**LAPORAN PENELITIAN MANDIRI**

# *EDGE-MAGIC TOTAL LABELING* PADA BEBERAPA JENIS GRAPH

**Oleh**
**Abdussakir, M.Pd**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**JURUSAN MATEMATIKA**
**MEI 2005**

## *EDGE-MAGIC TOTAL LABELING*

## PADA BEBERAPA JENIS GRAPH

### A. Latar Belakang

Masalah pelabelan dalam graph mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan pada suatu graph muncul pertama kali dari karya Rosa pada tahun 1967. Pelabelan pada suatu graph adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graph (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Beberapa pelabelan pada graph sebenarnya digeneralisasi dari ide persegi ajaib (*magic square*). Berikut ini beberapa jenis pelabelan ajaib pada suatu graph.

a. Misalkan $G$ graph dengan himpunan titik $V$ dan himpunan titik $E$. Banyak titik di $G$ adalah $p$ dan banyak sisi di $G$ adalah $q$. **Pelabelan total sisi ajaib** (*edge-magic total labeling*) pada graph $G$ adalah fungsi bijektif $\lambda$ dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ sehingga untuk sebarang sisi $(x, y)$ di $G$ berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta $k$. Selanjutnya $k$ disebut bilangan ajaib pada $G$ dan $G$ disebut **total sisi ajaib**.

b. Misalkan $G$ graph dengan himpunan titik $V$ dan himpunan titik $E$. Banyak titik di $G$ adalah $p$ dan banyak sisi di $G$ adalah $q$. **Pelabelan titik sisi ajaib** (*edge-magic* *vertex labeling*) pada graph $G$ adalah fungsi bijektif $\lambda$ dari $V$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$ sehingga untuk sebarang sisi $(x, y)$ di $G$ berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta $k$. Selanjutnya $k$ disebut bilangan ajaib pada $G$ dan $G$ disebut **titik sisi ajaib**.

c. Misalkan $G$ graph dengan himpunan titik $V$ dan himpunan titik $E$. Banyak titik di $G$ adalah $p$ dan banyak sisi di $G$ adalah $q$. **Pelabelan total titik ajaib** (*vertex-magic total labeling*) pada graph $G$ adalah fungsi bijektif λ dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ sehingga untuk sebarang titik $x$ di $G$ berlaku

$$\lambda(x) + \sum_{y \in N(v)} \lambda(xy) = k$$

untuk suatu konstanta $k$. Selanjutnya $k$ disebut bilangan ajaib pada $G$ dan $G$ disebut **total titik ajaib**.

d. Misalkan $G$ graph dengan himpunan titik $V$ dan himpunan titik $E$. Banyak titik di $G$ adalah $p$ dan banyak sisi di $G$ adalah $q$. **Pelabelan sisi titik ajaib** (*vertex-magic edge labeling*) pada graph $G$ adalah fungsi bijektif $\lambda$ dari $E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, q\}$ sehingga untuk sebarang titik $x$ di $G$ berlaku

$$\sum_{y \in N(v)} \lambda(xy) = k$$

untuk suatu konstanta $k$. Selanjutnya $k$ disebut bilangan ajaib pada $G$ dan $G$ disebut **sisi titik ajaib**.

Penelitian mengenai pelabelan total sisi ajaib pada beberapa jenis graph sudah banyak dilakukan di beberapa negara seperti Australia dan Jepang. Berbagai hasil penelitian telah menyebutkan bahwa graph sikel ($C_n$), graph komplit ($K_n$), graph lintasan ($P_n$), dan graph bipartisi komplit ($K_{m,n}$) adalah total sisi ajaib tanpa menyertakan bukti berupa fungsi bijektif yang dikostruksi. Karena pelabelan total sisi ajaib berkaitan dengan pengkonstruksian fungsi, maka dimungkinkan fungsi yang dibuat seorang peneliti akan berbeda dengan fungsi peneliti lain pada graph yang sama.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis mengadakan penelitian mengenai pelabelan total sisi ajaib pada beberapa jenis yang meliputi graph lintasan ($P_n$), gabungan graph lintasan orde 2 ($mP2$), graph bintang ($K_{1,n}$), dan graph sikel ($C_n$). Penelitian ditujukan untuk menemukan rumus fungsi yang menunjukkan bahwa graph-graph tersebut adalah total sisi ajaib.

**B. Rumusan Masalah**

Pertanyaan dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_n$?
2. Bagaimana pelabelan total sisi ajaib pada graph $mP_2$, m bilangan asli ganjil?
3. Bagaimana pelabelan total sisi ajaib pada graph $K_{1,n}$?
4. Bagaimana pelabelan total sisi ajaib pada graph $C_n$, n bilangan asli ganjil?

**C. Tujuan Penelitian**

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini sebagai berikut.

1. Menjelaskan pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_n$.
2. Menjelaskan pelabelan total sisi ajaib pada graph $mP_2$, m bilangan asli ganjil.
3. Menjelaskan pelabelan total sisi ajaib pada graph $K_{1,n}$.
4. Menjelaskan pelabelan total sisi ajaib pada graph $C_n$, n bilangan asli ganjil.

## D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan bukti atau penjelasan bahwa graph $P_n$, $mP_2$ dengan m bilangan asli ganjil, $K_{1,n}$ dan $C_n$ dengan n bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi penambah wawasan mengenai pelabelan total sisi ajaib dan merangsang untuk melakukan penelitian lebih lanjut mengenai pelabelan total sisi ajaib pada beberapa jenis graph lainnya.

## E. Kerangka Teori

*Graph G* adalah pasangan ($V$, $E$) dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V$ disebut *order* dari $G$ dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E$ disebut ukuran dari $G$ dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graph yang dibicarakan hanya graph $G$, maka order dan ukuran dari $G$ cukup masing-masing ditulis $p$ dan $q$.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik $u$ dan $v$. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graph $G$, maka $u$ dan $v$ disebut *terhubung langsung*, $v$ dan $e$ serta $u$ dan $e$ disebut *terkait langsung*, dan titik $u$ dan $v$ disebut *ujung* dari $e$. Jika $v$ adalah titik pada graph $G$, maka himpunan semua titik di $G$ yang terhubung langsung dengan $v$ disebut *lingkungan dari v* dan ditulis $N(v)$.

*Derajat dari titik v* di graph $G$, ditulis $\deg_G v$, adalah banyaknya sisi di $G$ yang terkait langsung dengan $v$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik $v$ di graph $G$ adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Titik yang berderajat satu disebut *titik ujung*. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$.

*Jalan u-v dalam graph G* adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u=v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di $G$. $v_0$ disebut *titik awal*, $v_n$ disebut *titik akhir*, titik $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*, dan $n$ menyatakan panjang dari W. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*. Jika $v_0 = v_n$, maka $W$ disebut *jalan tertutup*. Jika semua sisi di $W$ berbeda, maka $W$ disebut *trail*. Jika semua titik di $W$ berbeda, maka $W$ disebut *lintasan*. Graph berbentuk lintasan dengan titik sebanyak $n$ dinamakan *graph lintasan* dan ditulis $P_n$.

Trail tertutup dan taktrivial pada graph $G$ disebut *sirkuit* di G. Sirkuit yang semua titik internalnya berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang $k$ disebut sikel-$k$. Sikel-$k$ disebut genap atau ganjil bergantung pada $k$ genap atau ganjil. Graph berbentuk sikel dengan titik sebanyak n disebut *graph sikel* dan ditulis $C_n$.

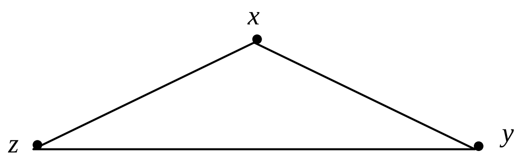
Misal $G$ dan $H$ graph. Maka graph $G \cup H$ adalah graph dengan $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ dan $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Jika $G$ graph, maka $G \cup G$ ditulis $2G$ dan $G \cup G \cup \ldots \cup G$ (sebanyak $n$ faktor) ditulis $nG$, untuk $n$ bilangan asli.

Graph $G$ disebut *graph bipatisi* jika himpunan titik di $G$ dapat dipartisi menjadi dua himpuman $X$ dan $Y$ sehingga masing-masing sisi mempunyai titik ujung di $X$ dan salah satu titik ujungnya di $Y$. Graph $G$ disebut *graph komplit* jika semua titik di $G$ saling terhubung langsung. Graph komplit dengan $n$ titik dilambangkan dengan $K_n$. Graph $G$ disebut *graph bipartisi komplit* jika $G$ adalah graph bipartisi dan komplit. Graph bipartisi komplit yang masing-masing partisi memuat m dan n titik dilambangkan dengan $K_{m,n}$. Graph $K_{1,n}$ disebut dengan *graph bintang*.

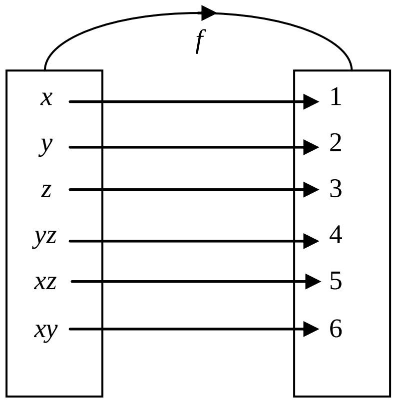
Pelabelan total sisi ajaib (*edge-magic total labeling*) pada suatu graph $(V, E)$ dengan order $p$ dan ukuran $q$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ sehingga untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan $k$ konstanta. Pelabelan total sisi ajaib dapat dimaknai bahwa jumlah label suatu sisi dan label titik yang terkait langsung dengan sisi tersebut adalah sama untuk semua sisi. Graph yang dapat dikenakan pelabelan total sisi ajaib disebut graph total sisi ajaib.

Sebagai contoh, perhatikan graph $G$ berikut dengan $V(G) = \{x, y, z\}$ dan $E(G) = \{xy, yz, xz\}$. Jadi oder $G$ adalah $p = 3$ dan ukuran $G$ adalah $q = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graph $G$ adalah total sisi ajaib.

$G$:




Jika dibuat fungsi $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sebagai berikut



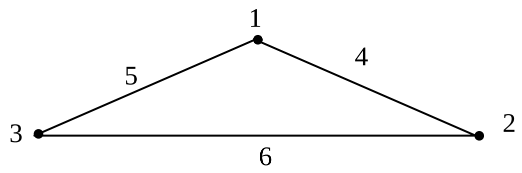

diperoleh

$f(x) + f(xy) + f(y) = 1 + 6 + 2 = 9$

$f(x) + f(xz) + f(z) = 1 + 5 + 3 = 9$

$f(y) + f(yz) + f(z) = 2 + 4 + 3 = 9.$

Jadi fungsi $f$ adalah pelabelan total sisi ajaib pada $G$. Pelabelan pada graph $G$ sehingga diperoleh pelabelan total sisi ajaib dapat digambar sebagai berikut




**F. HASIL PENELITIAN**

**1. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $P_n$**

Graph $P_n$ adalah graph lintasan dengan order $n$ dan ukuran $(n - 1)$. Dalam pembahasan ini graph $P_n$ dibedakan menjadi $P_n$ untuk n ganjil dan $P_n$ untuk n genap.

**a. Graph $P_n$ ($n$ ganjil)**

Graph $P_n$ ($n$ ganjil) adalah graph lintasan yang memuat sebanyak ganjil titik. Pembahasan bahwa graph $P_n$ adalah total sisi ajaib untuk $n$ bilangan asli ganjil akan dilakukan secara khusus melalui beberapa contoh, dan selanjutnya disajikan dalam bentuk teorema beserta buktinya. Pemberian beberapa contoh khusus ini akan memberikan gambaran bagaimana pelabelan total sisi ajaib dapat dilakukan dan dapat digeneralisasi secara umum untuk graph $P_n$ ($n$ bilangan asli ganjil).

**Untuk $n$ = 1**

Graph $P_1$ dapat dilihat pada gambar berikut.

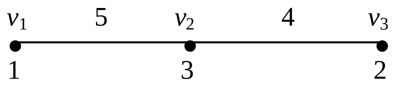
$P_1$ : $\bullet v_1$

Dengan memberi label pada titik $v_1$ dengan label 1, maka graph $P_1$ adalah total sisi ajaib. Hal ini disebabkan karena $P1$ tidak mempunyai sisi dan bilangan ajaib untuk $P_1$ adalah $k = 1$.

**Untuk *n* = 3**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_3$ dapat dilihat pada gambar berikut.

$P_3$ :

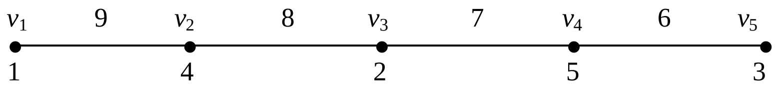



dengan bilangan ajaib $k = 9$.

**Untuk *n* = 5**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_5$ dapat dilihat pada gambar berikut.

$P_3$ :

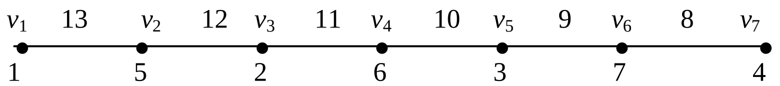



dengan bilangan ajaib $k = 14$.

**Untuk *n* = 7**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_7$ dapat dilihat pada gambar berikut.

$P_3$




dengan bilangan ajaib $k = 19$.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, maka disajikan teorema berikut.

**Teorema 1**

Graph $P_n$, dengan $n$ bilangan asli ganjil, adalah total sisi ajaib.

**Bukti:**

Untuk $n = 1$, $P_1$ adalah total sisi ajaib karena tidak memuat sisi.

Untuk $n$ bilangan asli ganjil dan $n > 1$.

Graph $P_n$ mempunyai order $n$ dan ukuran $(n - 1)$.

Misalkan

$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, dan

$E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n\}$

Jadi $|V(P_n)| + |E(P_n)| = 2n - 1$.

Definisikan fungsi $\lambda$ dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 2n - 1\}$dengan pengaitan sebagai berikut.

$\lambda(v_i) = \frac{i+1}{2}$, untuk $i$ ganjil, $1 \le i \le n$

$\lambda(v_i) = n - \frac{n-(i+1)}{2}$, untuk $i$ genap, $1 \le i \le n$

$\lambda(v_i v_{i+1}) = 2n - i$, untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

Maka,

a. Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di $G$, dengan $i$ ganjil, $1 \le i \le n$, diperoleh

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{i+1}) = (\frac{i+1}{2}) + (2n - i) + (n - \frac{n-[(i+1)+1]}{2})$$

$$= 3n - \frac{n-3}{2}$$

b. Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di $G$, dengan $i$ genap, $1 \le i \le n$, diperoleh

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{i+1}) = (n - \frac{n-(i+1)}{2}) + (2n - i) + (\frac{(i+1)+1}{2})$$

$$= 3n - \frac{n-3}{2}$$

Dengan demikian, untuk $P_n$, $n$ bilangan asli ganjil, adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib $k = 3n - \frac{n-3}{2} = \frac{5n+3}{2}$. ♦

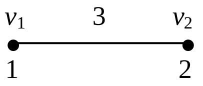
**b. Graph $P_n$ ($n$ genap)**

Graph $P_n$ ($n$ genap) adalah graph lintasan yang memuat sebanyak genap titik. Pembahasan bahwa graph $P_n$ adalah total sisi ajaib untuk $n$ bilangan asli genap akan dilakukan secara khusus melalui beberapa contoh, dan selanjutnya disajikan dalam bentuk teorema beserta buktinya. Pemberian beberapa contoh khusus ini akan memberikan gambaran bagaimana pelabelan total sisi ajaib dapat dilakukan dan dapat digeneralisasi secara umum untuk graph $P_n$ ($n$ bilangan asli genap).

**Untuk $n$ = 2**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$P_2$ :

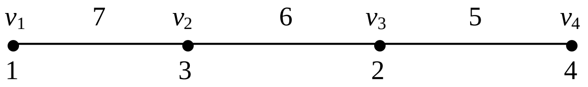



dengan bilangan ajaib $k$ = 6.

**Untuk $n$ = 4**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_4$ dapat dilihat pada gambar berikut

$P_4$ :

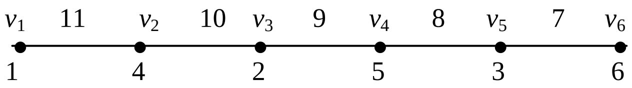



dengan bilangan ajaib $k$ = 11.

**Untuk $n$ = 6**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $P_6$ dapat dilihat pada gambar berikut

$P_6$




dengan bilangan ajaib $k$ = 16.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, maka disajikan teorema berikut.

**Teorema 2**

Graph $P_n$, dengan $n$ bilangan asli genap, adalah total sisi ajaib.

**Bukti:**

Graph $P_n$ ($n$ ganjil) mempunyai order $n$ dan ukuran ($n$ – 1).

Jadi $|V(P_n)| + |E(P_n)| = 2n - 1$.

Misalkan $V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$dan

$E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n\}$

Definisikan fungsi $\lambda$ dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 2n - 1\}$dengan pengaitan sebagai berikut.

$\lambda(v_i) = \frac{i+1}{2}$, untuk $i$ ganjil, $1 \le i \le n$

$\lambda(v_i) = \frac{n+i}{2}$, untuk $i$ genap, $1 \le i \le n$

$\lambda(v_i v_{i+1}) = 2n - i$, untuk $1 \le i \le n - 1$

Maka,

a. Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di $G$, dengan $i$ ganjil, $1 \le i \le n$, diperoleh

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{i+1}) = \left(\frac{i+1}{2}\right) + (2n - i) + \left(\frac{n+(i+1)}{2}\right)$$

$$= 2n + \frac{n+2}{2}$$

b. Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ di $G$, dengan $i$ genap, $1 \le i \le n$, diperoleh

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_i v_{i+1}) + \lambda(v_{i+1}) = \left(\frac{n+i}{2}\right) + (2n - i) + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right)$$

$$= 2n + \frac{n+2}{2}$$

Dengan demikian, untuk $P_n$, $n$ bilangan asli genap, adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib $k = 2n + \frac{n+2}{2} = \frac{5n+2}{2}$. ♦

Berdasarkan teorema 1 dan teorema 2, maka dapat disimpulkan bahwa graph $P_n$ adalah total sisi ajaib, untuk sebarang $n$ bilangan asli.

**2. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $mP_2$ (m Bilangan Asli Ganjil)**

Graph $P_2$ adalah graph lintasan dengan order 2 dan ukuran 1. Pembahasan bahwa graph $mP_2$ adalah total sisi ajaib untuk $m$ bilangan asli ganjil akan dilakukan secara khusus melalui beberapa contoh, dan selanjutnya disajikan dalam bentuk teorema beserta buktinya. Pemberian beberapa contoh khusus ini akan memberikan gambaran bagaimana pelabelan total sisi ajaib dapat dilakukan dan dapat digeneralisasi secara umum untuk graph $mP_2$ ($m$ bilangan asli ganjil).

**Untuk $m$ = 1**

Graph $P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$P_2$ :


Definisikan fungsi $f$ dari $\{v_1, v_2, v_1v_2\}$ ke $\{1, 2, 3\}$dengan

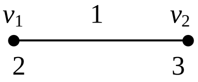
$f(v_1) = 2$

$f(v_2) = 3$

$f(v_1v_2) = 1$

maka diperoleh $f(v_1) + f(v_1v_2) + f(v_2) = 6$. Dengan demikian, fungsi $f$ merupakan pelabelan total sisi ajaib pada $P_2$ dengan konstanta $k = 6$. Graph $P_2$ berserta labelnya nampak pada gambar berikut.

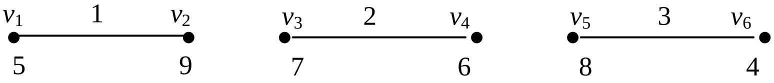
$P_2$ :




**Untuk $m$ = 3**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $3P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$3P_2$ :

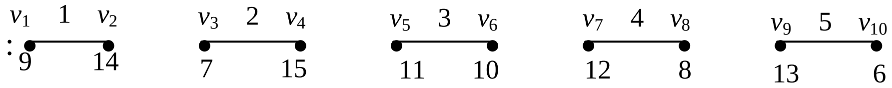



dengan konstanta $k = 15$ untuk $3P_2$.

**Untuk $m$ = 5**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $5P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$5P_2$ :

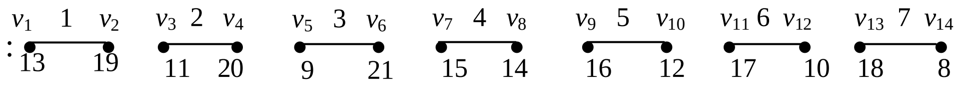



dengan konstanta $k$ = 24 untuk $5P_2$.

**Untuk $m$ = 7**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $7P_2$ dapat dilihat pada gambar berikut

$7P_2$ :




dengan konstanta $k$ = 33 untuk $7P_2$.

Berdasarkan beberapa contoh tersebut, maka disajikan teorema berikut.

**Teorema 3**

Graph $mP_2$, dengan $m$ bilangan asli ganjil, adalah total sisi ajaib.

**Bukti:**

Untuk $m$ = 1, sudah jelas berdasarkan gambar bahwa $P_2$ adalah total sisi ajaib.

Untuk $mP_2$, $m$ bilangan asli ganjil dan $m > 1$.

Graph $mP_2$ mempunyai order $2m$ dan ukuran $m$.

Misalkan $V(mP_2) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2m-1}, v_{2m}\}$dan

$E(mP_2) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, \ldots, v_{2m-1}v_{2m}\}$

Jadi $|V(mP_2)| + |E(mP_2)| = 3m$.

Definisikan fungsi $f$ dari $V(mP_2) \cup E(mP_2)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 3m\}$dengan

pengaitan sebagai berikut.

a. $f(v_iv_{i+1}) = \frac{i+1}{2}$, untuk $1 \le i \le 2m - 1$.

b. $f(v_i) = 2m - i$, untuk $1 \le i \le m - 1$ dan $i$ ganjil.

c. $f(v_i) = 2m + i + \frac{m-i+1}{2}$, untuk $1 \le i \le m - 1$ dan $i$ genap.

d. $f(v_i) = 2m + \frac{i-m+2}{2}$, untuk $m \le i \le 2m$ dan $i$ ganjil.

e. $f(v_i) = 3m - i + 1$, untuk $m \le i \le 2m$ dan $i$ genap.

Maka,

a. Untuk sisi $v_iv_{i+1}$ di $G$, dengan $1 \le i \le m - 1$ dan $i$ ganjil, diperoleh

$$f(v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(v_{i+1}) = (2m - i) + (\frac{i+1}{2}) + [2m + (i + 1) + \frac{m-(i+1)+1}{2})$$

$$= 4m + 1 + \frac{m+1}{2}$$

b. Untuk sisi $v_iv_{i+1}$ di $G$, dengan $m \le i \le 2m$ dan $i$ ganjil, diperoleh

$$f(v_i) + f(v_iv_{i+1}) + f(v_{i+1}) = (2m + \frac{i-m+2}{2}) + (\frac{i+1}{2}) + [3m - (i + 1) + 1]$$

$$= 4m + 1 + \frac{m+1}{2}.$$

Dengan demikian, untuk $mP_2$, $m$ bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib dengan konstanta

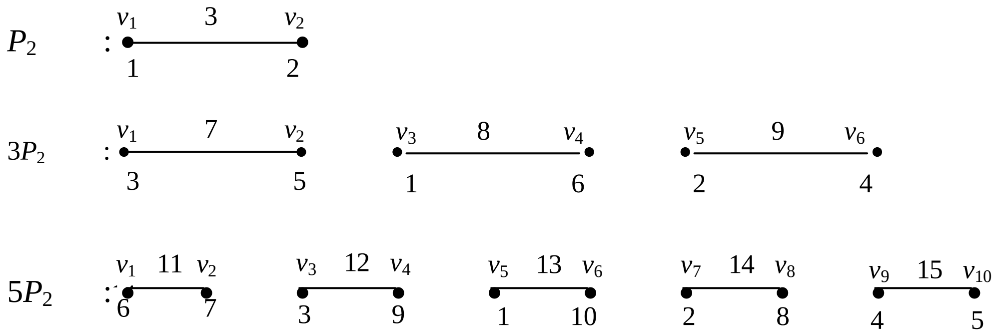
$$k = 4m + 1 + \frac{m+1}{2} = \frac{9m+3}{2}. \ \blacklozenge$$

Berdasarkan pembuktian teorema, maka diketahui bahwa konstanta $k$ untuk graph $mP_2$ (m bilangan asli ganjil), dengan pelabelan yang didefinisikan pada teorema, adalah

$$k = 4m + 1 + \frac{m+1}{2} = \frac{9m+3}{2}.$$

Untuk $m$ = 1, 3, 5, dan 7 konstanta $k$ masing-masing adalah $k$ = 6, 15, 24, dan 33.

Perlu diketahui bahwa pelabelan pada teorema, bukanlah satu-satunya pelabelan total sisi ajaib pada graph $mP_2$. Berikut ini adalah contoh pelabelan lain untuk graph $P_2$, $3P_2$ dan $5P_2$.

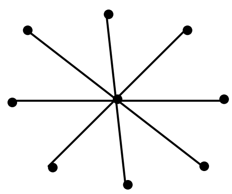



Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph $G$ sehingga $V(G)$ dipetakan ke himpunan $\{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$disebut dengan pelabelan super sisi ajaib (*super edge-magic labeling*). Pada contoh pelabelan di atas untuk $P_2$, $3P_2$, dan $5P_2$, terlihat bahwa masing-masing himpunan titik dipasangkan ke himpunan {1, 2, …., banyak titik}. Dengan demikian graph $P_2$, $3P_2$, dan $5P_2$ adalah super sisi ajaib. Dugaan sementara adalah bahwa graph $mP_2$, dengan $m$ bilangan asli ganjil, adalah super sisi ajaib.

### 3. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $K_{1,n}$

Graph bintang $K_{(1, n)}$ pada dasarnya adalah graph bipartisi komplit. Salah satu partisi memuat tepat satu titik dan partisi yang lain memuat $n$ titik. Graph $K_{(1, n)}$ disebut graph bintang karena gambarnya dapat berbentuk bintang. Berikut ini adalah gambar graph $K_{(1,8)}$.

$K_{(1, 8)}$ :

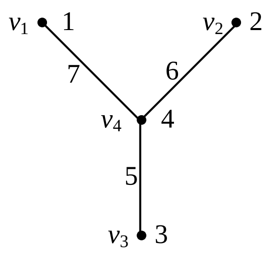


Graph $K_{(1,\, n)}$, untuk $n$ = 1 dan $n$ = 2, tidak lain adalah $P_2$ dan $P_3$. Dengan demikian, graph $K_{(1,\, 1)}$ dan $K_{(1,\, 2)}$ adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib masing-masing adalah 6 dan 9.

**Untuk n = 3**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $K_{(1,\, 3)}$ dapat dilihat pada gambar berikut

$K_{(1,3)}$ :

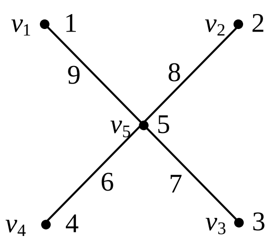



bengan  bilangan ajaib $k$ = 12.

**Untuk n = 4**

Pelabelan total sisi ajaib pada graph $K_{(1,\, 4)}$ dapat dilihat pada gambar berikut

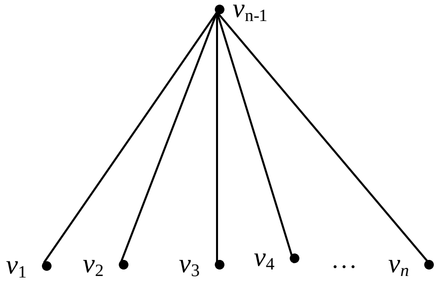
$K_{(1,4)}$ :




bengan  bilangan ajaib $k$ = 15.

Secara umum, graph $K_{(1,\, n)}$ dapat digambarkan sebagai berikut.

$K_{(1,\, n)}$ :




Berdasarkan beberapa contoh di atas, maka disajikan teorema berikut.

**Teorema 4**

Graph $K_{(1,\, n)}$, dengan $n$ bilangan asli, adalah total sisi ajaib.

**Bukti:**

Graph $K_{(1,\, n)}$, mempunyai order $n + 1$ dan ukuran $n$.

Jadi $|V(K_{(1,\, n)})| + |E(K_{(1,\, n)})| = 2n + 1$.

Karena graph $K_{(1,\, n)}$ adalah bipartisi komplit, misalkan $X$ dan $Y$ adalah partisi dari $V(K_{(1,\, n)})$, dengan $X = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan $Y = \{v_{n+1}\}$. Dengan demikian, $E(K_{(1,\, n)}) = \{v_1v_{n+1}, v_2v_{n+1}, v_3v_{n+1}, \ldots, v_nv_{n+1}\}$

Definisikan fungsi $f$ dari $V(K_{(1,\, n)}) \cup E(K_{(1,\, n)})$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 2n + 1\}$ dengan pengaitan sebagai berikut.

a. $f(v_iv_{n+1}) = 2(n + 1) - i$, untuk $1 \le i \le n$

b. $f(v_i) = i$, untuk $1 \le i \le n + 1$

Maka, untuk sisi $v_iv_{n+1}$ di $G$, dengan $1 \le i \le n$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(v_i) + f(v_iv_{n+1}) + f(v_{n+1}) &= i + [2(n + 1) - i] + (n + 1) \\ &= 3(n + 1) \end{aligned}$$

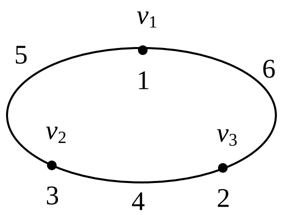
Dengan demikian, graph $K_{(1,\, n)}$, dengan $n$ bilangan asli, adalah total sisi ajaib dengan bilangan ajaib $k = 3(n + 1)$ ♦

**4. Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $C_n$ ($n$ Bilangan Asli Ganjil)**

Graph $C_n$ adalah graph sikel dengan $n$ titik dan $n$ sisi. Graph sikel $C_n$ mempunyai order paling kecil adalah 3, yaitu $C_3$. Pada penelitian ini hanya dibahas mengenai pelabelan total sisi ajaib untuk graph $C_n$, dengan $n$ bilangan asli ganjil.

Pelabelan total sisi ajaib untuk $C_3$ dapat dilihat pada gambar berikut.

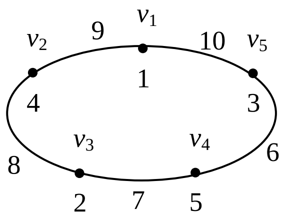
$C_3$:




Bilangan ajaib pada $C_3$ adalah $k = 9$.

Pelabelan total sisi ajaib untuk $C_5$ dapat dilihat pada gambar berikut.

$C_5$:




Bilangan ajaib pada $C_5$ adalah $k = 14$.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, maka disajikan teorema berikut.

**Teorema 5**

Graph $C_n$, dengan $n$ bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$, adalah total sisi ajaib.

**Bukti:**

Graph $C_n$ mempunyai order $n$ dan ukuran $n$.

Misalkan $C_n : v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1$, maka $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan

$E(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$

Jadi $|V(C_n)| + |E(C_n)| = 2n$.

Definisikan fungsi $\lambda$ dari $V(C_n) \cup E(C_n)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$dengan pengaitan sebagai berikut.

$\lambda(v_i) = \frac{i+1}{2}$, untuk $i$ ganjil, $1 \leq i \leq n$

$\lambda(v_i) = n - \frac{n-3}{2} + \frac{i-2}{2}$, untuk $i$ genap, $1 \leq i \leq n$

$\lambda(v_iv_{i+1}) = 2n - i,$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1.$

$\lambda(v_nv_1) = 2n.$

Maka,

a. Untuk sisi $v_iv_{i+1}$ di $C_n$, dengan $1 \le i \le n$ dan $i$ ganjil, diperoleh

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_iv_{i+1}) + \lambda(v_{i+1}) = \left(\frac{i+1}{2}\right) + (2n - i) + \left[n - \frac{n-3}{2} + \frac{(i+1)-2}{2}\right]$$

$$= \frac{5n+3}{2}$$

b. Untuk sisi $v_iv_{i+1}$ di $C_n$, dengan $1 \le i \le n$ dan $i$ genap, diperoleh

$$\lambda(v_i) + \lambda(v_iv_{i+1}) + \lambda(v_{i+1}) = \left[n - \frac{n-3}{2} + \frac{i-2}{2}\right] + (2n - i) + \left(\frac{(i+1)+1}{2}\right)$$

$$= \frac{5n+3}{2}$$

c. Untuk sisi $v_nv1$ di $C_n$, diperoleh

$$\lambda(v_n) + \lambda(v_nv_1) + \lambda(v_1) = \frac{n+1}{2} + (2n) + (1)$$

$$= \frac{5n+3}{2}$$

Dengan demikian, graph $C_n$, dengan $n$ bilangan asli ganjil dan $n \ge 3$, adalah total sisi ajaib dengan konstanta $k = \frac{5n+3}{2}$. ♦

## G. SIMPULAN DAN SARAN

### 1. Simpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa

a. graph $P_n$, $n$ bilangan asli, adalah total sisi ajaib.

b. graph $mP_2$, m bilangan asli ganjil adalah total sisi ajaib.

c. graph $K_{(1,n)}$, $n$ bilangan asli, adalah total sisi ajaib.

d. graph $C_n$, $n$ bilangan asli ganjil dan $n \geq 3$, adalah total sisi ajaib.

**2. Saran**

Saran yang dapat disampaikan berkaitan dengan hasil penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Disarankan kepada pembaca yang tertarik pada teori graph untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan total sisi ajaib pada jenis-jenis graph lainnya, misalnya graph $C_n$, dengan $n$ bilangan asli genap.

b. Disarankan kepada pembaca yang tertarik pada teori graph untuk melakukan penelitian mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graph $mP_2$, $m$ bilangan asli ganjil.

## H. DAFTAR PUSTAKA


Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Miller, Mirka. 2000. *Open Problems in Graph Theory: Labelings and Extremal Graphs*. Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia X di Institut Teknologi Bandung, 17-20 Juli.