BILANGAN *CLIQUE* GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL

Muflihatun Nafisah[1], Abdussakir[2]
1) Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Jl. Sumbersari Gg. 3A 230 Malang, e-mail: muflihatunnafisah@gmail.com
2) Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Perum OMA View EF 01, Malang, e-mail: abdussakir@gmail.com

Abstrak. Misalkan G grup tidak komutatif. Graf *non commuting* Γ_G dari G didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya bukan anggota center dari G dan dua titik saling terhubung jika dan hanya jika tidak komutatif. Dari graf sederhana yang didapatkan dari graf *non commuting* Γ_G, orde terbesar subgraf komplit dari graf Γ_G dinamakan dengan bilangan *clique*$\omega(\Gamma_G)$. Pada makalah ini akan ditentukan bilangan *clique*graf *non commuting* pada grup dihedral D_{2n}. Metode yang digunakan adalah kajian pustaka. Sedangkan analisis yang dilakukan adalah dengan melihat pola berdasarkan beberapa contoh yang selanjutnya dinyatakan sebagai teorema. Berdasarkan penelitian ini, diperoleh hasil bahwa bilangan *clique*graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli ganjil, dengan $n \geq 3$ adalah

$$\omega(\Gamma_{D_{2n}}) = n + 1$$

dan bilangan *clique*graf *non commuting* pada grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli genap, dengan $n \geq 3$ adalah

$$\omega(\Gamma_{D_{2n}}) = \frac{n+2}{2}$$

Kata kunci: *bilangan clique, graf non commuting, grup dihedral.*

PENDAHULUAN

Graf$G$ adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Banyak unsur di V disebut orde dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyak unsur di E disebur ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986). Jika dimisalkan Γ merupakan graf sederhana, ukuran maksimum dari subgraf komplit dari graf Γdisebut bilangan *clique* dari Γ yang dinotasikan dengan $\omega(\Gamma)$(Abdollahi, dkk.. 2010).

Beberapa penelitian mengenai bilangan *clique* suatu graf yang sudah dilakukan antara lain, Vahidi dan Talebi (2010) membahas tentang bilangan bebas, bilangan *clique* dan bilangan *cover* minimum dari graf *commuting* dari grup. Abdollahi, dkk. (2010) meneliti tentang bilangan *clique* dari graf *non commuting* dari suatu grup. Chelvam, dkk. (2011) meneliti tentang bilangan kromatik dan bilangan *clique* pada graf komuting yang diperoleh dari grup dihedral.

Perkembangan teori graf juga membahas tentang graf yang dibangun dari grup. Seperti halnya yang dilakukan oleh Vahidi dan Talebi (2010) yang meneliti mengenai graf *commuting* dari grup, perkembangan selanjutnya yaitu misalkan G grup tidak komutatif dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* $\Gamma_G$adalah draf yang memiliki himpunan titik $G \backslash Z(G)$ dan dua titik $x, y \in G\backslash Z(G)$ akan terhubung langsung di Γ_G jika $xy \neq yx \in G$ (Abdollahi, dkk. (2006) dan Abdollahi, dkk. (2010)).

Berdasarkan uraian di atas, meskipun Abdollahi, dkk. (2010), telah meneliti tentang bilangan *clique* dan graf *non commuting* dari suatu grup, tetapi pada penelitian itu tidak dilakukan pada grup dihedral, sehingga pada penelitian ini akan dikaji bilangan *clique* graf *non commuting* dari grup dihedral.

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Banyak unsur di V disebur orde dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyak unsur di E disebur ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

2.2 Grup Dihedral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G himpunan tidak kosong dan $*$ operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (sifat assosiatif).

b. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut dentitas di G).

c. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup$(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi- n beraturan, dinotasikan D_{2n} untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n. Operasi biner di D_{2n} adalah operasi fungsi komposisi yang bersifat assosiatif. Berikut ini beberapa notasi dan beberapa kaidah yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya yaitu (Dummit dan Foote, 1991):

a. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$

b. $|s| = 2$

c. $s \neq r^i$ untuk semua i

d. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau $k = 1$ dan $0 \leq i \leq n-1$.

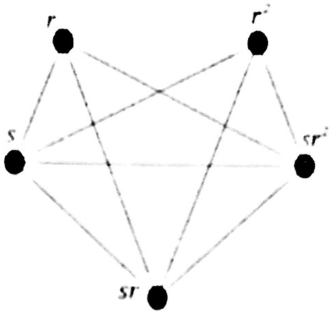
e. $sr = r^{-1}s$

f. $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

2.3 Graf *Non Commuting*

Misalkan G grup tidak komutatif dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* $\Gamma_G$adalah draf yang memiliki himpunan titik $G\backslash Z(G)$ dan dua titik $x, y \in G\backslash Z(G)$ akan terhubung langsung di Γ_G jika $xy \neq yx \in G$ (Abdollahi, dkk.. 2006). Atau graf *non commuting* dari G didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya adalah bukan anggota center dari G dan dua titik saling terhubung jika dan hanya jika tidak komutatif (Abdollahi, dkk.. 2010).

Misalkan pada D_6 diperoleh $Z(D_6) = \{1\}$, sehingga graf *noncommuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 2.1. Graf *Non Commuting* pada Grup D_6

2.4 Bilangan *Clique*

Misal Γ merupakan graf sederhana, ukuran maksimum dari subgraf komplit dari graf Γdisebut bilangan *clique* dari Γ yang dinotasikan dengan $\omega(\Gamma)$(Abdollahi, dkk.. 2010).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian pustaka (*library research*), yang dimulai dengan mengkaji topik berdasarkan bahan-bahan pustaka berupa buku, artikel, atau jurnal. Penelitian selanjutnya dilakukan dengan mengkaji contoh-contoh khusus (induktif) untuk menemukan suatu generalisasi yang dibuktikan secara deduktif. Adapun langkah-langkah penelitian ini secara garis besar sebagai berikut:

a. Menentukan graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan $n = 3,4,5,6,7,8$.

b. Menetukan *clique*graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}dengan $n = 3,4,5,6,7,8$.

c. Menelaah pola bilangan *clique*graf *non commuting* pada grup dihedral D_{2n}dengan $n = 3,4,5,6,7,8$ yang sudah ditemukan.

d. Membuat konjektur berdasarkan pola yang sudah ditemukan.

e. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema dan melengkapi dengan bukti secara deduktif.

HASIL

Elemen-elemen dari grup dihedral D_6 adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel *Cayley* $\boldsymbol{D_6}$

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	S	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

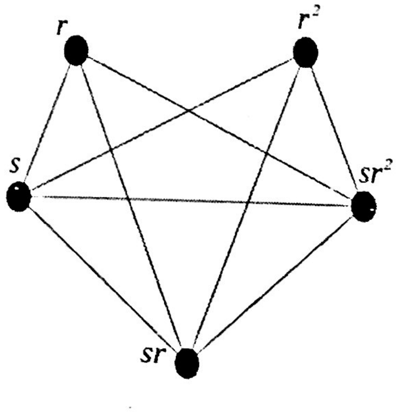
Dengan daerah warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6 sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^2 \circ s \neq s \circ r^2 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2 \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$

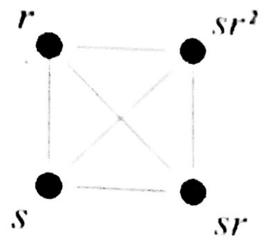
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_6 yaitu $Z(D_6) = \{1\}$, sehingga graf *noncommuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 4.2. Graf *Non Commuting* pada Grup $\boldsymbol{D_6}$

Dengan melihat gambar di atas, maka dapat ditentukan *clique*Γ_{D_6} sebagai berikut:



Gambar 4.3. *clique* Γ_{D_6}

Sehingga didapatkan *clique*Γ_{D_6} merupakan graf K_4 dengan himpunan titik-titiknya adalah $\{r, s, sr, sr^2\}$. Dengan demikian bilangan *clique* graf *non commuting* grup dihedral $D_6\left(\omega(\Gamma_{D_6})\right) = 4$.

Berdasarkan pengamatan dengan langkah-langkah yang sama seperti di atas, ditemukan pola untuk bilangan *clique*$\Gamma_{D_{2n}}$ dengan $n = 4,5,6,7,8$ sebagai berikut:

Tabel 2. Pola Bilangan *Clique* Graf *Non Commuting* Grup D_{2n}

No.	Graf *Non Commuting*	Bilangan *Clique* Graf *NonCommuting*
1.	Graf *noncommuting* grup D_6	$\omega(\Gamma_{D_6}) = 4$
2.	Graf *noncommuting* grup D_8	$\omega(\Gamma_{D_8}) = 3$
3.	Graf *noncommuting* grup D_{10}	$\omega(\Gamma_{D_{10}}) = 6$
4.	Graf *noncommuting* grup D_{12}	$\omega(\Gamma_{D_{12}}) = 4$
5.	Graf *noncommuting* grup D_{14}	$\omega(\Gamma_{D_{14}}) = 8$
6	Graf *noncommuting* grupD_{16}	$\omega(\Gamma_{D_{16}}) = 5$

Dengan demikian,diperoleh pola yang dapat dinyatakan sebagai teorema sebagai berikut:

Teorema 1:

Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan order $2n$ dengan n bilangan asli dan $n \geq 3$. Bilangan *clique* $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n ganjil diperoleh:

$$\omega(\Gamma_{D_{2n}}) = n + 1$$

sedangkan untuk n genap diperoleh:

$$\omega(\Gamma_{D_{2n}}) = \frac{n+2}{2}$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}$. Diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1\}$ untuk n ganjil. Dengan demikian himpunan titik dari graf *non commuting*$\Gamma_{D_{2n}} =$

$\{r, r^2, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\}$. Karena $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk semua $1 \leq i,j \leq n-1$ dengan $i \neq j$ maka titik-titik ini tidak terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Dan karena n ganjil, maka $s \circ r^i \neq r^i \circ s$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, yang berarti bahwa s dan r^i saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Demikian juga karena n ganjil, maka $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, $j = 0,1,2,\cdots,n-1$ dan $i = 0,1,2,\cdots,n-1$, dengan $i \neq j$ yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Sehingga terdapat salah satu himpunan titik-titik yang membentuk *clique* graf *non commuting* grup D_{2n} dengan n ganjil sebagai berikut:

$$\Gamma_{D_{2\cdot n}}:\{\underbrace{r}_{1},\underbrace{s}_{1},\underbrace{sr,sr^2,sr^3,\cdots,sr^{n-1}}_{n-1}\}$$

Sehingga bilangan *clique* graf *non commuting* grup D_{2n} dengan n ganjil adalah $1+1+(n-1) = n+1$.

Sementara itu, untuk n genap diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$. Dengan demikian himpunan titik dari graf *non commuting* $\Gamma_{D_{2n}} = \left\{r, r^2, \cdots, r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, \cdots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \cdots, sr^{n-1}\right\}$. Karena $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk semua $1 \leq i,j \leq n-1$, dengan $i \neq j$ maka titik-titik ini tidak terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Dan karena n genap, maka $s \circ r^i \neq r^i \circ s$, $i = 1,2,\ldots,n-1$ dan $i \neq \frac{n}{2}$, yang berarti bahwa s dan r^i saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Demikian juga karena n genap, maka $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$ dan $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, dengan $i \neq j$ dan jumlah dari i dan j bukan merupakan kelipatan dari $\frac{n}{2}$, yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di $\Gamma_{D_{2n}}$. Maka salah satu himpunan titik-titik yang membentuk *clique* graf *non commuting* grup D_{2n} dengan n genap sebagai berikut:

$$\Gamma_{D_{2\cdot n}}:\{\underbrace{r}_{1},\underbrace{s}_{1},\underbrace{sr,sr^2,\cdots,sr^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}}_{\frac{n-2}{2}}\}$$

Sehingga bilangan *clique* graf *non commuting* grup D_{2n} dengan n ganjil adalah $1+1+\frac{(n-2)}{2} = \frac{n+2}{2}$.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian kali ini, diperoleh bahwa bilangan *clique*graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli ganjil, dengan $n \geq 3$ adalah

$$\omega(\Gamma_{D_{2n}}) = n+1$$

dan bilangan *cliquegraf non commuting* dari grup dihedral D_{2n} untuk n bilangan asli genap, dengan $n \geq 3$ adalah

$$\omega(\Gamma_{D_{2n}}) = \frac{n+2}{2}$$

SARAN

Penelitian selanjutnya disarankan untuk meneliti spektrum *adjacency*, spektrum laplace, spektrum singles laplace, atau spektrum detour dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., dan Maimani, H.R.. (2006). Non-commuting Graph of a Group. *Journal of Algebra*, Vol 298 Hal: 468-492.

Abdollahi, A., Azad, A., Hassanabadi, A.M., dan Zarrin, M.. (2010). On the Clique Numbers of Non-commuting Graphs of Certain Groups. *Algebra Colloquium*, Vol 17 Hal: 611-620.

Chartrand, G. dan Lesniak, L.. (1986). *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth Inc.

Chelvam, Tamizh, T., Selvakumar, K., dan Raja, S.. (2011). Commuting Graph on Dihegral Group. *The Journal of Mathematics and Computer Science*. Vol 2, No 2, Hal: 402-406.

Dummit, D.S. Dan Foote, R.M.. (1991). *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Raisinghania, M.D., dan Aggarwal, R.S.. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Com[any LTD.

Vahidi, J., dan Taalebi, A.A.. (2010). The Commuting Graphs on Group D_{2n} and Q_n. *Journal Mathematics and Computer Science*. Vol 1, No 2, Hal: 123-127.