ adalah $\{1\}$.

2. Akan ditunjukkan bahwa r dan r^2 saling konjugasi.

   Ambil $g = r$ dan $h = r^2$ dimana $r, r^2 \in D_6$, pilih $x = s$ maka diperoleh

   $g = xhx^{-1}$

   $r = sr^2s^{-1}$

   $r = sr^2s$

   $r = r$

r dan r^2 saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $r = sr^2s^{-1}$.

Sehingga kelas konjugasi $[r] = \{r, r^2\}$.

3. Akan ditunjukkan bahwa s, sr, sr^2 saling konjugasi.

a) Akan ditunjukkan s, sr saling konjugasi

Ambil $g = s$ dan $h = sr$ dimana $s, sr \in D_6$, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$s = r^2sr(r^2)^{-1}$

$s = sr^2r$

$s = s$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $r = sr^2s^{-1}$.

b) Akan ditunjukkan sr, sr^2 saling konjugasi

Ambil $g = sr$ dan $h = sr^2$ dimana $sr, sr^2 \in D_6$, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$sr = r^2sr^2(r^2)^{-1}$

$sr = sr$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $sr = r^2sr^2(r^2)^{-1}$.

c) Akan ditunjukkan sr^2, s saling konjugasi

Ambil $g = sr^2$ dan $h = s$ dimana $sr^2, s \in D_6$, pilih $x = r^2$ maka diperoleh

$g = xhx^{-1}$

$sr^2 = r^2s(r^2)^{-1}$

$sr^2 = sr\,r$

$sr^2 = sr^2$

s dan sr saling konjugasi, karena ada $x \in D_6$ yang memenuhi $sr^2 = r^2s(r^2)^{-1}$.

Dari poin a), b), dan c) terbentuklah suatu kelas konjugasi $[s] = \{s, sr, sr^2\}$ dimana s, sr dan sr^2 saling konjugasi.

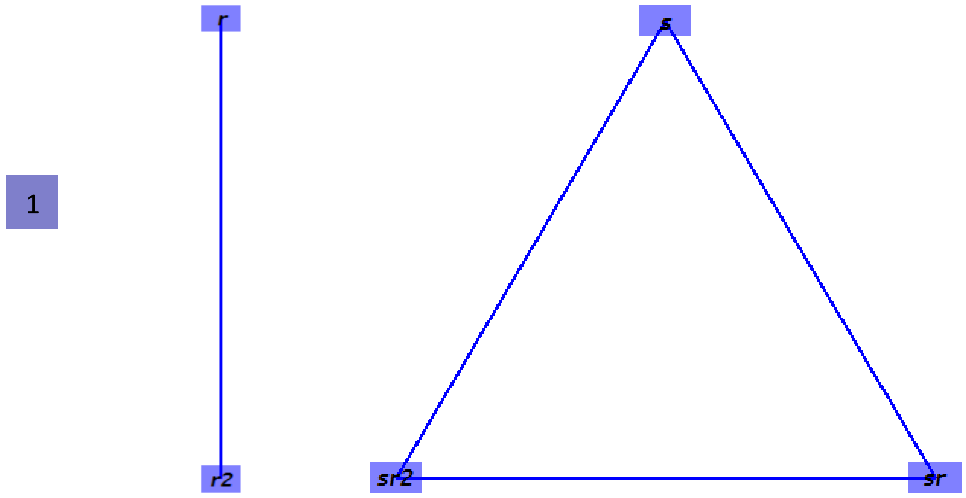
Dari poin 1, 2, dan 3 maka terbentuklah kelas-kelas konjugasi dari grup D_6 yaitu:

$[1] = \{1\}$

$[r] = \{r, r^2\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi D_6 sebagai berikut:



Gambar 4.4 Graf Konjugasi D_6

Dari graf tersebut dapat diketahui matriks *adjacency* dari graf konjugasi grup D_6 :

$$A(D_6) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ s \\ sr \\ sr^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & r^2 & s & sr & sr^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian dapat ditentukan matriks derajat dari graf konjugasi grup D_6 :

$$D(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *Laplace* sebagai berikut:

$L(D_6) = D(D_6) - A(D_6)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *Laplace* tersebut

$det(L(D_6) - \lambda I) = 0$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gaus* yang terdapat pada *software* Maple 18 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{-2+\lambda} & -\frac{-3+\lambda}{-2+\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(-3+\lambda)\lambda}{-1+\lambda} \end{bmatrix}$$

Karena $det(L(D_6) - \lambda I)$ merupakan hasil perkalian diagonal matriks segitiga maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$det(L(D_6) - \lambda I)$$
$$= -\lambda(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda}\right)(2-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{-2+\lambda}\right)\left(-\frac{(-3+\lambda)\lambda}{-1+\lambda}\right)$$

Karena $det(L(D_6) - \lambda I) = 0$ maka,

$$det(L(D_6) - \lambda I) = -\lambda(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda}\right)(2-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{-2+\lambda}\right)\left(-\frac{(-3+\lambda)\lambda}{-1+\lambda}\right) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigenya:

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen dari matriks tersebut .

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 3. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 1. Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 3$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_6) - \lambda I)$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi* Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$ sebanyak 2.

Matriks *Laplace* dengan persamaan $(L(D_6) - \lambda I)$ dapat diketahui nilai eigen dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen, dengan demikian terbentuklah spektrum *Laplace* dari graf konjugasi dari grup D_6 sebagai berikut:

$$spec_{L(D_6)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Spektrum Laplace Graf Konjugasi dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{10}})$

Kelas-kelas konjugasi dari grup (D_{10}) sebagai berikut:

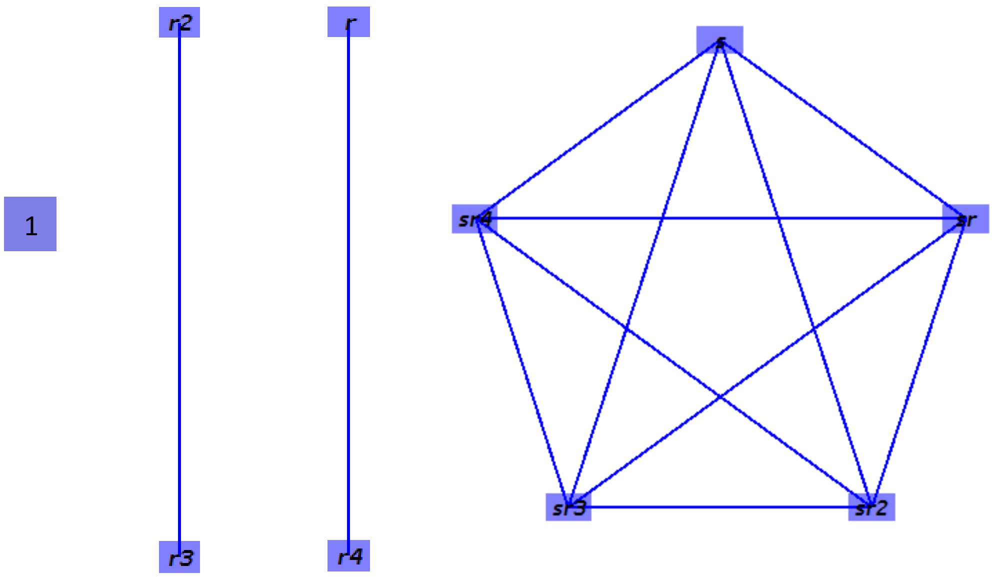
$[1] = \{1\}$

$[r] = \{r, r^4\}$

$[r^2] = \{r^2, r^3\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup (D_{10}) sebagai berikut:



Gambar 4.5 Graf Konjugasi D_{10}

Dari graf konjugasi dari grup (D_{10}) yang telah diperoleh dapat ditentukan matriks *Laplace* sebagai berikut:

$L(D_{10}) = D(D_{10}) - A(D_{10})$

$$L(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $L(D_{10})$ dengan cara:

$det(L(D_{10}) - \lambda I) = 0$

maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$-\lambda(1-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{-1+\lambda}\right)^2(4-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-3}\right)\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+5}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{(-5+\lambda)\lambda}{-1+\lambda}\right)$$

Karena $det(L(D_{10}) - \lambda I) = 0$ maka diperoleh nilai eigennya yaitu:

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5.$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 4. Untuk $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 2. Untuk $\lambda_3 = 5$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_{10}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 5$ sebanyak 4. Matriks *Laplace* dengan persamaan $(L(D_{10}) - \lambda I)$ yang telah diketahui nilai eigen dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen, dengan demikian terbentuklah spektrum *Laplace* dari graf konjugasi dari grup D_{10} sebagai berikut:

$$spec_{L(D_{10})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum Laplace Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{14})

Grup dihedral $(D_{14}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Dengan operasi komposisi, maka akan diketahui kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral (D_{14}) sebagai berikut:

$[1] = \{1\}$

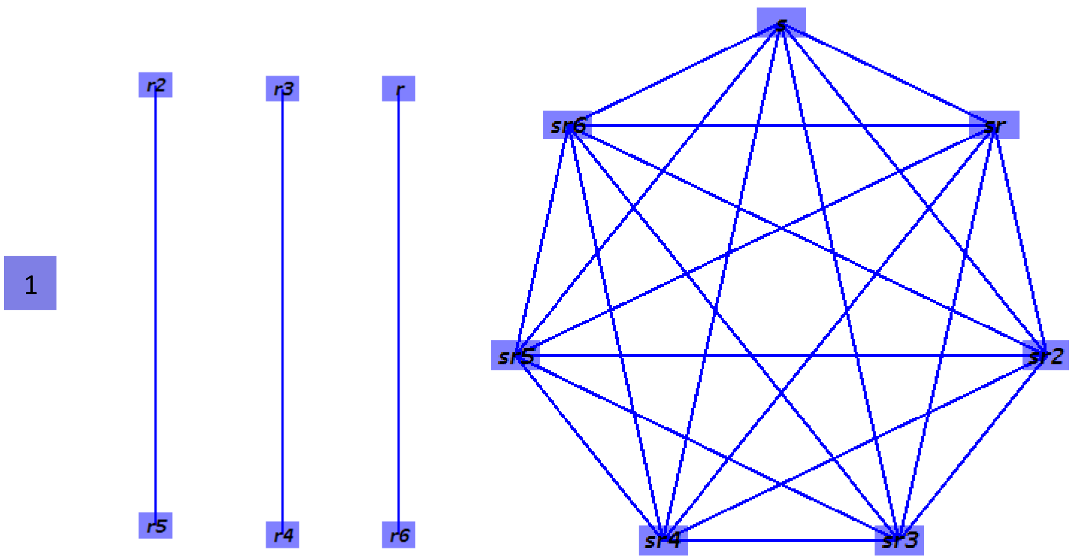
$[r] = \{ r, r^6\}$

$[r^2] = \{ r^2, r^5\}$

$[r^3] = \{ r^3, r^4\}$

$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Dengan demikian berdasarkan kelas-kelas konjugasi tersebut dapat digambarkan dalam suatu graf konjugasi dari grup (D_{14}) sebagai berikut:



Gambar 4.6 Graf Konjugasi D_{14}

Dari graf konjugasi dari grup (D_{14}) yang telah diperoleh maka dapat ditentukan matriks *Laplace* sebagai berikut:

$L(D_{14}) = D(D_{14}) - A(D_{14})$

$$L(D_{14})=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&6&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&6&-1&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&6&-1&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&6&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&6&-1&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&6&-1\\0&0&0&0&0&0&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1&6\end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $L(D_{14})$ dengan cara

$det(L(D_{14})-\lambda I)=0$

Maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$-\lambda(1-\lambda)^3\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{-1+\lambda}\right)^3(6-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-11\lambda+28}{\lambda-5}\right)$$
$$\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+21}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^2-9\lambda+14}{\lambda-3}\right)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+7}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{(\lambda-7)\lambda}{-1+\lambda}\right)$$

Karena $det(L(D_{14})-\lambda I)=0$ maka diperoleh nilai eigennya yaitu:

$\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=7$

Kemudian akan dicari basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=0$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_{14})-\lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 0$ sebanyak 5. Untuk $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_{14}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ sebanyak 3. Untuk $\lambda_3 = 7$ disubstitusikan ke dalam $(L(D_{14}) - \lambda I)$ maka diperoleh matriks tereduksi dengan menggunakan metode *Eliminasi Gauss* yang terdapat dalam *software* Maple 18.

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat dikatakan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 7$ sebanyak 6.

Matriks *Laplace* dengan persamaan $(L(D_{14}) - \lambda I)$ yang telah diketahui nilai eigen dan banyaknya basis untuk ruang vektor eigen, dengan demikian terbentuklah spektrum *Laplace* dari graf konjugasi dari grup D_{14} sebagai berikut:

$$spec_{L(D_{14})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Pola Spektrum *Laplace* Graf Konjugasi pada (D_{2n})

Dari spektrun yang telah ditemukan maka diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *Laplace* dari graf konjugasi dari beberapa grup dihedral di antaranya:

Tabel 4.5 Polinomial Karakteristik Matriks *Laplace* dari Beberapa Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	Graf Konjugasi	Polinomial Graf Konjugasi
1.	Graf konjugasi D_6	$-\lambda(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda}\right)(2-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-4\lambda+3}{-2+\lambda}\right)\left(-\frac{(-3+\lambda)\lambda}{-1+\lambda}\right)$
2.	Graf konjugasi D_{10}	$-\lambda(1-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{-1+\lambda}\right)^2(4-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{-4+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-3}\right)$

		$\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+5}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{(-5+\lambda)\lambda}{-1+\lambda}\right)$
3.	Graf konjugasi D_{14}	$-\lambda(1-\lambda)^3\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{-1+\lambda}\right)^3(6-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{-6+\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-11\lambda+28}{\lambda-5}\right)\left(-\frac{\lambda^2-10\lambda+21}{\lambda-4}\right)\left(-\frac{\lambda^2-9\lambda+14}{\lambda-3}\right)\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+7}{\lambda-2}\right)\left(-\frac{(\lambda-7)\lambda}{-1+\lambda}\right)$

Tabel 4.6 Spektrum *Laplace* dari Beberapa Graf Konjugasi dari Grup Dihedral (D_{2n})

No	Graf Konjugasi	Spektrum Graf Konjugasi
1.	Graf konjugasi D_6	$spec_{L(D_6)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
2.	Graf konjugasi D_{10}	$spec_{L(D_{10})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
3.	Graf konjugasi D_{14}	$spec_{L(D_{14})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Teorema 3

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* $L(D_{2n})$ pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$, adalah

$$-\lambda(1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}\left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}((n-1)-\lambda)\left\{\left(-\frac{\lambda^2-(2n-2)\lambda+(n^2-2n)}{\lambda-(1-n)}\right)\dots\left(-\frac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1}\right)\right\}$$

Bukti

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil diperoleh bahwa $(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n+1}{2}}\}$,$\forall$ $1, r^{\frac{n+1}{2}}$ jika dioperasikan dengan opersi komposisi ($^\circ$) di D_{2n} maka akan menghasilkan unsur-unsur yang saling konjugasi. Dengan demikian terbentuklah graf konjugasi D_{2n} yang mempunyai himpunan titik $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dengan $n \in Z$ ganjil dan himpunan titiknya sebanyak $2n$. Karena graf konjugasi maka berlaku $g = xhx^{-1}$ untuk setiap $x \in D_{2n}$ dan unsur $g \in D_{2n}$ dan $h \in D_{2n}$ adalah unsur yang saling terhubung langsung di graf konjugasi D_{2n}. Dengan unsur yang saling terhubung langsung maka diperoleh matrik keterhubungan titik:

$$A(D_{2n}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan matriks derajat:

$$D(D_{2n}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral (D_{2n}) adalah:

$$L(D_{2n}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n-1 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & n-1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & n-1 \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan matriks *Laplace* akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara $det(L(D_{2n}) - \lambda I) = 0$ sehingga diperoleh matriks dari $(L(D_{2n}) - \lambda I)$ sebagai berikut:

$$(L(D_{2n}) - \lambda I) =$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & (1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ((n-1)-\lambda) & -1 & -1 & \dots & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{\lambda^2-(2n-2)\lambda+(n^2-2n)}{\lambda-(1-n)}\right) & 1 & \ddots & \left(-\frac{(\lambda-n)}{\lambda-(1-n)}\right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1}\right)
\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $L(D_{2n}) - \lambda I$ adalah $det(L(D_{2n}) - \lambda I)$ merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas, sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}} \left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \Big((n-1)$$
$$- \lambda\Big) \left(-\frac{\lambda^2 - (2n-2)\lambda + (n^2-2n)}{\lambda - (1-n)}\right) \dots \left(-\frac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1}\right)$$

Teorema 4

Spektrum *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_L(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & n \\ \frac{n+3}{2} & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh nilai eigen matriks *adjacency* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = n$

Akan diperoleh multiplisitas sikel untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$m(\lambda_1) = \frac{n+3}{2}, m(\lambda_2) = \frac{n-1}{2}, m(\lambda_3) = n - 1$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$spec_L(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & n \\ \dfrac{n+3}{2} & \dfrac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

C. Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada (D_{2n})

1. Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada (D_6)

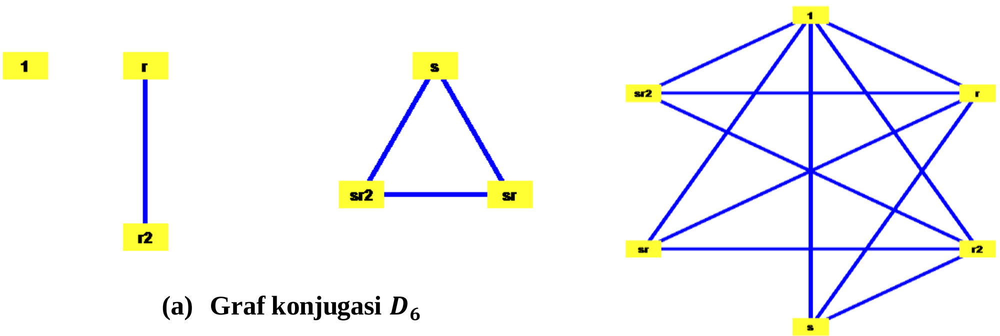
Grup dihedral D_6 memiliki anggota yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_6 adalah

$[1] = \{1\}$.

$[r] = \{r, r^2\}$.

$[s] = \{s, sr, sr^2\}$.

Setelah mendapatkan kelas konjugasinya, maka dapat digambar kedalam bentuk graf, yaitu dengan memisalkan setiap elemen pada D_6 sebagai titik dan kelas konjugasinya sebagai titik-titik yang terhubung. Kemudian dari graf konjugasi tersebut dapat ditentukan graf komplemennya. Dengan menggunakan bantuan aplikasi MAPLE, maka didapatkan



(a) Graf konjugasi D_6

(b) Graf komplemen graf konjugasi D_6

Gambar 4.7 Graf Konjugasi D_6 dan Komplemennya

Graf komplemen dari graf konjugasi D_6 dapat dibaca menggunakan matriks ketetanggaan (*Adjacency Matrix* $(A(D_6))$) dan matriks derajat (*Degree Matrix* $(D(D_6))$). Penjumlahan dari kedua matriks tersebut dapat disebut sebagai matriks *Laplace* $(L(D_6))$, sehingga matriks *Laplace* dari D_6 adalah

$$\begin{bmatrix} 5&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&0&0\\ 0&0&4&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&0&3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&4&0&-1&-1&-1\\ -1&0&4&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&3&0&0\\ -1&-1&-1&0&3&0\\ -1&-1&-1&0&0&3 \end{bmatrix}$$

Dalam menentukan nilai eigen, maka dapat mencari persamaan polinomial dengan variabel λ di mana skalar-skalar yang memenuhi persamaan polinomial tersebut adalah nilai eigennya. Nilai eigen dari matriks D_6 dapat diketahui dengan menggunakan

$$\det(L(D_6) - \lambda I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&4&0&-1&-1&-1\\ -1&0&4&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&3&0&0\\ -1&-1&-1&0&3&0\\ -1&-1&-1&0&0&3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&4-\lambda&0&-1&-1&-1\\ -1&0&4-\lambda&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&3-\lambda&0&0\\ -1&-1&-1&0&3-\lambda&0\\ -1&-1&-1&0&0&3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^6 - 22\lambda^5 + 189\lambda^4 - 792\lambda^3 + 1620\lambda^2 - 1296\lambda = 0$$

Dengan menggunakan persamaan polinomial diatas, maka dapat ditentukan nilai eigen dari D_6 adalah 0, 3, 4, dan 6. Menentukan basis ruang vektor eigen pada setiap nilai eigen dapat menggunakan

$$(L(D_6) - \lambda I) = 0$$

Untuk nilai eigen 0, maka basis ruang vektor eigen dari D_6 adalah

$$(L(D_6) - 0\, I)$$

$$\left(\begin{bmatrix} 5&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&4&0&-1&-1&-1\\ -1&0&4&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&3&0&0\\ -1&-1&-1&0&3&0\\ -1&-1&-1&0&0&3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}\right) x = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga matriks ruang vektor eigen yang memenuhi pada saat $\lambda = 0$ adalah

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Sehingga dari matriks ruang vektor eigen pada saat $\lambda = 0$ dapat dicari menggunakan reduksi matriks eselon baris sehingga matriksnya berbentuk

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks tersebut terlihat bahwa pada saat $\lambda = 0$ memiliki basis sebanyak 1.

Dengan menggunakan langkah yang sama, dapat ditentukan banyaknya basis pada saat λ bernilai 3, 4, dan 6 secara berurutan adalah 2, 1, dan 2. Sehingga didapatkan Spektrum *Laplace* pada graf komplemen D_6 adalah

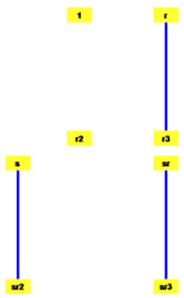
$$specL(D_6) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada D_8

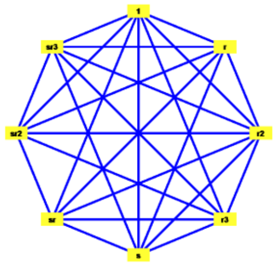
Dengan langkah yang sama seperti sebelumnya maka kelas konjugasi dari D_8 adalah

$$[1] = \{1\}$$
$$[r] = \{r, r^3\}$$
$$[r^2] = \{r^2\}$$
$$[s] = \{s, sr^2\}$$
$$[sr] = \{sr, sr^3\}$$

Didapatkan graf konjugasi dan komplemennya dari D_8 sebagai berikut



(a) **Graf Konjugasi D_8**



(b) **Graf Komplemen Graf Konjugasi D_8**

Gambar 4.8 Graf Konjugasi D_6 dan Komplemennya

Diperoleh matriks *Laplace* dari D_8 $(L(D_8))$ adalah

$$L(D_8) = D(D_8) - \mathrm{A}(D_8)$$

$$\begin{bmatrix} 7&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&6&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&7&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&6&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&6&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&6&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&6&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&1&1&1&1 \\ 1&0&1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&6&-1&0&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&7&-1&-1&-1&-1&-1 \\ -1&0&-1&6&-1&-1&-1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&6&-1&0&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&6&-1&0 \\ -1&-1&-1&-1&0&-1&6&-1 \\ -1&-1&-1&-1&-1&0&-1&6 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menggunakan $(L(D_8) - \lambda I) = 0$, maka didapatkan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 7-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

sehingga dapat didapatkan persamaan polinomial dari determinan matriks tersebut adalah

$$\lambda^8 - 50\lambda^7 + 1068\lambda^6 - 12632\lambda^5 + 89344\lambda^4 - 377856\lambda^3 + 884736\lambda^2 - 884736\lambda = 0$$

Maka didapatkan spektrum *Laplace* graf komplemen graf konjugasi D_8 sebagai berikut

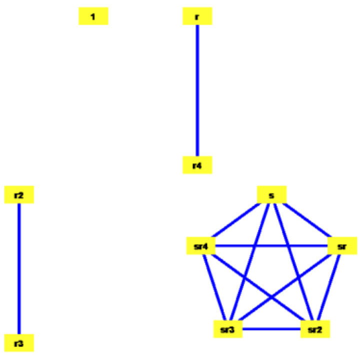
$$specL(D_8) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada $\boldsymbol{D_{10}}$

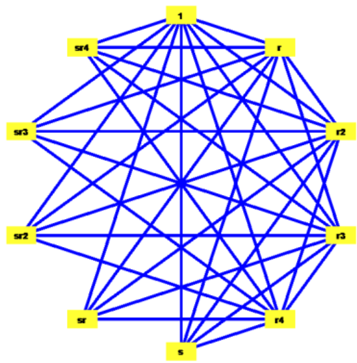
Kelas konjugasi dari D_{10} adalah

$$[1] = \{1\}$$
$$[r] = \{r, r^4\}$$
$$[r^2] = \{r^2, r^3\}$$
$$[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$$

Maka didapatkan graf konjugasi dan graf komplemen D_{10} sebagai berikut



(a) Graf konjugasi D_{10}



(b) Graf komplemen graf konjugasi D_{10}

Gambar 4.9 Graf Konjugasi D_{10} dan Komplemennya

Maka dapat ditentukan matriks *Laplace* dari D_{10} $\left(L(D_{10})\right)$ adalah

$$L(D_{10}) = D(D_{10}) - \mathrm{A}(D_{10})$$

$$\begin{bmatrix} 9&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&5&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&8&-1&-1&0&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&8&0&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&0&8&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&0&-1&-1&8&-1&-1&-1&-1&-1\\ -1&-1&-1&-1&-1&5&0&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&5&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&5&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&5&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&0&0&0&0&5 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menggunakan $(L(D_8) - \lambda I) = 0$, maka didapatkan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 8-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 8-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

sehingga didapatkan persamaan polinomial dari determinan matriks tersebut adalah

$$\lambda^8 - 50\lambda^7 + 1068\lambda^6 - 12632\lambda^5 + 89344\lambda^4 - 377856\lambda^3 + 884736\lambda^2 - 884736\lambda = 0$$

Maka didapatkan Spektrum *Laplace* graf komplemen dari graf konjugasi D_{10} sebagai berikut

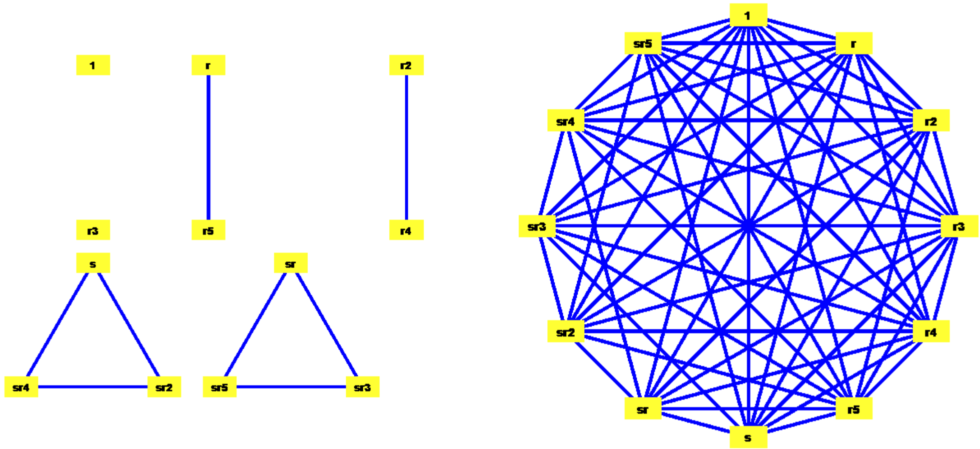
$$specL(D_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada D_{12}

Kelas konjugasi dari D_{12} adalah

$$[1] = \{1\}$$
$$[r] = \{r, r^5\}$$
$$[r^2] = \{r^2, r^4\}$$
$$[r^3] = \{r^3\}$$
$$[s] = \{s, sr^2, sr^4\}$$
$$[sr] = \{sr, sr^3, sr^5\}$$

Maka didapatkan graf konjugasi dan graf komplemen D_{12} sebagai berikut



(a) Graf konjugasi D_{12}

(b) Graf komplemen graf konjugasi D_{12}

Gambar 4.10 Graf Konjugasi D_{12} dan Komplemennya

Maka dapat ditentukan matriks *Laplace* dari D_{12} $\left(L(D_{12})\right)$ adalah

$$L(D_{12}) = D(D_{12}) - \mathrm{A}(D_{12})$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menggunakan $(L(D_{12}) - \lambda I) = 0$, maka didapatkan matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 11-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 10-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 11-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 10-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 10-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda \end{bmatrix}$$

sehingga dapat didapatkan persamaan polinomial dari determinan matriks tersebut adalah

$$\lambda^{12} - 116\lambda^{11} + 6106\lambda^{10} - 192516\lambda^{9} + 4039641\lambda^{8} - 59234112\lambda^{7} + 619336692\lambda^{6} - 4617501552\lambda^{5} + 24056860032\lambda^{4} - 83413089792\lambda^{3} + 173235594240\lambda^{2} - 163258675200\lambda$$

$$\begin{aligned} \lambda^{12} - 116\lambda^{11} + 6106\lambda^{10} - 192516\lambda^{9} + 4039641\lambda^{8} - 59234112\lambda^{7} \\ + 619336692\lambda^{6} - 4617501552\lambda^{5} + 24056860032\lambda^{4} \\ - 83413089792\lambda^{3} + 173235594240\lambda^{2} - 163258675200\lambda = 0 \end{aligned}$$

Maka didapatkan Spektrum *Laplace* graf komplemen graf konjugasi D_{12} sebagai berikut

$$specL(D_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 10 & 12 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$specL(D_{14}) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 12 & 14 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$specL(D_{16}) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada D_{2n}

Berdasarkan paparan di atas diperoleh hasil-hasil sebagai berikut

Lemma 1

Matriks adjacency dari graf komplemen graf konjugasi grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil memiliki pola sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & r & \dots & r^{m-1} & r^m & r^{m+1} & r^{m+2} & \dots & r^{n-1} & s & sr^2 & \dots & sr^{2n-2} & sr^{2n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ \vdots \\ r^{m-1} \\ r^m \\ r^{m+1} \\ r^{m+2} \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ \vdots \\ sr^{2n-2} \\ sr^{2n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & -1 & & -1 & -1 & -1 & -1 & & -1 & -1 & -1 & & -1 & -1 \\
-1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & & 0 & -1 & -1 & 0 & & -1 & -1 & -1 & & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & & 0 & -1 & -1 & 0 & & -1 & -1 & -1 & & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & 0 & & -1 & -1 & -1 & -1 & & 0 & -1 & -1 & & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & -1 & & -1 & -1 & -1 & -1 & & -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & & -1 & -1 & -1 & -1 & & -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dan untuk n genap memiliki pola sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & r & \dots & r^{m-1} & r^m & r^{m+1} & \dots & r^n & s & sr & sr^2 & sr^3 & \dots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ \mathrm{r} \\ : \\ r^{m-1} \\ r^m \\ r^{m+1} \\ : \\ r^n \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ sr^3 \\ : \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{vmatrix}
2n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 2n-2 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
: & : & \dots & : & : & : & \dots & : & : & : & : & : & \dots & : & : \\
1 & 1 & \dots & 2n-2 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 2n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 2n-2 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
: & : & \dots & : & : & : & \dots & : & : & : & : & : & \dots & : & : \\
1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2n-3 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2n-3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 2n-3 & 1 & \dots & 1 & 0 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 2n-3 & \dots & 0 & 1 \\
: & : & \dots & : & : & : & \dots & : & : & : & : & : & : & : & : \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 2n-2 & 0 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2n-3
\end{vmatrix}
\end{array}$$

Lemma 2

Matriks derajat dari graf komplemen graf konjugasi grup dihedral D_{2n} dari D_{2n} dengan n ganjil memiliki pola sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 2n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 2n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$$

dan untuk n genap memiliki pola sebagai berikut:

2n-1	0	...	0	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0	0
0	2n-2	...	0	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0	0
:	:	...	:	:	:	...	:	:	:	:	:	...	:	:
0	0	...	2n-2	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0	0
0	0	...	0	2n-1	0	...	0	0	0	0	0	...	0	0
0	0	...	0	0	2n-2	...	0	0	0	0	0	...	0	0
:	:	...	:	:	:	...	:	:	:	:	:	...	:	:
0	0	...	0	0	0	...	2n-2	0	0	0	0	...	0	0
0	0	...	0	0	0	...	0	2n-3	0	0	0	...	0	0
0	0	...	0	0	0	...	0	0	2n-3	0	0	...	0	0
0	0	...	0	0	0	...	0	0	0	2n-3	0	...	0	0
0	0	...	0	0	0	...	0	0	0	0	2n-3	...	0	0
:	:	...	:	:	:	...	:	:	:	:	:	:	:	:
0	0	...	0	0	0	...	0	0	0	0	0	...	2n-2	0
0	0	...	0	0	0	...	0	0	0	0	0	...	0	2n-3

Matriks *Laplace* graf komplemen dari graf konjugasi pada grup dihedral (D_{2n}) memiliki pola tersendiri pada saat n ganjil dan n genap sehingga didapatkan lemma sebagai berikut

Lemma 3

Pola matriks *Laplace* graf komplemen dari graf konjugasi pada grup dihedral (D_{2n}) untuk n ganjil sebagai berikut

$$L\left(D_{2(2n-1)}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
2n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & 2n-2 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & 2n-2 & -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-2 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 2n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 2n-2 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 2n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n
\end{bmatrix}$$

dan untuk n genap sebagai berikut

$$L\left(D_{2(2n)}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
2n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & 2n-2 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & 2n-2 & -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & 2n-2 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 2n-2 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 2n-3 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 2n-3 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & 2n-3 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & -1 & 2n-3 & \cdots & -1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 2n-3 & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 2n-3
\end{bmatrix}$$

Berikut ini adalah nilai Spektrum pada setiap graf komplemen graf konjugasi dari D_{2n}

Grup Dihedral	Spektrum Laplace
$n = 3, (D_6)$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$n = 4, (D_8)$	$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
$n = 5, (D_{10})$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
$n = 6, (D_{12})$	$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 10 & 12 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$
$n = 7, (D_{14})$	$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 12 & 14 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$
$n = 8, (D_{16})$	$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

Berdasarkan tabel tersebut diperoleh bahwa

Teorema 5

Spektrum Laplace graf komplemen dari graf konjugasi pada D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & n & 2n-2 & 2n \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$$

Teorema 6

Spektrum Laplace Graf Komplemen dari Graf Konjugasi pada D_{2n} untuk n genap adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{3n}{2} & 2n-2 & 2n \\ 1 & n-2 & \frac{n-2}{2} & \frac{n+4}{2} \end{bmatrix}$$

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Spektrum *adjacency* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah
$$spec_A\big(G(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & n-1 \\ \frac{3(n-1)}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
2. Spektrum Laplace graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah
$$spec_L(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & n \\ \frac{n+3}{2} & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$
3. Spektrum Laplace graf komplemen dari graf konjugasi pada D_{2n} untuk n ganjil adalah
$$spec_L\big(\overline{G(D_{2n})}\big) = \begin{bmatrix} 0 & n & \frac{2n-2}{\frac{n-1}{2}} & \frac{2n}{\frac{n-1}{2}} \\ 1 & n-1 & & \end{bmatrix}$$
4. Spektrum Laplace graf komplemen dari graf konjugasi pada D_{2n} untuk n genap adalah
$$spec_L\big(\overline{G(D_{2n})}\big) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3n}{2} & \frac{2n-2}{\frac{n-2}{2}} & \frac{2n}{\frac{n+4}{2}} \\ 1 & n-2 & & \end{bmatrix}$$

B. Saran

Diharapkan untuk penelitian selanjutnya mengkaji spektrum dari graf yang diperoleh dari gruf lainnya, misalnya grup simetri. Penelitian serupa dapat dilakukan untuk menentukan spektrum detour dari graf konjugasi grup dihedral.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Fahruddin, I. & Rahmawati, N.D. 2009. *Menentukan Spectrum Suatu Graf Berbantuan Matlab*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Sari, FNK., & Shandya, D.. 2012. Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition.* New York: JohnWilley&Sons, Inc.

Agnarsson, G. dan Greenlaw, R.. 2007. *Graph Theory: Modeling, Application, and Algorithms*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S.. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. Nomor 4 Volume 5 Halaman: 250-252.

Biggs, N. 1974. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. dan Oellermann, O.R.. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapore. McGraw-Hill, Inc.

Chelvam, T.T., Selvakumar, K., Raja, S. 2011. Commuting Graphs on Dehidral Groups. *The Journal of Mathematics and Computer* Science. Vol 2, No 2, Hal: 402-406.

Diestel, R. 2005. *Graph Theory, Electronic Edition 2005*. New York: Springer-Verlag Heidelberg.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company.

Miller, M. 2000. *Open Problems in Graf Theory: Labelings and Extremal Grafs*. Prosiding Konferensi Nasional X Matematika di Bandung, tanggal 17-20 Juli.

Nawawi, A. dan Rowley, P. 2012. *On Commuting Graphs for Elements of Order 3 in Symetry Groups.* Manchester: *The MIMS Secretary.*

Trinajstic, N. 1992. Chemical Graph Theory, 2nd Edition. Florida: CRC Press.

Vahidi, J. & Talebi, A.A.. 2010. The Commuting Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. Vol 1, No 2, Hal:123-127

Yin, S. 2008. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph G_l. *WSEAS Transaction on Systems*. Vol 7, No 4, Hal: 362-372.