SPEKTRUM *ADJACENCY* GRAF *NON COMMUTING* DARI GRUP DIHEDRAL (D_{2n})

Rivatul Ridho Elvierayani[1], Abdussakir, M.Si[2]
1) Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Jl. Sumbersari Gg.3B 158 Malang, e-mail: rivatulridho@gmail.com
2) Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Perum OMA View EF 01 Malang,e-mail: abdussakir@gmail.com

Abstrak

Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, misalnya matriks a*djacency*. Ketika graf sudah dinyatakan dalam bentuk matriks, maka dapat didekati secara aljabar linier untuk mencari nilai eigen dan vektor eigennya. Matriks baru yang memuat semua nilai eigen pada baris pertama dan banyaknya vektor eigen yang besesuaian pada baris kedua disebut spektrum. Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum *adjacency*. Kajian mengenai grup dalam aljabar abstrak membawa pada konsep baru dalam teori graf yang disebut graf *noncommuting*. Pada artikel ini ditentukan spektrum *adjacency* graf *non commuting* pada grup dihedral (D_{2n}) dengan n adalahbilangan asli diperoleh spektrum a*djacency* nya:

$$spec(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix} \forall n \geq 3 \text{ danganjil}$$

$$spec(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{n-2}{2} & \frac{3n-6}{2} & 1 \end{bmatrix} \forall n \geq 6 \text{ dangenap}$$

Kata Kunci:*Graf, matriks adjacency, nilai eigen, vektor eigen, spektrum, grup dihedral, graf non commuting.*

PENDAHULUAN

Graf *G*adalah pasangan (*V(G),E(G)*) dengan *V(G)* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan *E(G)* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di *V(G)* yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di *V(G)* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *n(G)*, dan banyaknya unsur di *E(G)* disebut *ukuran* dari *G* dan dilambangkan dengan *m(G)* (Chartrand & Lesniak, 1996).

Sisi $e=(u, v)$ dikatakan *menghubungkan* titik u dan v. Jika $e=(u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut *terhubung langsung(adjacent),v* dan e serta u dan e disebut *terkaitlangsung (incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut *terhubung langsung* (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand & Lesniak, 1996).

Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.*Matriks keterhubungan titik* (*matriks Adjacency*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($n \times n$). Dengan kata lain,matriks *adjacency*dapat ditulis$A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan $a_{ij} = 1$ jika $v_i v_j \in E(G)$ dan $v_i v_j \notin E(G)$. Matriks *adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya (Chartrand & Lesniak, 1996).

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni $Ax = \lambda x$ untuk skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Karena matriks *adjacency* adalah matriks simetri dan real sehingga eigenvalue μ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$ nonnegatif real numbers dan dapat ditulisan dengan $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_p = 0$. If $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \cdots \geq \mu_{i_g}$ adalah nilai eigen yang berbeda, maka spektrum dari $A(G)$ dapat dituliskan dengan:

$$spec(G) = \begin{bmatrix} \mu_{i_1} & \mu_{i_2} & \ldots\mu_{i_g} \\ m_1 & m_2 & \ldots m_g \end{bmatrix}$$

m_g melambangkan multiplisitas nilai eigen μ_{i_j} (Yin, 2008). $m_1 + m_2 + \ldots + m_g = p$ (Ayyaswamy & Balachandran, 2010). Multiplisitas dari μ_{i_j} sebagai akar persamaan karakteristik dari $det(\mu_{i_j} I - A(G)) = 0$ sama dengan dimensi ruang vektor eigen yang bersesuaian dengan μ_{i_j} (Bigg, 1974).

Sebuah sistem aljabar $(G, *)$ dengan G bukan himpunan $\emptyset$ dan satu operasi biner $*$ dikatakan sebagai grup jika memenuhi postulat:

(i) Operasi $*$ memenuhi hukum assosiatif

$$(a * b) * c = a * (b * c) \ldots\ldots \forall a, b, c \in G$$

(ii) Setiap elemen G mempunyai identitas terhadap operasi $*$, misal e adalah identitas di G

$$e * a = a * e = a \ldots. \forall a \in G$$

(iii) Setiap elemen G mempunyai invers terhadap operasi $*$

$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$, dimana e adalah $\in G$(Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Jika $(G,*)$ adalah grup dan $a * b = b * a, \forall a, b \in G$, maka G dikatakan grup *abelian* atau grup komutatif. Grup *dihedral* adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan$n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dihedral* dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991). Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua i.

(4) untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991).

Misal G grup, center dari grup G, dituliskan $Z(G)$ sebagai berikut:

$$Z(G) = \{z \in G : zx = xz, \forall x \in G\}$$

Jadi jika $Z(G)$ adalah himpunan anggota G yang komutatif terhadap semua anggota $Z(G)$.

Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *non commuting* Γ_G adalah sebuah graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G \backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ (Abdollahi, A, 2006, Journal of Algebra). Γ_G adalah sebuah graf yang titiknya adalah bukan elemen-elemen center dari sebuah graf G, titik-titik dari Γ_G adalah $G \backslash Z(G)$ merupakan pengambilan atau penghapusan elemen center pada graf G.

Beberapa penelitian lain mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin (2006) meneliti spektrum Adjacency dan spektrum Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum adjacency pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy & Balachandran (2010) meneliti spektrum Detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n, n)$, graf Korona G dan K_1, graf perkalian Kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan. Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum Adjacency, Laplace, Singless Laplace, dan Detour graf multipartisi komplit $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$. Dalam penelitian mengenai graf *commuting* dan *non commuting*, Abdollahi, dkk (2006&2010) meneliti tentang grup finite pada dua grup yang non abelian dan bilangan *clique*. Abdussakir, dkk (2013) meneliti tentang spektrum graf *commuting* suatu grup. Berdasarkan uraian di atas, belum ada yang mengkaji mengenai spektrum graf *non commuting* sehingga peneliti bermaksud untuk mengkaji spektrum *adjacency* graf *non commuting* dari grup dihedral (D_{2n}).

METODE PENELITIAN

Dalam penulisan artikel ini, peneliti menggunakan metode studi literatur, adapun langkah-langkah peneliti diantaranya:

1. Membuat tabel *cayle* dengan operasi komposisi ($\circ$) pada grup dihedral D_{2n}.
2. Menentukan himpunan titik-titik graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dari tabel *cayle*.
3. Menggambar graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}.
4. Menentukan matriks *adjacency* dari graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n}.
5. Mencari nilai eigen (*eigenvalue*) dari matriks *adjacency* graf *non commuting* grup dihedral D_{2n}.

6. Mencari multiplisitas setiap nilai eigen dari matriks *adjacency* graf *non commuting* grup dihedral D_{2n}.
7. Mencari spektrum *adjacency* dari grup dihedral D_{2n}.
8. Mencari pola dan dirumuskan menjadi suatu lemma dan teorema serta dibuktikan kebenarannya secara umum.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

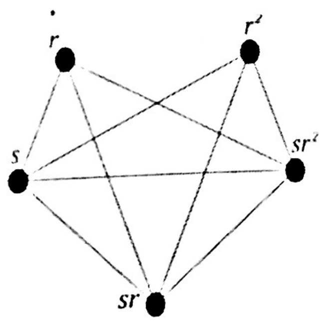
Pada pembahasan ini, grup dihedral yang digunakan adalah $D_6, D_8, D_{10}, \dots, D_{2n}$. Pembahasan yang disajikan dalam bentuk contoh selanjutnya dijadikan sebuah teorema dan disertai bukti.

Dihedral D_6 dibangun dari elemen-elemen $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral berbentuk tabel *Cayley* yang menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada D_6 sebagai berikut:

Tabel 1. Tabel *Cayley* D_6

∘	1	r	r^2	s	Sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	Sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	S	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	R	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari tabel 1, diperoleh center D_6 atau $Z(D_6)$ yaitu $\{1\}$ yang ditunjukkan pada tabel dengan warna hitam, dan elemen-elemen pada D_6 yang tidak komutatif ditunjukkan pada tabel dengan warna abu-abu. Sehingga graf non kommuting dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titiknya $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dari hasil tersebut akan digambarkan ke dalam bentuk graf *non commuting* sebagai berikut:



Gambar 1. Graf non D_6

Graf *non commuting* grup D_6 diatas menghasilkan matriks *adjacency* sebagai berikut:

$$A(\Gamma_{D_6}) = \begin{array}{c|ccccc} & r & r^2 & s & sr & sr^2 \\ \hline r & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ r^2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ s & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ sr & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ sr^2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *Adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan cara mengolah persamaan $det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)$=0.

Dengan mereduksi matriks menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang ada pada *software* Maple 12, maka akan diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6+2\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Karena $det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)$ adalah hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas berikut, maka diperoleh polinomial karakteristiknya yaitu:

$det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = (1)(\lambda)(1+\lambda)^2(6+2\lambda-\lambda^2)$

karena $det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)$ =0, maka

$det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right) = (1)(\lambda)(1+\lambda)^2(6+2\lambda-\lambda^2) = 0$

dan diperoleh nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1+\sqrt{7}, \qquad \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1,\ \lambda_4 = 1-\sqrt{7},$$

Selanjutnya akan ditentukan basis untuk ruang vektor eigen, basis merupakan baris nol pada matriks. Untuk semua λ yang diperoleh subtitusikan kedalam $det\left(A(\Gamma_{D_6}) - \lambda I\right)$=0 dengan metode *gauss Jordan* dalam *software* Maple 12 akan diperoleh $\lambda_1 = 1+\sqrt{7}$ multiplisitas nilai eigennya 1, $\lambda_2 = 0$ multiplisitas nilai eigennya 1, $\lambda_3 = -1$ multiplisitas nilai eigennya 2, $\lambda_4 = 1-\sqrt{7}$ multiplisitas nilai eigennya 1. Sehingga diperoleh spektrum *adjacency* graf *non commuting* dari D_6 adalah:

$$spec(\Gamma_{D_6}) = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{7} & 0 & -1 & 1-\sqrt{7} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$spec(\Gamma_{D_8}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$spec(\Gamma_{D_{10}}) = \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{6} & 0 & -1 & 2-2\sqrt{6} \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$spec(\Gamma_{D_{12}}) = \begin{bmatrix} 2+2\sqrt{7} & 0 & -2 & 2-2\sqrt{7} \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$spec(\Gamma_{D_{14}}) = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{51} & 0 & -1 & 3-\sqrt{51} \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix};$$

$$spec(\Gamma_{D_{16}}) = \begin{bmatrix} 3+\sqrt{57} & 0 & -2 & 3-\sqrt{57} \\ 1 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$spec(\Gamma_{D_{20}}) = \begin{bmatrix} 4+4\sqrt{6} & 0 & -2 & 4-4\sqrt{6} \\ 1 & 12 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari percobaan yang dilakukan oleh peneliti, didapatkan beberapa lemma dan teorema diantaranya:

Lemma 1:

Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ adalah graf *non commuting* dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil, maka polinomial karakteristik matriks *adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^n(1+\lambda)^{n-1}\left(-\lambda + (n-1)\lambda + \left(n(n-1)\right)\right)$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1\}$untuk n ganjil. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n} mempunyai himpunan titik $\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Karena n ganjil, maka $sr^i \neq r^i s, i = 1,2,\ldots,n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}. Demikian juga, karena n ganjil, maka $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1,2,\ldots,n-1$, dengan $i \neq j$, yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan menyelesaikan persamaan $det\left(A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right) = 0$

$$det\left(A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I\right) = \begin{array}{c} \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -\lambda & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & -\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

Diperoleh matriks segitiga atas dari $A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda I$ sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \\
\hline
r & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
r^2 & 0 & \lambda & \cdots & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda & 1+\lambda & \cdots & 1+\lambda \\
\vdots & 0 & 0 & \ddots & \lambda & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \lambda & (n-2)-\lambda^2 & (n-2)+\lambda & (n-2)+\lambda & \cdots & (n-2)+\lambda \\
s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & 0 & \cdots & 0 \\
sr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 & \cdots & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1+\lambda & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda-1 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -\lambda+(n-1)\lambda+\big(n(n-1)\big)
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik dari $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda I$ adalah $\det\big(A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda I\big)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^n(1+\lambda)^{n-1}\left(-\lambda+(n-1)\lambda+\big(n(n-1)\big)\right)$$

Teorema 1:

Spektrum $\Gamma_{D_{2n}}$ dengan n ganjil diperoleh:

$$spec\,(\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix} \frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2}-\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari lemma 1, diperoleh bahwa

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^n(1+\lambda)^{n-1}\left(-\lambda+(n-1)\lambda+\big(n(n-1)\big)\right)$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1=\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2},\lambda_2=0,\qquad \lambda_3=-1,$$

$$\lambda_4=\frac{n-1}{2}-\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Karena multiplisitas itu sama dengan basis ruang vektor eigen yang besesuaian dengan λ_i, i = 1, 2, 3, 4 dan basis merupakan baris nol pada matriks, subtitusikan λ_i ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_i I$ dan dengan mereduksi matriks menggunakan meode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris tereduksi. Dengan melihat basis pada matriks tersebut diperoleh:

untuk $\lambda_1=\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_1 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan 1 baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_1=\frac{n-1}{2}+\sqrt{(n-1)n+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ memiliki multiplisitas sebanyak 1. Untuk $\lambda_2=0$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_2 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan $n-2$ baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_2=0$ memiliki multiplisitas sebanyak $n-2$. Untuk $\lambda_3=-1$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_3 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan

$n-1$ baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_3 = -1$ memiliki multiplisitas sebanyak $n-1$. Untuk $\lambda_4 = \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}}) - \lambda_4 I$, diperoleh matriks eselon baris denga 1 baris yang nol. Jadi untuk $\lambda_4 = \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$ memiliki multiplisitas sebanyak 1.

Sehingga diperoleh:

$$spec\,(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lemma 2:

Misalkan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf *non commuting* dari grup dihedralD_{2n} dengan n genap dan $n \geq 6$, maka polinomial karakteristik matriks *adjacency* $A(\Gamma_{D_{2n}})$ adalah:

$$p(\lambda) = (1)(\lambda)^{n-2}(-1)^{\frac{n-2}{2}}(-2\lambda - \lambda^2)^{\frac{n-4}{2}}[(2n-4)\lambda + (n^2-2n)]\left[\frac{1}{2n-4} \cdot \frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\} - \{(n-2)(n+2)\}\lambda - (n-4)\lambda^2 + \lambda^3}{\frac{n}{2} + \lambda}\right]$$

Bukti:

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Diperoleh bahwa $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$untuk n ganjil. Dengan demikian graf *non commuting* D_{2n}mempunyai himpunan titik $\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, sr^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}+1}, \ldots, sr^{n-2}, sr^{n-1}\}$. Jumlah himpunan titiknya adalah $2n-2$ dari grup dihedral D_{2n}. Karena n genap, maka $sr^i \neq r^i s,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$, artinya s dan r^i saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}.Demikian juga, karena n genap, maka $sr^i sr^j \neq sr^j sr^i$, j=1, 2,..., n-1 dan $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dengan $i \neq j$, yang berarti sr^i dan sr^j saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}kecualijika $sr^i sr^j = r^{\frac{n}{2}}$ yang berarti sr^i dan sr^j tidak saling terhubung langsung di graf *non commuting* D_{2n}maka diperoleh matriks keterhubungan titik:

$$A(\Gamma_{D_{2n}}) = \begin{array}{c|ccccccccccccccc|}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
r^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
sr & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\
sr^2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\
sr^{\frac{n}{2}-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\
sr^{\frac{n}{2}} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\
sr^{\frac{n}{2}+1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\
sr^{n-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0
\end{array}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks *adjacency* maka akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tersebut dengan menyelesaikan persamaan $det\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I\right)=0$:

$$det\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I\right)=$$

$$\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
\hline
r & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
r^2 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
s & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
sr & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \ddots & 1 & 1 \\
sr^2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & -\lambda & \ddots & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots \\
sr^{\frac{n}{2}-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & -\lambda & 1 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\
sr^{\frac{n}{2}} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 1 & -\lambda & 1 & \ddots & 1 & 1 \\
sr^{\frac{n}{2}+1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 1 & -\lambda & \ddots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 & \cdots & -\lambda & 1 \\
sr^{n-1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda
\end{array}$$

Diperoleh matriks segitiga atas dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I$ sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccccccccccccc}
 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{\frac{n}{2}-1} & sr^{\frac{n}{2}} & sr^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \\
\hline
r & 1 & 1 & \cdots & 1 & -\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
r^2 & 0 & \lambda & \cdots & \lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda^2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 1+\lambda^2 & 1 & 1+\lambda^2 & \cdots & 1+\lambda^2 & 1+\lambda^2 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \lambda & (n-3)-\lambda^2 & (n-3)+\lambda^2 & (n-3)+\lambda^2 & \cdots & (n-3)+\lambda^2 & (n-3) & (n-3)+\lambda^2 & \cdots & (n-3)+\lambda^2 & (n-3)+\lambda^2 \\
s & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
sr & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 2+\lambda & -\lambda-1 & \ddots & 0 & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & 0 & 2+\lambda & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -\lambda-1 & \vdots \\
sr^{\frac{n}{2}-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2+\lambda & 0 & \ddots & 0 & -\lambda-1 \\
sr^{\frac{n}{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & -2\lambda-\lambda^2 & 2\lambda+\lambda^2 & \ddots & 0 & 0 \\
sr^{\frac{n}{2}+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -2\lambda-\lambda^2 & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
sr^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (2n-4)\lambda+(n^2-2n) & -(n-2)\lambda-\lambda^2 \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2n-4}\cdot\frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\}-\{(n-2)(n+2)\}\lambda-(n-4)\lambda^2+\lambda^3}{\frac{n}{2}+\lambda}
\end{array}$$

Polinomial karakteristik dari $A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I$ adalah $\det\left(A\left(\Gamma_{D_{2n}}\right)-\lambda I\right)$, merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sehingga diperoleh:

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^{n-2}(-1)^{\frac{n-2}{2}}(-2\lambda-\lambda^2)^{\frac{n-4}{2}}[(2n-4)\lambda+(n^2-2n)]\left[\frac{1}{2n-4}\cdot\frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\}-\{(n-2)(n+2)\}\lambda-(n-4)\lambda^2+\lambda^3}{\frac{n}{2}+\lambda}\right]$$

Teorema 2:

Spektrum D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 6$ diperoleh:

$$Specc\ (\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix} \frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{n-2}{2} & \frac{3n-6}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti:

Dari lemma 2, diperoleh bahwa

$$p(\lambda)=(1)(\lambda)^{n-2}(-1)^{\frac{n-2}{2}}(-2\lambda-\lambda^2)^{\frac{n-4}{2}}[(2n-4)\lambda+(n^2-2n)]\left[\frac{1}{2n-4}\cdot\frac{\lambda\{-n(2n^2-4n)\}-\{(n-2)(n+2)\}\lambda-(n-4)\lambda^2+\lambda^3}{\frac{n}{2}+\lambda}\right]$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1=\frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}},\lambda_2=0,\quad \lambda_3=-2,\quad \lambda_4=\frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$$

Selanjutnya akan ditentukan multiplisitas dari setiap nilai eigen. Karena multiplisitas itu sama dengan basis ruang vektor eigen yang besesuaian dengan λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ dan basis merupakan baris nol pada matriks, subtitusikan λ_i ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_i I$ dan dengan mereduksi matriks menggunakan meode *Gauss Jordan* akan diperoleh matriks eselon baris kita tereduksi. Dengan melihat basis pada matriks tereduksi tersebut diperoleh:

untuk $\lambda_1=\frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_1 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan 1 baris nol. Jadi untuk $\lambda_1=\frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ memiliki multiplisitas sebanyak 1. Untuk $\lambda_2=0$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_2 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan $\frac{n-2}{2}$baris nol. Jadi untuk $\lambda_2=0$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{n-2}{2}$. Untuk $\lambda_3=-2$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_3 I$, diperoleh matriks eselon baris dengan $\frac{3n-6}{2}$baris nol. Jadi untuk $\lambda_3=-2$ memiliki multiplisitas sebanyak $\frac{3n-6}{2}$.

Untuk $\lambda_4=\frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ setelah dieliminasi ke $A(\Gamma_{D_{2n}})-\lambda_4 I$, kita temukan diperoleh matriks eselon baris denga 1 baris nol. Jadi untuk $\lambda_4=\frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}$ memiliki multiplisitas sebanyak 1.

Sehingga diperoleh:

$$Specc\,(\Gamma_{D_{2n}})=\begin{bmatrix}\frac{n-2}{2}+\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2}-\sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}}\\ 1 & \frac{n-2}{2} & \frac{3n-6}{2} & 1\end{bmatrix}$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa spektrum *Adjacency* graf *non commuting* pada grup dihedral (D_{2n}) dengan n adalahbilangan asli ganjil diperoleh spektrum *Adjacency* nya:

$$specc(\Gamma_{D_{4n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{2} + \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} & 0 & -1 & \frac{n-1}{2} - \sqrt{(n-1)n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \\ 1 & n-2 & n-1 & 1 \end{bmatrix} \forall n \geq 3 \text{ danganjil}$$

$$Spec(\Gamma_{D_{4n}}) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} + \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} & 0 & -2 & \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{5n^2-12n+4}{4}} \\ 1 & \frac{n-2}{2} & \frac{3n-6}{2} & 1 \end{bmatrix} \forall n \geq 6 \text{ dangenap}$$

Berbagai macam spektrum dapat diperoleh dari suatu matriks, sehingga disarankan bagi pembaca untuk mencari rumus spektrum yang lain dari grup dihedral (D_{2n}).

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. 2006. Non-commuting Graph of a Group. *Journal Of Algebra*, vol 298 pp: 468-492.

Abdussakir, Ikawati, DSE, and Sari, FKN.. 2012. Spektrum Adjacensy, Spektrum Laplace, Spektrum Signless-Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipatisi Komplit. Malang: UIN Maliki Malang

Ayyaswamy, S.K. and Balachandran, S.. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, vol 4 pp:250-252.

Biggs, Norman. 1974. *Algebraic Graph Theory*. Cambride: Cambride University Press.

Biyikoglu, T., Leydold, J., & Stadler, P. F. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. Berlin: Springer.

Chartrand, G., & Lesniak, L. 1996. *Graph and Digraph Third Edition*. Calfornia: Wadsworth Inc.

Raisinghania, M.D., Aggarwal, R. S.. 1980. *Modern Algebra*. New delhi: S. Chand & Company Ltd.

Yin, S.. 2008. Investigation os Spectrum of the Adjacency and Laplacian Matrixx of Graph G_l. WSEAS TRANSACTION on SYSTEM, vol 7 pp: 362-372.