ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Spektrum Graf Konjugasi dan Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral

Abdussakir
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Jalan Gajayano 50 Malang, telp (0341) 551354, fax (0341) 572533
e-mail: sakir@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Penelitian terkait graf yang diperoleh dari suatu grup menjadi topik yang banyak diteliti seperti graf koset, graf komuting, graf nonkomuting, dan graf konjugasi. Sampai saat ini, penelitian mengenai spektrum graf kojugasi belum dilakukan. Pada penelitian ini diteliti spektrum keterhubungan dan spektrum Laplace graf konjugasi dan komplemen graf konjugasi dari grup dihedral. Berdasarkan penelitian diperoleh spektrum keterhubungan dan spektrum Laplace graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ serta konjektur pola umum spektrum Laplace graf komplemen dari graf konjugasi dari grup dihedral untuk n ganjil dan $n \geq 3$ serta untuk n genap dan $n \geq 6$.

Kata kunci: *spektrum, graf konjugasi,graf komplemen, grup dihedral*

Abstract

Research topics related to graph obtained from a group are subject of much investigation today as coset graph, commuting graph, non commuting graph, and conjugation graph. Until now, research on the spectrum of conjugate graph is not done yet. In this study, we examined the adjacency spectrum and Laplacian spectrum of conjugate graph and its complement of dihedral group. According to this research, we have the adjacency spectrum and Laplacian spectrum of conjugate graph of dihedral group D_{2n} for odd n where $n \geq 3$ and conjectures for the Laplacian spectrum of complement graph of conjugate graph of dihedral group D_{2n} for odd n where $n \geq 3$ and for even n where $n \geq 6$.

***Keywords**: spectrum, conjugate graph, complement of graph, dihedral group.*

1. Pendahuluan

Misalkan G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan (*Adjacency matrix*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G) = [a_{ij}]$, adalah matriks ($p \times p$) dengan $a_{ij} = 1$ jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya [1][2]. Dengan demikian, maka matriks keterhubungan titik graf G adalah matriks simetri dengan entri 0 dan 1 dan bernilai untuk semua entri pada diagonal utamanya.

Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari v_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks *Laplace* [3] dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless Laplace* dari graf G [4].

Pada graf G, lintasan-v_1v_n adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks detour dari G, dinotasikan dengan $DD(G)$ adalah matriks ($p \times p$) sedemikian hingga unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G [5].

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda suatu matriks, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i. Matriks berordo ($2 \times n$) yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan Spec(G) [6][7]. Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum keterhubungan, dari matriks $L(G)$ disebut spektrum *Laplace*, dari matriks $L^+(G)$ disebut spektrum *signless Laplace*, dan dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum detour.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin [7] meneliti spektrum keterhubungan dan spektrum Laplace pada graf G_l yang diperoleh dari graf komplit K_l dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di K_l. Abdussakir [8] meneliti spektrum keterhubungan pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan (P_n). Ayyaswamy & Balachandran [5] meneliti spektrum detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n, n)$, graf korona G dan K_1, graf perkalian Kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan. Abdussakir, dkk [9] meneliti spektrum keterhubungan, *Laplace*, *singless Laplace*, dan detour graf multipartisi komplit.

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup yang anggotanya memenuhi sifat saling konjugasi. Misalkan G grup non komutatif. Unsur g dan h di G dikatakan saling konjugasi jika ada x di G sehingga $g = xhx^{-1}$. Misalkan semua kelas konjugasi di G adalah $[e]$, $[g_1]$, $[g_2]$, …, $[g_n]$. Pada graf konjugasi dari grup G, unsur h akan terhubung langsung ke g_i, jika h anggota $[g_i]$ [10][11]. Dalam penelitian ini, himpunan titik graf konjugasi adalah semua unsur di G tanpa mengurangi zenter G.

Penelitian mengenai graf konjugasi telah dilakukan oleh beberapa peneliti. Erfanian dan Tolue [11] meneliti struktur graf konjugasi dari grup berhingga. Pada penelitian ini, akan dikaji spektrum dari graf konjugasi dan graf komplemen graf konjugasi dari grup dehidral (D_{2n}).

2. Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Spektrum diperoleh dengan mengkaji beberapa kasus pada grup dihedral. Graf konjugasi dan komplemen graf konjugasi dari grup dihedral D_6, D_8, ..., D_{16} dinyatakan ke dalam bentuk matriks, ditentukan spektrumnya, dan dianalisis pola yang terdapat pada spektrum yang diperoleh. Pola umum selanjutnya dinyatakan sebagai teorema yang dilengkapi dengan bukti formalnya.

3. Hasil dan Analisis

Berikut disajikan hasil penelitian ini.

Teorema 1

Polinomial karakteristik matriks keterhubungan graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$P(\lambda) = -\lambda(1+\lambda)^{\frac{3n-1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}\big((n-1)-\lambda\big).$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ dengan n ganjil. Maka diperoleh klas konjugasi $[1] = \{1\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, ..., $[r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n-1}{2}+1}\}$, dan $[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$. Masing-masing klas konjugasi akan membentuk graf komplit di graf konjugasi $G(D_{2n})$. Maka akan diperoleh matriks keterhubungan graf konjugasi dari grup D_{2n}, untuk n ganjil sebagai berikut

$$A(G(D_{2n})) = \begin{matrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan eliminasi Gaus-Jordan pada $A(G(D_{2n})) - \lambda I$ maka diperoleh polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = -\lambda(1+\lambda)^{\frac{3n-1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}\big((n-1)-\lambda\big).$$

Teorema 2

Spektrum keterhubungan graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_A(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n-1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{3(n-1)}{2} \end{bmatrix}.$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh nilai eigen matriks keterhubungan graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$\lambda_1 = n-1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1$$

dan diperoleh multiplisitas untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \frac{n-1}{2}, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = \frac{3(n-1)}{2}$$

Dengan demikian, maka diperoleh sepktrum keterhubungan titik sebagai berikut

$$spec_A(G(D_{2n})) = \begin{bmatrix} n-1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{3(n-1)}{2} \end{bmatrix}$$

Teorema 3

Polinomial karakteristik matriks *Laplace* pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+3}{2}}(2-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n)^{(n-1)}$$

Bukti

Sesuai Teorema 1, maka matriks keterhubungan graf konjugasi dari grup dihedral adalah

$$A(G(D_{2n})) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat untuk graf konjugasi ini adalah

$$D(G(D_{2n})) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Maka matriks *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n}adalah

$$L(D_{2n}) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & n-1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & n-1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks $(L(G(D_{2n})) - \lambda I)$ menjadi matriks segitiga atas diperoleh

$$\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & (1-\lambda)^{\frac{n-1}{2}} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & ((n-1)-\lambda) & -1 & -1 & \dots & -1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \left(-\frac{\lambda^2-(2n-2)\lambda+(n^2-2n)}{\lambda-(1-n)}\right) & 1 & \dots & \left(-\frac{(\lambda-n)}{\lambda-(1-n)}\right) \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{(\lambda-n)\lambda}{\lambda-1}\right)
\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari $L(D_{2n})-\lambda I$ adalah $det(L(D_{2n})-\lambda I)$ yang merupakan hasil perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda)=\lambda^{\frac{n+3}{2}}(2-\lambda)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-n)^{(n-1)}$$

Teorema 4

Spektrum *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_L(G(D_{2n}))=\begin{bmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 3 maka diperoleh nilai eigen matriks *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$\lambda_1=n, \lambda_2=2, \lambda_3=0$$

dan diperoleh multiplisitas untuk masing-masing nilai eigen tersebut yaitu

$$m(\lambda_1)=n-1, m(\lambda_2)=\frac{n-1}{2}, m(\lambda_3)=\frac{n+3}{2}.$$

Dengan demikian, maka diperoleh

$$spec_L(G(D_{2n}))=\begin{bmatrix} n & 2 & 0 \\ n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{bmatrix}$$

Dari pengamatan pada beberapa kasus spektrum Laplace komplemen graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} diperoleh data sebagai berikut

Tabel 1 Data spektrum Laplace graf komplemen konjugasi graf konjugasi grup dihedral

Grup Dihedral	Spektrum Laplace
$n=3, (D_6)$	$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
$n=4, (D_8)$	$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
$n=5, (D_{10})$	$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
$n=6, (D_{12})$	$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 9 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
$n=7, (D_{14})$	$\begin{bmatrix} 14 & 12 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$
$n=8, (D_{16})$	$\begin{bmatrix} 16 & 14 & 12 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Tabel 1 maka diperoleh konjektur berikut

Konjektur 1

Spektrum *Laplace* graf komplemen dari graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 3$ adalah

$$spec_L\left(\overline{G(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix} 2n & 2n-2 & n & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & n-1 & 1 \end{bmatrix}$$

Konjektur 2

Spektrum *Laplace* graf komplemen dari graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk *n* genap dan *n* ≥ 6 adalah

$$spec_L\left(G(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 2n & 2n-2 & 3n & 0 \\ \frac{n+4}{2} & \frac{n-2}{2} & \frac{}{2} & \\ & & n-2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Penutup

Dari pembahasan maka dalam penelitian ini ditemukan pola umum spektrum keterhubungan dan spektrum *Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk *n* ganjil dan *n* ≥ 3. Spektrum Laplace untuk graf komplemen dari graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} belum dilengkapi dengan bukti sehingga membuka peluang untuk penelitian lebih lanjut. Penelitian lanjutan juga dapat dilakukan pada spektrum signless Laplace dan spektrum detour graf konjugasi dan komplemen dari graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n}.

Rujukan

[1] Chartrand G, Lesniak L, Zhang P. Graphs and digraphs. 6th ed. Florida: Chapman and Hall; 2015.
[2] Bondy JA, Murty USR. Graph theory with applications. North-Holland. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc; 1976.
[3] Mohar B. Laplace eigenvalues of graphs-a survey. Discrete Math. 1992;109(1–3):171–83.
[4] Brouwer AE, Haemers WH. Spectra of graphs: Monograph [Internet]. New York: Springer; 2011. Available from: papers2://publication/uuid/398A68EE-E13F-499A-A05F-3E97978BD566
[5] Ayyaswamy SK, Balachandran S. On detour spectra of some graphs. Int J Math Comput Phys Electr Comput Eng. 2010;4(7):1038–40.
[6] Biggs N. Algebraic graph theory [Internet]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press; 1993. Available from: https://superoles.files.wordpress.com/2015/09/n-biggs-algebraic-graph-theory-1993
[7] Yin S. Investigation on spectrum of the adjacency matrix and Laplacian matrix of graph Gl. WSEAS Trans Syst. 2008;7(4):362–72.
[8] Abdussakir. Menentukan spektrum suatu graf berbantuan matlab [Internet]. Malang; 2009. Available from: http://repository.uin-malang.ac.id/1755/
[9] Abdussakir, Intifada A, Arifandi MZ. Spektrum graf commuting suatu grup [Internet]. Malang; 2013. Available from: http://repository.uin-malang.ac.id/1761/
[10] Kandasamy WBV, Smarandache F. Groups as graphs [Internet]. Judetul Olt, Romania: Editura CuArt; 2009. 168 p. Available from: http://arxiv.org/abs/0906.5144
[11] Erfanian A, Tolue B. Conjugate graphs of finite groups. Discret Math Algorithms Appl [Internet]. 2012;4(2):1–8. Available from: http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S1793830912500358