MENJAWAB TEKA-TEKI LANGKAH KUDA PADA BEBERAPA UKURAN PAPAN CATUR DENGAN TEORI GRAPH

Oleh
Abdussakir

Abstrak

Teka-teki langkah kuda yang dimaksud dalam tulisan ini adalah menentukan langkah kuda agar dapat melewati semua kotak papan catur tepat satu kali dan kembali ke posisi semula. Pembahasan secara khusus dilakukan pada papan catur berukuran 3x3, 4x4, 5x5, dan 6x6. Pembahasan secara umum dilakukan pada papan catur berukuran nxn, dengan n bilangan asli ganjil dan $n > 1$. Pembahasan teka-teki langkah kuda dilakukan dengan teori graph.

PENDAHULUAN

Graph G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan p, dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan q.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graph G, maka u dan v disebut *terhubung langsung*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung*, dan u, v disebut *ujung* dari e. *Derajat dari titik v* di graph G, ditulis $\deg_G v$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$.

Graph H disebut *subgraph* dari graph G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset himpunan sisi di G. Jika $G = (V, E)$ graph dan $S \subset V$, maka $G - S$ adalah subgraph G yang mempunyai himpunan titik $V - S$ dan semua sisinya tidak terkait langsung dengan titik di S.

Jalan u-v dalam graph G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u=v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G. v_0 disebut *titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Jika semua sisi di W berbeda, maka W

Abdussakir, M.Pd adalah Staf Pengajar di Jurusan Matematika FST UIN Malang

disebut *trail*. Jika semua titik di *W* berbeda, maka *W* disebut *lintasan*. Dengan demikian, semua lintasan adalah trail.

Trail tertutup dan taktrivial pada graph *G* disebut *sirkuit* di G. Sirkuit yang semua titik internalnya berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang *k* disebut sikel-*k*. Sikel-*k* disebut genap atau ganjil bergantung pada *k* genap atau ganjil.

Graph *G* disebut *terhubung* jika untuk masing-masing titik *u* dan *v* yang berbeda di *G* terdapat lintasan *u*-*v* di *G*. *Komponen* dari graph *G* adalah subgraph terhubung di G yang tidak termuat dalam subgraph terhubung lainnya di *G*. Dengan kata lain, komponen dari graph *G* adalah subgraph maksimal yang terhubung di *G*. Banyaknya komponen di *G* ditulis dengan $k(G)$. Jadi, graph *G* adalah terhubung jika dan hanya jika $k(G) = 1$.

Graph *G* disebut *graph bipatisi* jika himpunan titik di *G* dapat dipartisi menjadi dua himpuman *X* dan *Y* sehingga masing-masing sisi mempunyai titik ujung di *X* dan salah satu titik ujungnya di *Y*. Suatu graph bipartisi dapat memuat sikel atau tidak memuat sikel. Jika graph bipartisi memuat sikel, maka sikelnya selalu mempunyai panjang genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema 1 berikut.

Teorema 1
Graph G adalah bipartisi jika dan hanya jika G tidak memuat sikel ganjil.

Lintasan yang memuat semua titik di *G* disebut *lintasan Hamilton* di *G*, sedangkan sikel yang memuat semua titik di *G* disebut *sikel Hamilton*. Suatu graph disebut *graph Hamilton* jika memuat sikel Hamilton. Graph tidak terhubung sudah pasti bukan graph Hamilton. Teorema 2 berikut memberikan suatu ciri graph Hamilton.

Teorema 2
Jika G graph Hamilton, maka untuk setiap $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, *berlaku*

$$k(G - S) \leq |S|.$$

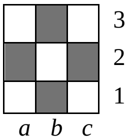
Berdasarkan teorema 2, dapat diambil petunjuk bahwa jika $G = (V, E)$ graph dan ada *S* subset sejati yang takkosong dari *V* sehingga banyaknya komponen subgraph $G - S$ dari *G* lebih dari banyak unsur di *S*, maka *G* bukan Hamilton.

PEMBAHASAN

Teka-teki langkah kuda sebenarnya dapat diselesaikan dengan teori graph. Jika kotak papan catur dianggap sebagai titik, dan langkah kuda yang mungkin pada masing-masing kotak dianggap sebagai sisi, maka akan diperoleh suatu graph. Dengan demikian, teka-teki papan catur tidak lain adalah menentukan apakah graph yang terbentuk adalah graph Hamilton atau bukan.

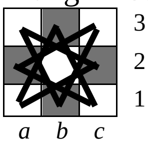
Papan Catur 3x3

Pembahasan teka-teki langkah kuda akan dimulai dari papan catur ukuran 3x3. Pembahasan pada papan catur 3x3 akan dilakukan secara cukup detil agar mudah dipahami dan sebagai dasar memahami pembahasan pada papan catur lainnya. Papan catur ukuran 3x3 dapat digambarkan seperti Gambar 1 berikut.



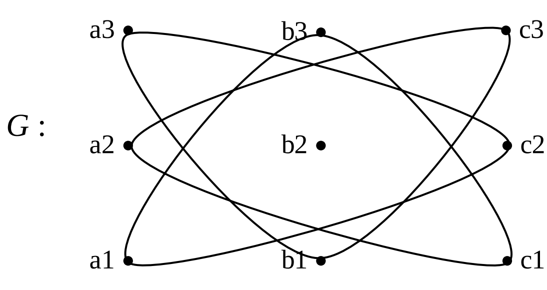
Gambar 1 Papan Catur Ukuran 3x3

Karena kuda harus melalui semua kotak, maka perlu ditentukan terlebih dahulu langkah-langkah yang dapat dilakukan kuda dari masing-masing kotak. Sebagai contoh, karena kuda harus melalui kotak a1, maka langkah yang dapat diambil adalah ke c2 atau b3. Jika digambar, semua langkah kuda yang mungkin seperti pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2 Kemungkinan Langkah Kuda pada Papan Catur Ukuran 3x3

Dalam bentuk graph, jika titik menyatakan kotak papan catur dan sisi menyatakan langkah kuda, diperoleh graph seperti Gambar 3 berikut

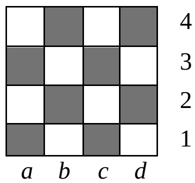


Gambar 3 Graph Langkah Kuda pada Papan Catur Ukuran 3x3

Graph *G* pada Gambar 3 adalah graph tidak terhubung, karena tidak ada lintasan dari titik *b*2 ke titik yang lain. Dengan demikian, tidak mungkin dibuat sikel yang melalui semua titik. Jadi, graph tersebut bukan graph Hamilton. Dapat disimpulkan, pada papan catur 3x3 tidak dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula.

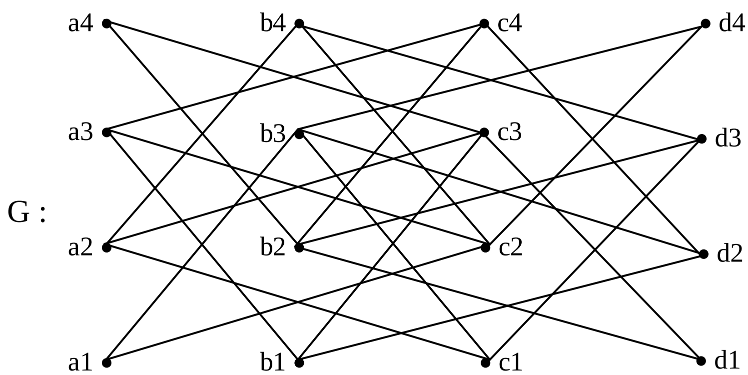
Papan Catur 4x4

Papan catur ukuran 4x4 dapat digambar seperti Gambar 4 berikut.



Gambar 4 Papan Catur Ukuran 4x4

Langkah kuda yang mungkin dari masing-masing kotak papan catur 4x4 dalam bentuk graph terlihat pada Gambar 5 berikut.

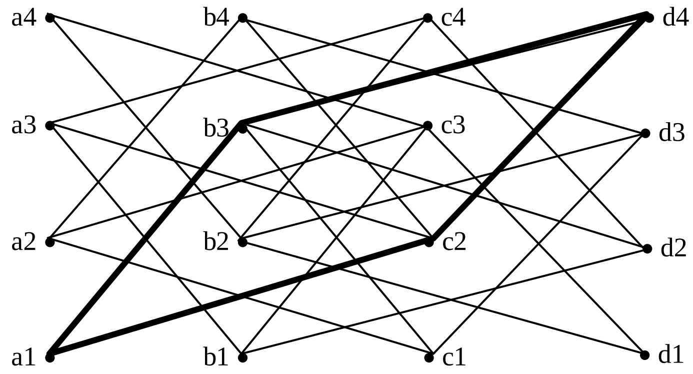


Gambar 5 Graph Langkah Kuda pada Papan Catur Ukuran 4x4

Graph *G* pada Gambar 5 adalah graph terhubung dengan order 16 dan size 19. 4 titik berderajat 2, 8 titik berderajat 3, dan 4 titik berderajat 4. Pertanyaannya adalah apakah graph tersebut Hamilton. Melalui *trial and error*, akan diperoleh bahwa tidak pernah ada sikel yang melalui semua titik pada graph tersebut. Pada kenyataannya, graph tersebut bukan Hamilton. Berikut dua jenis pembuktian bahwa graph tersebut bukan Hamilton.

Bukti 1

Karena sikel yang dicari harus melalui a1, maka sikel tersebut akan melalui *b*3 dan *c*2. Demikian juga, karena sikel yang dicari harus melalui *d*4, maka sikel tersebut akan melalui *b*3 dan *c*2. Hal ini akan membentuk suatu sikel *a*1, *b*3, *d*4, *c*2, *a*1. Sikel ini tidak melalui semua titik, dan dengan demikian bukan sikel Hamilton. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Gambar 6 berikut.

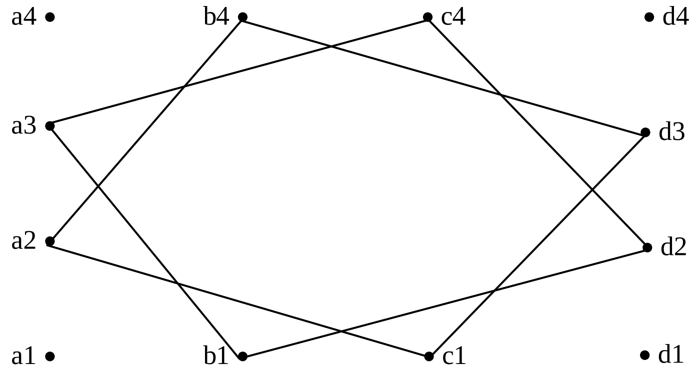


Gambar 6 Sikel *a*1, *b*3, *d*4, *c*2, *a*1.

Bukti 2

Perhatikan kembali graph *G* pada Gambar 5. Pilih $S = \{b2, b3, c2, c3\}$. Jadi $|S| = 4$. Graph G - S terlihat pada Gambar 7 berikut.

$G - S$:



Gambar 7 Graph G - S.

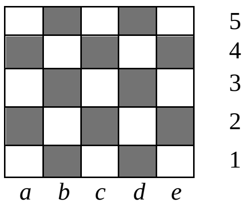
Jadi, $k(G - S) = 6$. Dengan demikian diperoleh hubungan

$$k(G - S) > |S| .$$

Sesuai teorema 2, maka graph *G* pada Gambar 5 bukan graph Hamilton. Jadi disimpulkan bahwa pada papan catur 4x4 tidak dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula.

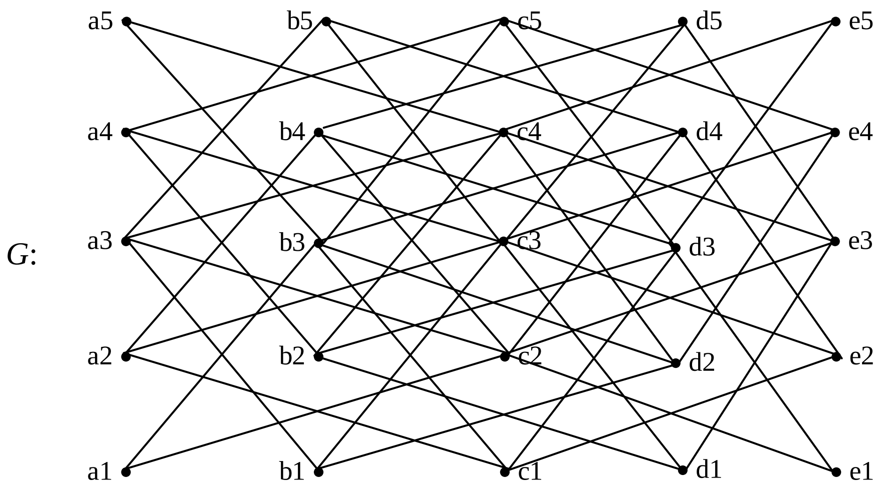
Papan Catur 5x5

Papan catur ukuran 5x5 dapat digambarkan seperti Gambar 8 berikut.



Gambar 8 Papan Catur Ukuran 5x5

Langkah kuda yang mungkin dari masing-masing kotak papan catur 5x5 dalam bentuk graph terlihat pada Gambar 9. Dengan demikian, teka-teki langkah kuda pada papan catur 5x5 sama halnya dengan menentukan apakah graph *G* pada Gambar 9 adalah Hamilton atau bukan.

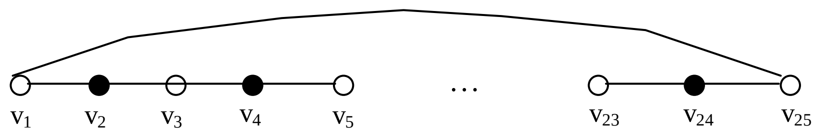


Gambar 9 Graph Langkah Kuda pada Papan Catur 5x5

Seperti pada papan catur lainnya, satu langkah kuda selalu dari kotak ke kotak dengan warna berbeda. Jika kuda berada di kotak putih, maka langkah yang mungkin adalah ke kotak hitam dan jika kuda berada di kotak hitam, maka langkah yang mungkin adalah ke kotak putih. Tidak mungkin kuda melangkah dari kotak putih ke kotak putih atau dari kotak hitam ke kotak hitam. Fakta ini dapat digunakan untuk membuktikan bahwa graph *G* pada Gambar 9 bukan graph Hamilton.

Bukti 1

Andaikan graph *G* pada Gambar 9 adalah Hamilton. Maka *G* memuat sikel Hamilton yang panjangnya 25. Tanpa mengurangi keumuman, misal titik pertama mewakili kotak putih. Maka titik ke-2 adalah hitam, titik ke-3 adalah putih, dan seterusnya. Jadi, diperoleh bahwa titik dengan indeks ganjil adalah putih dan titik dengan indeks genap adalah hitam. Sikel tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Berdasarkan gambar, terlihat bahwa titik putih (v_{25}) terhubung langsung dengan titik putih (v_1). Berarti bahwa dari kotak putih, kuda melangkah ke kotak putih lagi. Hal ini tidak mungkin terjadi, karena kuda selalu melangkah dari kotak ke kotak dengan warna berbeda. Disimpulkan bahwa graph *G* bukan graph Hamilton.

Bukti 2

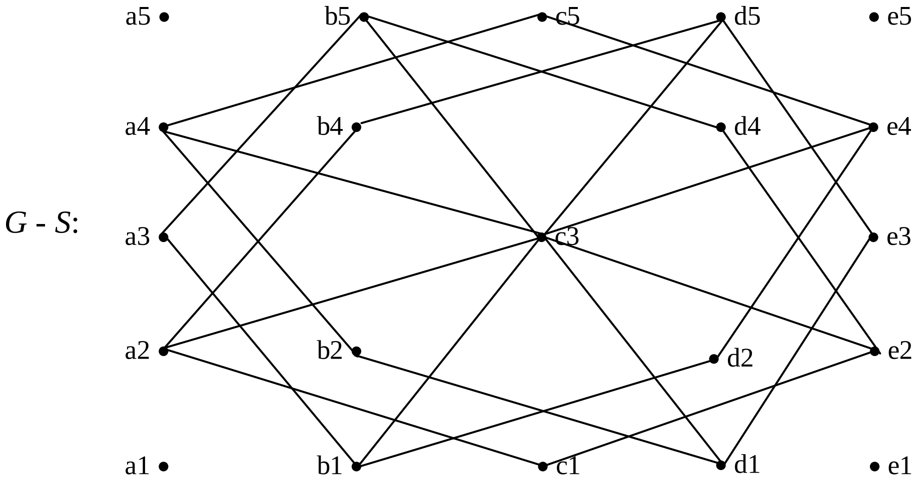
Andaikan graph *G* pada Gambar 9 adalah Hamilton. Maka *G* memuat sikel Hamilton. Karena titik mewakili kotak dan kuda melangkah dari kotak ke kotak dengan warna berbeda, maka himpunan titik pada sikel tersebut dapat dipartisi ke dalam dua partisi, yaitu titik putih dan titik hitam. Jadi sikel tersebut merupakan graph bipartisi. Karena sikel melalui semua titik maka panjang sikel tersebut adalah ganjil, yaitu 25. Hal ini kontradiksi dengan teorema 1, bahwa graph bipartisi tidak memuat sikel ganjil. Jadi, graph G bukan graph Hamilton.

Bukti 3

Perhatikan kembali graph *G* pada Gambar 9. Pilih $S = \{b3, c2, c4, d3\}$. Jadi, $|S| = 4$. Diperoleh graph $G - S$ seperti pada Gambar 10. Terlihat bahwa $k(G - S) = 5$. Dengan demikian diperoleh hubungan

$$k(G - S) > |S|.$$

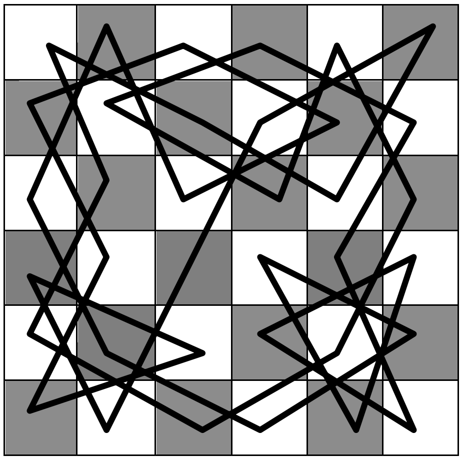
Sesuai teorema 2, maka graph *G* pada Gambar 9 bukan graph Hamilton. Jadi disimpulkan bahwa pada papan catur 5x5 tidak dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula.



Gambar 10 Graph *G* - *S*

Papan Catur 6x6

Pada papan catur 6x6, dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke posisi semula. Penulis tidak membahas alasan mengapa dapat dibuat dan bagaimana cara mengkonstruksi alur langkah kuda dalam artikel ini. Salah satu alur langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula seperti pada Gambar 11 berikut.



Gambar 11 Langkah Kuda melalui Semua Kotak Tepat Satu Kali dan Kembali ke Kotak Awal

Papan Catur *n*x*n* (*n* Ganjil)

Pada papan catur ukuran *n*x*n*, dengan *n* bilangan asli ganjil dan n > 1, tidak dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula. Pembahasan untuk papan catur 3x3 dan 5x5 telah dilakukan, dan secara umum dapat dijelaskan sebagai berikut.

Andaikan pada papan catur *n*x*n*, dengan *n* bilangan asli ganjil dan n > 1, dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula. Misalkan kotak pertama adalah putih, maka kotak kedua adalah hitam, ketiga putih, keempat hitam, dan seterusnya. Jadi diperoleh bahwa kotak dengan urutan ganjil adalah putih dan kotak dengan urutan genap adalah hitam. Banyak kotak pada papan catur *n*x*n* adalah n^2. Karena *n* ganjil, maka n^2 adalah ganjil. Jadi kotak terakhir sebelum kembali ke kotak pertama adalah putih. Diperoleh bahwa kuda melangkah dari kotak putih (kotak ke-n^2) menuju kotak putih (kotak pertama). Hal ini tidak mungkin karena kuda melangkah dari kotak ke kotak dengan warna berbeda. Disimpulkan bahwa, pada papan catur ukuran *n*x*n*, dengan *n* bilangan asli ganjil dan n > 1, tidak dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa pada papan catur ukuran *n*x*n*, dengan *n* bilangan asli ganjil dan n > 1, tidak dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula. Pada papan catur ukuran *n*x*n*, dengan *n* bilangan asli genap dan n > 4, diduga dapat dibuat langkah kuda yang melalui semua kotak tepat satu kali dan kembali ke kotak semula, seperti pada papan catur 6x6. Disarankan kepada pembaca untuk membuktikan dugaan ini. Pembahasan dapat dilakukan pada *mengapa* dan *bagaimana* alur langkah kuda itu dapat dibuat.

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.