

**LAPORAN PENELITIAN KOMPETITIF
TAHUN ANGGARAN 2017**

**ANALISIS DINAMIK MODEL FITZHUGH-NAGUMO PADA PENJALARAN IMPULS
SEL SARAF MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LIENARD**

| | | |
|-------------------|---|---|
| Nomor DIPA | : | DIPA BLU: DIPA-025.04.2.423812/2016 |
| Tanggal | : | 7 Desember 2017 |
| Satker | : | (423812) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang |
| Kode Kegiatan | : | (2132) Peningkatan Akses, Mutu, Kesejahteraan dan Subsidi Pendidikan Tinggi Islam |
| Kode Sub Kegiatan | : | (008) Penelitian Bermutu |
| Kegiatan | : | (004) Dukungan Operasional Penyelenggaraan Pendidikan |
| | | |

OLEH

Dr. Usman Pagalay, M. Si. (Ketua Tim)
Mukhammad Fahmi (Anggota)



**KEMENTERIAN AGAMA
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2017**

ABSTRAK

Pagalay, Usman. 2017. **Analisis Dinamik Model Fitzhugh-Nagumo pada Penjalaran Impuls Sel Saraf Menggunakan Transformasi Lienard**. Penelitian Kompetitif Kolektif (Riset Kolaboratif). Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Anggota: (1) Mukhammad Fahmi.

Model Fitzhugh-Nagumo merupakan persamaan diferensial biasa yang menggambarkan rangsangan dan pemulihan beda potensial pada jalannya impuls sel saraf. Berdasarkan suatu aproksimasi, Fitzhugh membuat persamaan yang berasal dari persamaan van der Pol. Persamaan van der Pol merupakan persamaan diferensial biasa homogen nonlinier orde dua. Dalam penelitian ini digunakan metode transformasi Lienard untuk mengubah persamaan van der Pol menjadi sistem dua dimensi persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu, sehingga didapatkan model BVP (Bonhoeffer van der Pol). Fitzhugh menambahkan ekstra kuantitas pada model BVP, sehingga didapatkan model BVP-FN (Bonhoeffer van der Pol Fitzhugh-Nagumo). Dalam penelitian ini penulis melakukan linierisasi pada model BVP-FN dengan menggunakan ekspansi Taylor dan didapatkan *fixed point* dan model linier dari BVP-FN. Kemudian penulis melakukan simulasi numerik dan analisis bidang fase dari model BVP-FN. Penulis menggunakan parameter tetap sesuai yang ada di dalam jurnal, yaitu $a = 0.7$, $b = 0.8$, dan $c = 3$, sementara yang divariasikan adalah besarnya arus eksternal (I) yang diberikan. Analisis bidang fase telah berhasil digunakan untuk melihat visualisasi model BVP-FN ketika terjadi perubahan rangsangan atau saat nilai I berubah-ubah. Analisis bidang fase mampu mendeskripsikan antara rangsangan dan tanggapan neuron. Analisis bidang fase juga telah berhasil menyajikan visualisasi saat terjadi potensial aksi di dalam neuron ketika tubuh manusia menerima suatu rangsangan. Berdasarkan simulasi numerik dan juga analisis bidang fase model BVP-FN disimpulkan bahwa perilaku dinamika neuron menjadi tidak stabil ketika arus eksternal (I) berada pada interval $-1.4 < I < -0.4$. Sementara pada interval $I \geq -0.3$ dan $I \leq -1.5$ grafik stabil dan menuju ke titik ekuilibrium.

Kata kunci: Transformasi Lienard, Model Fitzhugh-Nagumo, Model BVP-FN (Bonhoeffer van der Pol Fitzhugh-Nagumo), Analisis Dinamik, Penjalaran Impuls Sel Saraf, Potensial Membran.

ABSTRACT

Pagalay, Usman. 2017. **Dynamical Analysis of the Fitzhugh-Nagumo Model on the Spreading of Neuron Impulse Using Lienard Transformation.** Collective Competitive Research (Collaborative Research). Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Members: (1) Mukhammad Fahmi.

The Fitzhugh-Nagumo model is an ordinary differential equation that illustrates the stimulation and recovery of a potential membrane on the spreading of neuron impulse. Based on an approximation, Fitzhugh created equations derived from van der Pol equations. The van der Pol equation is an ordinary nonlinear homogenous differential equation of second order. In this research, the authors use Lienard transformation method to convert van der Pol equation into two-dimensional systems of ordinary nonlinear differential equation, then obtained BVP (Bonhoeffer van der Pol) model. Fitzhugh added an extra quantity to the BVP model, so we got the BVP-FN (Bonhoeffer van der Pol Fitzhugh-Nagumo) model. In this research, the authors do the linearization on the BVP-FN model by using Taylor expansion then obtained linear model of BVP-FN. Then the authors performs numerical simulation and phase planes analysis of the BVP-FN model. The authors use fixed parameters according to the journals, i.e. $a = 0.7$, $b = 0.8$, and $c = 3$, while the variation from the magnitude of the external current (I) is provided. Phase planes analysis has been successfully used to visualize the BVP-FN model when there is a change in stimulus or when the value of I is fickle. Phase planes analysis is able to describe the stimulus and neuron responses. Phase planes analysis has also successfully presented the visualization of potential action events within the neurons when the human body receives a stimulus. Based on the numerical simulation and also the phase planes analysis of the BVP-FN model, we can conclude that the dynamics behavior of the neuron becomes unstable when the external current (I) is at the interval of $-1.4 < I < -0.4$. While at the interval $I \geq -0.3$ and $I \leq -1.5$ the graph is stable and go in the direction of the equilibrium point.

Keywords: Lienard Transformation Method, Fitzhugh-Nagumo Model, BVP-FN (Bonhoeffer van der Pol Fitzhugh-Nagumo) Model, Dynamical Analysis, Neuron Impulse Distribution, Membrane Potential.

DAFTAR ISI

| | |
|--|------------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| ABSTRAK | ii |
| ABSTRACT | iii |
| DAFTAR ISI..... | iv |
| DAFTAR GAMBAR..... | vi |
| BAB I PENDAHULUAN..... | 1 |
| 1.1 Latar Belakang..... | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah..... | 4 |
| 1.3 Tujuan Penelitian | 4 |
| 1.4 Batasan Masalah | 4 |
| 1.5 Manfaat Penelitian | 5 |
| BAB II STUDI PUSTAKA DAN ROADMAP | 6 |
| 2.1 Kajian Riset Sebelumnya yang Berkaitan (<i>State of the Art</i>)..... | 6 |
| 2.2 Roadmap Peneliti..... | 7 |
| 2.3 Sistem Persamaan Diferensial Orda Pertama | 7 |
| 2.4 Titik Kritis (Critical Point) | 8 |
| 2.5 Konstruksi Matrik Jacobi..... | 8 |
| 2.6 Vektor Eigen dan Nilai Eigen..... | 8 |
| 2.7 Orbit Kestabilan..... | 8 |
| 2.8 Bifurkasi Hopf | 9 |
| 2.9 Sistem Saraf Manusia | 10 |
| 2.10 Model FitzHugh-Nagumo..... | 11 |
| 2.11 Metode Lienard..... | 12 |
| 2.12 Pendekatan Geometri pada Persamaan Diferensial | 14 |
| BAB III METODE PENELITIAN | 16 |
| 3.1 Pendekatan Penelitian | 16 |
| 3.2 Metode Analisis | 16 |
| 3.3 Diagram Alir Penelitian | 17 |
| BAB IV PEMBAHASAN..... | 18 |
| 4.1 Proses Transformasi Lienard Model BVP-Fitzhugh Nagumo | 18 |
| 4.2 Identifikasi Model BVP Fitzhugh-Nagumo (Hasil Transformasi Lienard) | 21 |
| 4.3 Linearisasi Model BVP Fitzhugh-Nagumo | 22 |
| 4.4 Simulasi Numerik dengan Menggunakan Metode Euler..... | 31 |
| 4.5 Analisis Phase Plane Model Linear BVP-FN..... | 33 |
| 4.6 Analisis Bidang Fase Model BVP-FN..... | 36 |

| | |
|-----------------------------|-----------|
| BAB V PENUTUP..... | 43 |
| 5.1 Kesimpulan..... | 43 |
| 5.2 Saran | 43 |
| DAFTAR PUSTAKA | 44 |
| LAMPIRAN-LAMPIRAN | |

DAFTAR GAMBAR

| | |
|--|----|
| Gambar 2.1. Orbit kestabilan d0069 sekitar titik kritis; (a) spiral stabil, (b) spiral tak stabil, (c) titik <i>saddle</i> , (d) center, (e) titik stabil, dan (f) titik tak stabil (Hirsch MW <i>et al</i> 2004). | 9 |
| Gambar 2.2. Bifurkasi pada persamaan van der Pol ketika parameter μ divariasikan (Hirsch MW <i>et al</i> 2004) | 10 |
| Gambar 2.3. Neuron dan Sinaps (sumber: http://en.wikipedia.org/wiki/Neuron) | 11 |
| Gambar 4.1. Plot v non-linear dan v_1 linear | 31 |
| Gambar 4.2. Plot r non-linear dan r_1 linear | 31 |
| Gambar 4.3. Plot gabungan v non-linear, v_1 linear, r non-linear, dan r_1 linear... | 32 |
| Gambar 4.4. Bidang fase model linier BVP-FN | 31 |
| Gambar 4.5. PPlane8 Equilibrium point data..... | 33 |
| Gambar 4.6. PPlane8 Keyboard Input | 34 |
| Gambar 4.7. Lintasan Phase Plane BVP-FN saat kondisi awal $v_0 = 0.5$ dan $r_0 = -1$ | 34 |
| Gambar 4.8. Plot v_1 linear dan r_1 linear | 35 |
| Gambar 4.9. Plot v_1 linear dan r_1 linear | 35 |
| Gambar 4.10. Plot gabungan v non-linear, v_1 linear, r non-linear, dan r_1 linear. | 35 |
| Gambar 4.11. Program pplane8 untuk Model BVP-Fitzhugh Nagumo..... | 36 |
| Gambar 4.12. Hasil Bidang Fase Model BVP-Fitzhugh Nagumo | 36 |
| Gambar 4.13. v -nullcline berwarna ungu dan r -nullcline berwarna kuning | 37 |
| Gambar 4.14. Lintasan Bidang Fase BVP-FN saat kondisi awal $v_0 = 0.5$ dan $r_0 = -1$ | 37 |
| Gambar 4.15. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t saat kondisi awal $v_0 = 0.5$ dan $r_0 = -1$ | 37 |
| Gambar 4.16. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t pada interval $t = 0 - 50$ | 38 |
| Gambar 4.17. Titik kesetimbangan (equilibrium) Model BVP-FN saat $I = -0.338$ | 38 |
| Gambar 4.18. Lintasan Bidang Fase saat diberikan kondisi awal $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 39 |
| Gambar 4.19. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 39 |
| Gambar 4.20. Lintasan Bidang Fase saat kondisi awal $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 40 |
| Gambar 4.21. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 40 |
| Gambar 4.22. Lintasan Bidang Fase saat kondisi awal $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 41 |
| Gambar 4.23. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 41 |
| Gambar 4.24. Lintasan Bidang Fase saat kondisi awal $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 42 |
| Gambar 4.25. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v_0 = 1.1994$, $r_0 = -0.62426$ | 42 |

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan khususnya di bidang matematika turut memberikan peranan penting dalam menggambarkan fenomena model dan sistem yang terbentang di alam semesta raya. Dalam perjalanannya, ilmu matematika tidak bisa terlepas dengan konsep Islam dalam Al-Qur'an yang kebenarannya tidak diragukan lagi. Allah telah menjelaskan di surat al-Anbiyaa' ayat 33, bahwa Allah Swt. telah menciptakan sistem yang sangat teratur di alam raya ini.

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ

Artinya: "Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan, masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya."

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Seiring dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematika (Yuanita, 2009: 4).

Salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya adalah pemodelan matematika. Penggunaan model matematika telah banyak membantu menyelesaikan masalah-masalah di berbagai bidang. Karenanya, diharapkan akan didapat solusi akhir yang tepat, valid, dan diterima secara ilmiah oleh dunia ilmu pengetahuan.

Dalam penelitian ini, akan dibahas tentang analisis dinamik model Fitzhugh-Nagumo pada penjalaran impuls sel saraf menggunakan transformasi Lienard. Model ini digambarkan dalam suatu sistem persamaan matematika. Dengan adanya model ini, dapat digambarkan suatu fenomena sehingga menjadi lebih jelas dalam memahaminya.

Allah Swt. menciptakan sistem tak bercacat untuk bekerja dengan cara yang sangat rapi dan independen. Sama seperti segala gerak propagasi atau penjalaran impuls sel saraf di tubuh manusia juga menjadi bagian elemen kehidupan yang menarik untuk dipelajari. Allah Swt. telah menjelaskan tentang jaringan saraf manusia di dalam al-Qur'an surat al-Infithaar ayat 6-8, yaitu:

يَأْتِيهَا الْإِنْسَانُ مَا غَرَّكَ بِرَبِّكَ الْكَرِيمِ ﴿٦﴾ الَّذِي خَلَقَكَ فَسَوَّاكَ
فَعَدَلَكَ ﴿٧﴾ فِي أَيِّ صُورَةٍ مَّا شَاءَ رَكَّبَكَ ﴿٨﴾

Artinya: "Hai manusia, apakah yang telah memperdayakan kamu (berbuat durhaka) terhadap Tuhanmu yang Maha Pemurah. Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh) mu seimbang. Dalam bentuk apa saja yang Dia kehendaki, Dia menyusun tubuhmu.

Sistem saraf merupakan salah satu sistem koordinasi yang berfungsi untuk menyampaikan rangsangan yang dideteksi dan direspon oleh tubuh. Sistem saraf memungkinkan makhluk hidup tanggap dengan cepat terhadap perubahan-perubahan yang terjadi di lingkungan luar maupun dalam. Sistem saraf terdiri atas banyak sel saraf, yang biasa disebut dengan *neuron*. Sel saraf berfungsi mengirimkan pesan yang berupa rangsangan atau tanggapan dari badan sel menuju ke dendrit. Setelah menerima berjuta-juta rangsangan informasi yang berasal baik dari luar maupun dari dalam tubuh, rangsangan tersebut diintegrasikan dan kemudian digunakan untuk menentukan respon apa yang akan diberikan oleh tubuh (Oswari, 2008: 2). Penjalaran atau propagasi serta proses integrasi impuls sel saraf merupakan hal yang menarik untuk dipelajari.

Model matematika dinamika impuls pada satu sel saraf pertama kali dinyatakan oleh model Hodgkin-Huxley dan model FitzHugh-Nagumo (FitzHugh, 1961: 445). Model Hodgkin-Huxley berbentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier dengan empat variabel yang menggambarkan dinamika dari sel saraf, sedangkan model FitzHugh-Nagumo mempunyai bentuk yang lebih sederhana, yaitu dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa dengan dua variabel yang otonom (*autonomous*) (Yuanita, 2009: 12). Berdasarkan suatu aproksimasi, FitzHugh membuat persamaan yang berasal dari persamaan umum

osilasi teredam, yaitu menggunakan persamaan van der Pol yang mengubah konstanta *damping* dengan fungsi kuadrat.

Penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Subiyanto, mahasiswa jurusan Fisika IPB pada tahun 2011. Di dalam penelitiannya yang berjudul, "*simulasi propagasi impuls pada sel saraf terkopel menggunakan model Fitzhugh-Nagumo*" menghasilkan kesimpulan bahwa hasil simulasi sel saraf terkopel ini menunjukkan peningkatan arus minimal agar bisa merespon impuls tersebut. Peningkatan arus ini sekitar $0,06 \mu A$ setiap penambahan satu sel saraf. Dengan menganggap bahwa jumlah sel saraf dalam tubuh yang berperan dalam penghantaran impuls itu sekitar satu juta sel saraf maka dapat diprediksi arus minimal agar impuls dapat direspon oleh tubuh sekitar $0,06 A$, sedangkan arus yang kurang dari itu tidak akan mendapat respon dari tubuh.

Kemudian Juhari (2013) dalam penelitiannya yang berjudul, "*analisis model Hodgkin-Huxley dan model Fitzhugh-Nagumo pada sistem dinamika karakteristik distribusi potensial jantung*" membuat aproksimasi model secara umum persamaan model distribusi potensial jantung yang dapat digunakan dalam mengembangkan dunia medis dan kesehatan.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian dengan melakukan proses transformasi Lienard untuk mendapatkan sistem persamaan diferensial dua variabel model BVP Fitzhugh-Nagumo serta melakukan analisis dinamik. Penulis mengangkat penelitian ini dengan judul **“analisis dinamik model Fitzhugh-Nagumo pada penjalaran impuls sel saraf menggunakan transformasi Lienard”**. Pembahasan mengenai hal tersebut sangatlah penting sebagai pengembangan dalam dunia bioelektrik, fisika medis, dan kesehatan, khususnya di bidang *neurophysiology*. Sehingga target luaran yang diharapkan dari penelitian ini adalah dapat memberikan gambaran bentuk, pola, dan model dari perilaku propagasi impuls sel saraf yang memberikan hasil lebih mendekati kenyataan sehingga dapat berkontribusi dalam ilmu pengetahuan, khususnya di bidang bioelektrik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan permasalahan dalam penelitian ini yaitu bagaimana analisis dinamik model Fitzhugh-Nagumo pada penjalaran impuls sel saraf menggunakan transformasi Lienard?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah untuk mengetahui dinamika model Fitzhugh-Nagumo pada penjalaran impuls sel saraf menggunakan transformasi Lienard.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis membatasi masalah yang diteliti agar prediksi yang diperoleh tidak menjadi luas. Persamaan yang akan dikaji oleh penulis adalah model Fitzhugh-Nagumo yang telah ditransformasi menggunakan metode Lienard oleh penulis sehingga diperoleh model BVP-FN (Bonhoeffer-van der Pol FitzHugh-Nagumo), sebagai berikut:

$$\frac{dv(t)}{dt} = c \left(v(t) - \frac{1}{3}(v(t))^3 + r(t) + I \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{c} (v(t) - a + br(t)) \quad (1.2)$$

Dengan $\frac{dv(t)}{dt}$ adalah perubahan potensial membran akson pada neuron saat diberi suatu stimulus terhadap waktu t sehingga menyebabkan potensial aksi. Variabel bergantung waktu $v(t)$ menggambarkan rangsangan pada sistem neuron yang berperan sebagai tegangan atau potensial membran. $\frac{dr(t)}{dt}$ adalah perubahan potensial membran akson pada neuron ketika kembali (*recovery*) ke keadaan awal (istirahat) terhadap waktu t setelah mengalami potensial aksi. Variabel $r(t)$ menggambarkan kombinasi gaya untuk kembali pada keadaan di mana membran akson istirahat. a, b, c , dan I adalah suatu parameter dari model. I adalah besarnya arus listrik sebagai stimulus yang diberikan untuk membuat arus input (eksitasi). a adalah nilai arus ion Na (Natrium), b adalah nilai arus ion K (Kalium), sedangkan c adalah nilai arus eksternal yang masuk ke dalam membran untuk

menentukan seberapa cepat perubahan $v(t)$ dibandingkan dengan $r(t)$. Dengan batasan parameternya adalah $1 - \frac{2b}{3} < a < 1, 0 < b < 1$, dan $b < c^2$.

Analisis dinamik yang dimaksudkan adalah melakukan transformasi persamaan van der Pol menggunakan metode Lienard, mengidentifikasi model BVP Fitzhugh-Nagumo, melakukan linierisasi model dari hasil transformasi Lienard, mencari titik tetap, mengonstruksi matriks jacobobi, dan mendapatkan solusi dengan Matlab, melakukan simulasi numerik metode Euler dengan bantuan Matlab, melakukan analisis phase plane model linier BVP-FN dengan Matlab dan Maple, dan melakukan analisis bidang fase model BVP-FN dan menginterpretasi perilaku dari grafik.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari pembahasan dalam penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi penulis, untuk memperdalam pengetahuan analisis dinamik dari model persamaan diferensial dan aplikasinya pada bidang bioelektrik.
2. Bagi pembaca, sebagai tambahan wawasan dan informasi mengenai analisis dinamik Model Fitzhugh-Nagumo penjalaran impuls sel saraf menggunakan transformasi Lienard yang dapat digunakan untuk mengembangkan dunia medis dan kesehatan.
3. Bagi lembaga, sebagai bahan informasi tentang pembelajaran mata kuliah biofisika, persamaan diferensial, dan sebagai tambahan bahan kepustakaan.

BAB II

STUDI PUSTAKA DAN ROADMAP

2.1 Kajian Riset Sebelumnya yang Berkaitan (*State of the Art*)

Beberapa penelitian sebelumnya yang terkait dengan penelitian ini khususnya yang berkaitan dengan penggunaan model Fitzhugh-Nagumo dan persamaan-persamaan *Chaotik* yang lain adalah penelitian yang dilakukan oleh oleh Subiyanto (2011) mahasiswa jurusan Fisika IPB, Juhari (2013) dosen UIN Maliki Malang, dan beberapa peneliti lain yang memfokuskan pada model jaringan sel saraf (*neuron*). Menurut Shepardson, penelitian *neuron* sangatlah penting sebagai dasar dalam biologi dan kedokteran, sebab ia memerankan peran utama dalam transmisi informasi dalam organisme hidup. *Neuron* merupakan unit dasar pengelolaan informasi dalam sistem saraf manusia dan semua vertebrata lainnya, dan invertebrata yang kompleks seperti Arthropoda dan cacing. Selain itu, untuk kepentingan ilmu biologi dan kedokteran, jaringan neuron (otak manusia) adalah perangkat komputasi paling canggih yang telah dikenal oleh manusia (Shepardson, 2009).

Dalam penelitian Subiyanto (2011) menghasilkan kesimpulan bahwa hasil simulasi sel saraf terkopel ini menunjukkan peningkatan arus minimal agar bisa merespon impuls tersebut. Peningkatan arus ini sekitar $0,06 \mu A$ setiap penambahan satu sel saraf. Dengan menganggap bahwa jumlah sel saraf dalam tubuh yang berperan dalam penghantaran impuls itu sekitar satu juta sel saraf maka dapat diprediksi arus minimal agar impuls dapat direspon oleh tubuh sekitar $0,06 A$, sedangkan arus yang kurang dari itu tidak akan mendapat respon dari tubuh.

Kemudian Juhari (2013) membuat aproksimasi model secara umum persamaan dari model distribusi potensial jantung yang dapat digunakan dalam mengembangkan dunia medis dan kesehatan. Dalam penelitian tersebut terfokus pada obyek jantung yang diasumsikan banyak memiliki persamaan dengan model Hodgkin-Huxley. Dalam pengembangan selanjutnya penelitian dilakukan dengan melakukan transformasi Lienard untuk mendapatkan sistem persamaan diferensial dua variabel model Fitzhugh-Nagumo serta melakukan analisis dinamik. Pembahasan mengenai hal tersebut sangatlah penting sebagai

pengembangan dalam dunia bioelektrik, fisika medis, dan kesehatan, khususnya di bidang *neurophysiology*. Sehingga target luaran yang diharapkan dari penelitian ini adalah dapat memberikan gambaran bentuk, pola, dan model dari perilaku propagasi impuls sel saraf yang memberikan hasil lebih mendekati kenyataan sehingga dapat berkontribusi dalam ilmu pengetahuan, khususnya di bidang bioelektrik.

2.2 Roadmap Peneliti

Skill dan *background* peneliti adalah pada bidang matematika terapan, *mathematical model*, *mathematical biology*, hingga kedokteran sehingga mudah untuk memahami hal-hal yang berkaitan dengan pemodelan matematika. Kegiatan penelitian yang berhubungan dengan pemodelan matematika dalam dunia medis dan kedokteran telah cukup banyak yang dilakukan oleh pengusul. Di antara yang telah diterbitkan dan dipublish yaitu, *Pemodelan Simulasi pada Interaksi Sistem Imun dengan Mikobakterium Tuberkolosis*, *Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah Dengue Melalui Transmisi Vertikal*, *Diskritisasi Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah dengan Analogi Persamaan Beda*, *Numerical Solution For Immunology Tuberculosis Model Using Runge Kutta Fehlberg And Adams Bashforth Moulton Method*, menyusun buku *Mathematical Modeling* (2009, UIN Press), dan penelitian lain yang mendukung dalam proses penelitian analisis dinamik suatu model matematika.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Orda Pertama

Sistem persamaan diferensial orde pertama interaksi dua persamaan diferensial terkopel (Hirsch MW *et al* 2004) dapat dinyatakan sebagai:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f_1(x(t), y(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= f_2(x(t), y(t)) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

f_1 dan f_2 adalah fungsi kontinu bernilai real dari $x(t)$ dan $y(t)$, dengan laju perubahan $x(t)$ dan $y(t)$ sendiri dan bergantung t di dalamnya. Sistem persamaan diferensial disebut sebagai sistem persamaan diferensial *autonomous*.

2.4 Titik Kritis (Critical Point)

Analisis sistem persamaan diferensial sistem dua persamaan terkopel sering digunakan untuk menentukan solusi yang tidak berubah terhadap waktu (Hirsch MW *et al* 2004). Titik kritis (x^*, y^*) dari sistem dapat diperoleh dengan menentukan

$$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

2.5 Konstruksi Matrik Jacobi

Dengan melakukan pelinieran pada persamaan interaksi dua persamaan terkopel maka diperoleh matriks Jacobi (Hirsch MW *et al* 2004) berikut:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.6 Vektor Eigen dan Nilai Eigen

Diberikan matrik dengan koefisien konstan J berukuran $n \times n$ dan sistem persamaan diferensial homogen berikut:

$$\dot{x} = Jx, \quad x(0) = x_0 \quad (2.4)$$

Suatu vektor tak nol dalam ruang \mathbb{R}^n disebut vektor eigen dari J jika untuk suatu skalar λ berlaku:

$$Jx = \lambda x \quad (2.5)$$

Nilai skalar λ dinamakan nilai eigen dari J . Untuk mencari nilai eigen λ dari matrik J , maka persamaan (2.5) dapat ditulis kembali sebagai:

$$(J - \lambda I)x = 0 \quad (2.6)$$

Dengan I matrik diagonal satuan. Persamaan (2.6) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$p(\lambda) = \det(J - \lambda I) = |J - \lambda I| = 0 \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) disebut persamaan karakteristik dari matrik Jacobi (Hirsch MW *et al* 2004).

2.7 Orbit Kestabilan

Berdasarkan uraian di atas maka kestabilan titik kritis memiliki tiga kondisi (Hirsch MW *et al* 2004), yaitu:

Stabil, jika:

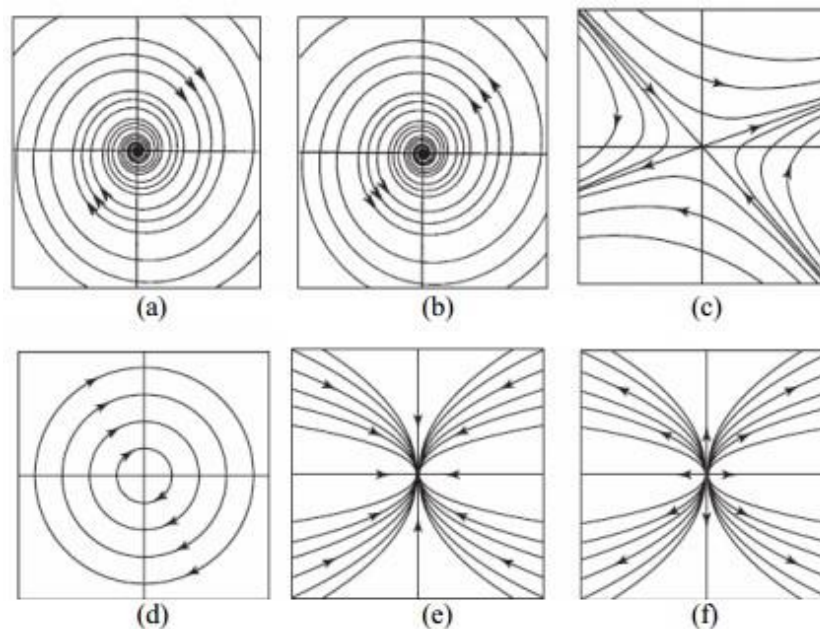
- Setiap nilai eigen yang real adalah negatif.
- Setiap komponen nilai eigen yang kompleks adalah lebih kecil atau sama dengan nol.

Tidak Stabil, jika:

- Setiap nilai eigen yang real adalah positif.
- Setiap komponen nilai eigen yang kompleks adalah lebih besar dari nol.

Saddle, jika:

Perkalian sebarang dua buah nilai eigen yang real adalah negatif. Titik *saddle* ini bersifat tidak stabil.



Gambar 2.1. Orbit kestabilan d0069 sekitar titik kritis; (a) spiral stabil, (b) spiral tak stabil, (c) titik *saddle*, (d) center, (e) titik stabil, dan (f) titik tak stabil (Hirsch MW *et al* 2004).

2.8 Bifurkasi Hopf

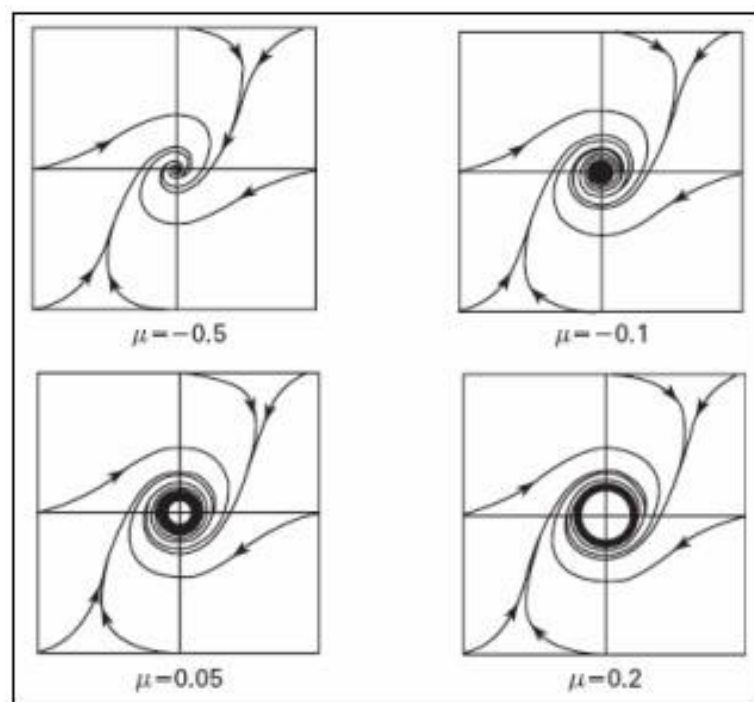
Bifurkasi secara sederhana dapat diartikan sebagai suatu perubahan karakteristik orbit kestabilan di suatu titik kritis yang biasanya ditandai dengan kehadiran suatu *limit cycle*. Sebagai contoh sederhana terjadinya bifurkasi pada persamaan van der Pol berupa persamaan diferensial pada \mathbb{R}^2 (Hirsch MW *et al* 2004).

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^3 - \mu x \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Dengan parameter μ berada pada interval $[-1,1]$. Dengan menggunakan Linierisasi diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4} \right) \quad (2.9)$$

Kemudian dari nilai eigen tersebut dapat diamati sebuah bifurkasi pada titik kritisnya ketika parameter μ divariasikan sebagai berikut:



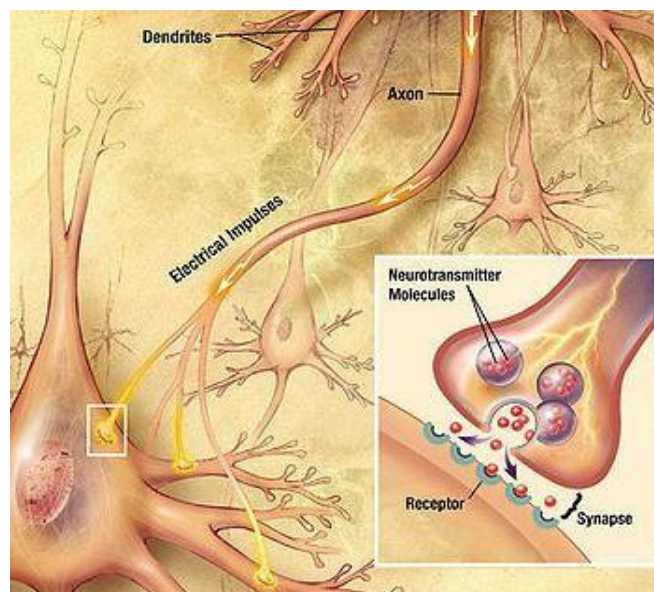
Gambar 2.2. Bifurkasi pada persamaan van der Pol ketika parameter μ divariasikan (Hirsch MW *et al* 2004)

2.9 Sistem Saraf Manusia

Sistem saraf tersusun oleh berjuta-juta sel saraf yang mempunyai bentuk bervariasi. Sistem ini meliputi sistem saraf pusat dan sistem saraf tepi. Dalam kegiatannya, saraf mempunyai hubungan kerja seperti mata rantai (berurutan) antara reseptor dan efektor. Reseptor adalah satu atau sekelompok sel saraf dan sel lainnya yang berfungsi mengenali rangsangan tertentu yang berasal dari luar atau dari dalam tubuh. Efektor adalah sel atau organ yang menghasilkan

tanggapan terhadap rangsangan, sebagai contoh: otot dan kelenjar (Yunita, 2009: 13).

Sistem saraf terdiri dari jutaan sel saraf. Fungsi sel saraf adalah mengirimkan pesan (impuls) yang berupa rangsang atau tanggapan. Setiap sel saraf terdiri dari satu badan sel yang di dalamnya terdapat sitoplasma dan inti sel seperti pada Gambar 2.6. Dari badan sel keluar dua macam serabut saraf, yaitu dendrit dan akson (*neurit*). Setiap sel saraf hanya mempunyai satu akson dan minimal satu dendrit. Kedua serabut saraf ini berisi plasma sel.



Gambar 2.3. Neuron dan Sinaps (sumber: <http://en.wikipedia.org/wiki/Neuron>)

Pada bagian luar akson terdapat lapisan lemak disebut *myelin* yang merupakan kumpulan sel *schwann* yang menempel pada akson. Sel *schwann* adalah sel yang membentuk selubung lemak di seluruh serabut saraf *myelin*. Membran plasma sel *schwann* disebut *neurilemma*. Fungsi *myelin* adalah melindungi dan memberi nutrisi pada akson. Bagian dari akson yang tidak terbungkus *myelin* disebut *nodus ranvier* (Oswari, 2008: 1).

2.10 Model FitzHugh-Nagumo

Richard FitzHugh dan Nagumo membuat suatu model dengan cara menyederhanakan sistem empat variabel model Hodgkin-Huxley tersebut menjadi sistem dua variabel sehingga lebih mudah untuk dianalisa. Sifat model ini mirip dengan model Hodgkin-Huxley secara kualitatif. Model FitzHugh-Nagumo dapat

diaproksimasi secara kualitatif. Bentuk persamaannya adalah sebagai berikut (Nagumo, 1962: 2061):

$$\frac{du(t)}{dt} = -u(t)(u(t) - \theta)(u(t) - 1) - v(t) + \omega \quad (2.10)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \epsilon(u(t) - \gamma v(t)) \quad (2.11)$$

Dalam fisiologi, impuls dapat berupa fungsi bertahap atau arus periodik. Model Fitzhugh-Nagumo dideskripsikan dengan dua variabel bergantung waktu, yaitu $u(t)$ dan $v(t)$. Di mana $u(t)$ menggambarkan rangsangan pada sistem dan diidentifikasi sebagai tegangan (potensial membran pada akson), $v(t)$ adalah variabel *recovery* (kembali ke keadaan awal) yang menggambarkan kombinasi gaya untuk kembali pada keadaan di mana membran akson istirahat, θ adalah lintasan ambang pintu, γ adalah variabel pelangsiran, ω merupakan arus listrik sebagai stimulus untuk membuat eksitasi (arus input), dan ϵ adalah konstanta positif, yang memenuhi,

$$0 < \theta < 1, \quad \epsilon > 0, \quad \gamma > 0 \quad (2.12)$$

Berdasarkan suatu aproksimasi, Fitzhugh membuat persamaan yang berasal dari persamaan umum osilasi teredam, yaitu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.13)$$

dengan k merupakan konstanta redaman. Fitzhugh menggunakan persamaan van der Pol, yaitu mengubah konstanta damping dengan fungsi kuadrat:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.14)$$

dengan c merupakan konstanta positif. Untuk mendapatkan sistem dua variabel dilakukan transformasi dengan metode Lienard, dan didapatkan model BVP-FN sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = c \left[y + x - \frac{1}{3} x^3 + I \right] \quad (2.15)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{(x - a + by)}{c} \quad (2.16)$$

2.11 Metode Lienard

Misal diberikan persamaan diferensial berikut (Minorsky, 1947: 106-107):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega f(x) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (2.17)$$

di mana $f(x)$ adalah fungsi kontinu dan diferensiabel sepanjang fungsi f pada x . Dengan mengambil ωt sebagai variabel independen baru, persamaan (2.17) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.18)$$

Untuk selanjutnya, agar tidak menimbulkan kebingungan, kita dapat menggunakan simbol \ddot{x} dan \dot{x} pada (2.17) sehingga kita menuliskan

$$\ddot{x} + \omega_0 f(x) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.19)$$

dengan $\omega_0 = 1$, untuk mendapatkan satu dimensi homogenitas dari persamaan (2.17). Terlihat bahwa persamaan (2.17) merupakan kasus partikular dari (2.19). Jika $f(x) = 0$ maka pergerakan harmonik menjadi $\ddot{x} + x = 0$. Jika $f(x) = C$, di mana C adalah suatu konstanta kita memiliki pergerakan teredam, yaitu osilator ($|C| < 2$) atau periodik ($|C| > 2$). Persamaan (2.18) dapat diganti dengan sistem berikut ini.

$$\ddot{x} = v \quad (2.20)$$

dan

$$v \frac{dv}{dx} + f(x)v + x = 0 \quad (2.21)$$

Kemudian persamaan (2.21) dapat ditulis

$$\frac{dv}{dx} + f(x) + \frac{x}{v} = 0 \quad (2.22)$$

Misal, diberikan variabel baru, $y = v + F(x)$, di mana $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ adalah fungsi ganjil, sementara $f(x)$ adalah fungsi genap. Sehingga (2.22) dapat diganti dengan

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y - F(x)} = 0 \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) dapat ditulis sebagai

$$dy[y - F(x)] + x dx = 0 \quad (2.24)$$

Sehingga sistem dari persamaan (2.20) dan (2.21) menjadi

$$-\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y - F(x)} = \frac{dx}{v} = dt = \omega_0 dt \quad (2.25)$$

2.12 Pendekatan Geometri pada Persamaan Diferensial

Misal diberikan persamaan diferensial orde dua, yaitu persamaan osilator harmonik sebagai berikut (R. Clark Robinson, 1999: 7),

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0 \quad (2.26)$$

Kita dapat menuliskan kembali persamaan (2.26) sebagai suatu sistem persamaan diferensial yang hanya menyertakan turunan pertamanya dengan cara memisalkan,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Maka persamaan (2.26) menjadi

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + bv(t) + kx(t) = 0$$

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -bv(t) - kx(t)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -b \frac{v(t)}{m} - k \frac{x(t)}{m}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -b \frac{v(t)}{m} - k \frac{x(t)}{m}$$

Sehingga sekarang kita mempunyai sistem diferensial orde satu,

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \quad (2.27)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -k \frac{x(t)}{m} - b \frac{v(t)}{m} \quad (2.28)$$

Jika dibentuk pada notasi matriks menjadi,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Ketika $b = 0$, maka solusi eksplisit dari sistem (2.29) adalah

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.30)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) \quad (2.31)$$

di mana A dan B adalah konstan dan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dengan demikian, persamaan (2.30) dan (2.31) merupakan solusi periodik dengan periode yang sama, yaitu $\frac{2\pi}{\omega}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian yang akan dilakukan menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*) atau deskriptif kuantitatif, yakni melakukan kajian pustaka penelitian untuk memperoleh informasi serta model yang digunakan dalam pembahasan masalah. Penelitian kepustakaan ini dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan, yaitu dengan mempelajari buku teks penunjang, karya ilmiah yang berbentuk jurnal, sumber bacaan, internet, dan referensi lain yang mendukung untuk mempelajari secara mendalam analisis model-model sistem dinamik.

3.2 Metode Analisis

a. Studi Literatur

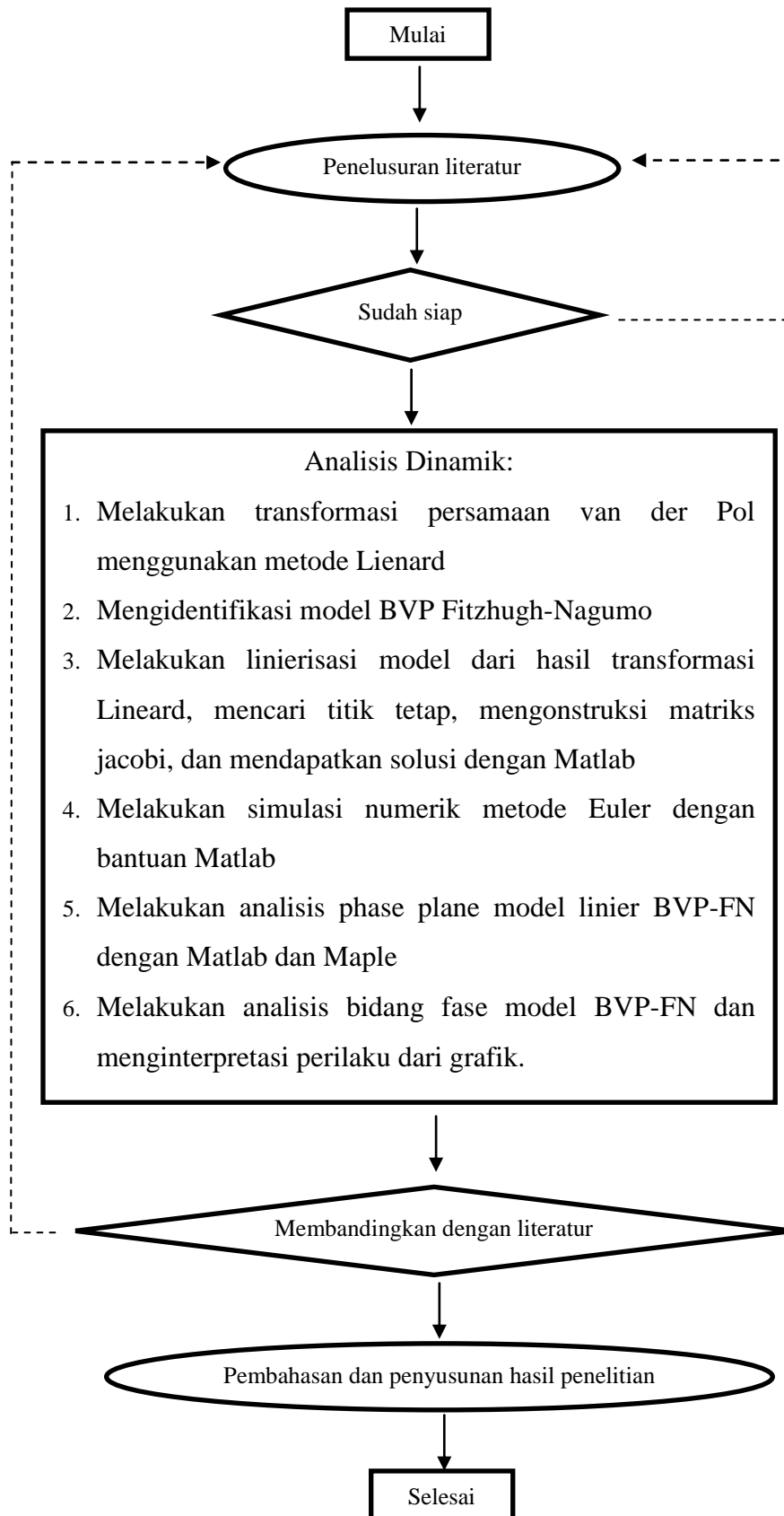
Studi literatur yang akan dilakukan adalah mengenai model Fitzhugh-Nagumo serta program komputer yang berkaitan dalam simulasi hasil persamaan seperti program Maple dan Matlab.

b. Analisis

Analisis yang akan dilakukan dalam penelitian ini mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melakukan transformasi persamaan van der Pol menggunakan metode Lienard
2. Mengidentifikasi model BVP Fitzhugh-Nagumo
3. Melakukan linierisasi model dari hasil transformasi Lienard, mencari titik tetap, mengonstruksi matriks jacobobi, dan mendapatkan solusi dengan Matlab
4. Melakukan simulasi numerik metode Euler dengan bantuan Matlab
5. Melakukan analisis phase plane model linier BVP-FN dengan Matlab dan Maple
6. Melakukan analisis bidang fase model BVP-FN dan menginterpretasi perilaku dari grafik.

3.3 Diagram Alir Penelitian



BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab pembahasan ini akan dipaparkan penjelasan analisis dinamik model BVP - Fitzhugh Nagumo pada penjalaran impuls sel saraf menggunakan transformasi Lienard. Pada sub-bab 2.10 telah dijelaskan tentang model Fitzhugh-Nagumo beserta identifikasi dan interpretasi variabel dan parameter yang digunakan pada model. Kemudian juga telah dilakukan pemaparan aproksimasi model Fitzhugh-Nagumo pada persamaan van der Pol dan mengubah konstanta damping dengan fungsi kuadrat. Pada bab pembahasan ini penulis akan langsung memaparkan penjelasan analisis dinamikanya, mulai dari proses transformasi persamaan van der Pol menggunakan metode Lienard, proses linierisasi model hasil transformasi Lienard, mencari titik kritis, mengonstruksi matriks jacobii, menentukan nilai eigen dan vektor eigen, dan mendapatkan solusi dengan bantuan program Matlab, melakukan simulasi numerik untuk menampilkan perilaku dari setiap variabel bergantung dengan bantuan program Matlab dan Maple, menginterpretasi perilaku grafik, menganalisis titik kesetimbangan dan kestabilan pada model Fitzhugh-Nagumo pada penjalaran impuls sel saraf.

4.1 Proses Transformasi Lienard Model BVP-Fitzhugh Nagumo

Untuk mendapatkan sistem dua variabel dilakukan proses transformasi dengan metode Lienard. Diberikan persamaan van der Pol (Strogatz, 1994: 198 dan 212) sebagai berikut:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \left((x(t))^2 - 1 \right) \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \quad (4.1)$$

Kita dapat menuliskannya kembali sebagai:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} \left((x(t))^2 - 1 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} + c \left(\frac{1}{3} (x(t))^3 - x(t) \right) \right) \quad (4.2)$$

Misal,

$$F(x) = \frac{1}{3} (x(t))^3 - x(t) \quad (4.3)$$

dan

$$w(t) = \frac{dx(t)}{dt} + cF(x) \quad (4.4)$$

Turunkan $F(x)$ terhadap t , kita dapatkan

$$\frac{d}{dt}(F(x)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}(x(t))^3 - x(t)\right) = \left((x(t))^2 - 1\right)\frac{dx(t)}{dt} \quad (4.5)$$

Turunkan w terhadap t , kita dapatkan

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt} + cF(x)\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{d}{dt}F(x) \quad (4.6)$$

Sehingga kita tahu dari persamaan van der Pol pada persamaan (4.1) bahwa,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -c\left((x(t))^2 - 1\right)\frac{dx(t)}{dt} - x(t) \quad (4.7)$$

kita tahu bahwa

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\frac{d}{dt}F(x)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = -c\left((x(t))^2 - 1\right)\frac{dx(t)}{dt} - x(t) + c\left((x(t))^2 - 1\right)\frac{dx(t)}{dt} \quad (4.8)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = -x(t) \quad (4.9)$$

Kemudian kita dapat membuat persamaan van der Pol menjadi sebagai sistem dengan mengubah (4.4) menjadi bentuk:

$$\frac{dx(t)}{dt} = w(t) - cF(x) \quad (4.10)$$

Dan juga menggunakan persamaan (4.9),

$$\frac{dw(t)}{dt} = -x(t) \quad (4.11)$$

Misalkan diberikan variabel baru,

$$y(t) = \frac{w(t)}{c} \quad (4.12)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} w(t) &= y(t)c \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt}c \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt}c = -x(t) \end{aligned}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{c} \quad (4.13)$$

Persamaan (4.10) dapat dituliskan,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= w(t) - cF(x) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= y(t)c - cF(x) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= c(y(t) - F(x)) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= c\left(y(t) - \frac{1}{3}(x(t))^3 + x(t)\right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

dan

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{x(t)}{c} \quad (4.15)$$

Fitzhugh berkata pada papernya pada tahun 1961 halaman tiga bahwa, "BVP (model Bonhoeffer-van der Pol) diperoleh dengan menambahkan parameter input z di dalam tanda kurung pada persamaan (4.14) dan menambahkan ekstra kuantitas $(by(t) - a)$ pada persamaan (4.15). Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = c\left(x(t) - \frac{1}{3}(x(t))^3 + y(t) + z\right) \quad (4.16)$$

dan

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{c}(x(t) - a + by(t)) \quad (4.17)$$

Kemudian Fitzhugh mengganti parameter dan variabel sebagai berikut,

$$\begin{aligned} z &= I, \\ x(t) &= v(t), \end{aligned}$$

dan

$$y(t) = r(t),$$

Sehingga ditetapkan persamaan sebagai berikut. Pada persamaan (4.16),

$$\frac{dx(t)}{dt} = c\left(y(t) - \frac{1}{3}(x(t))^3 + x(t) + z\right)$$

ekuivalen dengan

$$\frac{dv(t)}{dt} = c \left(r(t) - \frac{1}{3}(v(t))^3 + v(t) + I \right)$$

dan pada persamaan (4.17),

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{c}(x(t) - a + by(t))$$

ekuivalen dengan

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{c}(v(t) - a + br(t))$$

Dengan demikian, diperoleh hasil transformasi Lienard model persamaan van der Pol menjadi model persamaan BVP-FN (Bonhoeffer-van der Pol FitzHugh-Nagumo) sebagai berikut,

$$\frac{dv(t)}{dt} = c \left(r(t) - \frac{1}{3}(v(t))^3 + v(t) + I \right) \quad (4.18)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{c}(v(t) - a + br(t)) \quad (4.19)$$

di mana, $1 - \frac{2b}{3} < a < 1$, $0 < b < 1$, dan $b < c^2$. a, b adalah suatu konstanta. Sementara I merupakan parameter intensitas stimulus.

4.2 Identifikasi Model BVP Fitzhugh-Nagumo (Hasil Transformasi Lienard)

Telah dilakukan proses transformasi Lienard model persamaan van der Pol menjadi model persamaan sistem dua variabel BVP-FN (Bonhoeffer-van der Pol FitzHugh-Nagumo), sebagai berikut:

$$\frac{dv(t)}{dt} = c \left(v(t) - \frac{1}{3}(v(t))^3 + r(t) + I \right) \quad (4.20)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{c}(v(t) - a + br(t)) \quad (4.21)$$

Identifikasi variabel dan parameter pada model:

- $\frac{dv(t)}{dt}$ adalah perubahan potensial membran akson pada neuron saat diberi suatu stimulus terhadap waktu t sehingga menyebabkan potensial aksi. Variabel bergantung waktu $v(t)$ menggambarkan rangsangan pada sistem neuron yang berperan sebagai tegangan atau potensial membran.
- $\frac{dr(t)}{dt}$ adalah perubahan potensial membran akson pada neuron ketika kembali (*recovery*) ke keadaan awal (istirahat) terhadap waktu t setelah mengalami

potensial aksi. Variabel $r(t)$ menggambarkan kombinasi gaya untuk kembali pada keadaan di mana membran akson istirahat.

- a, b, c , dan I adalah suatu parameter dari model.
- I adalah besarnya arus listrik sebagai stimulus yang diberikan untuk membuat arus input (eksitasi).
- a adalah nilai arus ion Na (Natrium), b adalah nilai arus ion K (Kalium), sedangkan c adalah nilai arus eksternal yang masuk ke dalam membran untuk menentukan seberapa cepat perubahan $v(t)$ dibandingkan dengan $r(t)$.
- Dengan batasan parameternya adalah $1 - \frac{2b}{3} < a < 1, 0 < b < 1$, dan $b < c^2$.

4.3 Linearisasi Model BVP Fitzhugh-Nagumo

Akan dilakukan proses linearisasi dan representasi solusi menggunakan bidang fase pada model Fitzhugh-Nagumo. Tetapi karena model ini sangat rumit maka linierisasinya hanya terbatas untuk pendekatan pada bilangan riil saja. Penjelasan lebih lanjut adalah sebagai berikut. Andaikan suatu persamaan diferensial yang berbentuk seperti berikut:

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v, r), \quad \frac{dr(t)}{dt} = g(v, r) \quad (4.22)$$

Maka model Model Fitzhugh-Nagumo yang telah diketahui sebelumnya menjadi:

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v, r) = c \left(v(t) - \frac{1}{3} (v(t))^3 + r(t) + I \right) \quad (4.23)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = g(v, r) = -\frac{1}{c} (v(t) - a + br(t)) \quad (4.24)$$

Hal pertama yang harus dilakukan untuk melinierisasikan model ini adalah dengan mencari titik keseimbangan atau perpotongan *nullclines* antara $v(t)$ dan $r(t)$, dengan memberikan nilai awal $\frac{dv(t)}{dt} = f(v, r) = 0$ dan $\frac{dr(t)}{dt} = g(v, r) = 0$, maka:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= c \left(v(t) - \frac{1}{3} (v(t))^3 + r(t) + I \right) \\ 0 &= c \left(v(t) - \frac{1}{3} (v(t))^3 + r(t) + I \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= v(t) - \frac{1}{3}(v(t))^3 + r(t) + I \\
0 &= 3v(t) - (v(t))^3 + 3r(t) + 3I \\
0 &= (v(t))^3 - 3v(t) - 3r(t) - 3I
\end{aligned} \tag{4.25}$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{dr(t)}{dt} &= -\frac{1}{c}(v(t) - a + br(t)) \\
0 &= -\frac{1}{c}(v(t) - a + br(t)) \\
0 &= (v(t) - a + br(t)) \\
0 &= v(t) - a + br(t)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Substitusi dan eliminasi persamaan (4.25) dan (4.26), sehingga

$$\begin{aligned}
v^3(t) - 3v(t) - 3r(t) - 3I &= 0 \times \mathbf{b} \rightarrow bv^3(t) - 3bv(t) - 3br(t) - 3bI = 0 \\
v(t) - a + br(t) &= 0 \times \mathbf{3} \rightarrow \frac{3v(t) - 3a + 3br(t) = 0}{bv^3(t) + (3 - 3b)v(t) - (3a + 3bI) = 0} +
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dengan menggunakan program Maple diperoleh selesaian sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
v &= -1. b \text{RootOf}(b^3 _Z^3 - 3 a b^2 _Z^2 + (3 a^2 b - 3 b + 3) _Z - a^3 + 3 a + 3 i) + a \\
r &= \text{RootOf}(b^3 _Z^3 - 3 a b^2 _Z^2 + (3 a^2 b - 3 b + 3) _Z - a^3 + 3 a + 3 i)
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.27) dalam bentuk umumnya sangat rumit, oleh karena itu digunakan suatu pendekatan metode numerik dengan memisalkan $a = 0.7$, $b = 0.8$, $c = 3$, $I = 0$ (Wallisch P, dkk, 2009: 166), maka persamaan (4.27) menjadi,

$$\begin{aligned}
0.8(v(t))^3 + (3 - 3 \times 0.8)v(t) - (3 \times 0.7 + 3 \times 0.8 \times 0) &= 0 \\
0.8(v(t))^3 + 0.6v(t) - 2.1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dari persamaan (4.28) tersebut dapat dengan mudah dicari solusi titik tetap v_{ss} dengan menggunakan program Maple, sehingga diperoleh tiga akar, yaitu:

$$\begin{aligned}
[v = 1.199408035], [v = -0.5997040176 + 1.352381132 I], \\
[v = -0.5997040176 - 1.352381132 I]
\end{aligned}$$

Karena hanya ada satu solusi v_{ss} yang real dan kedua akar lainnya adalah bilangan kompleks, maka solusi titik tetap yang memuat bilangan kompleks tidak diperhitungkan. Sehingga solusi titik tetap yang dipilih adalah $v_{ss} = 1.1994$. Kemudian substitusikan $v_{ss} = 1.1994$ pada persamaan (4.26),

$$\begin{aligned} v(t) - a + br(t) &= 0 \\ 1.1994 - 0.7 + 0.8r &= 0 \\ r &= -0.62426 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $v_{ss} = 1.1994$ dan $r_{ss} = -0.62426$. Ingat bahwa linierisasi hanya dapat dilakukan dalam interval yang kecil. Dalam hal ini, linierisasi dilakukan di sekitar titik equilibriumnya atau titik tetapnya, yaitu di sekitar v_{ss} dan r_{ss} . Selanjutnya akan dicari persamaan liniernya dengan mengasumsikan bahwa fungsi $f(v, r)$ dan $g(v, r)$ memiliki ekspansi Taylor seperti berikut (Wallisch P, dkk, 2009: 164):

$$f(v, r) = f(v_{ss}, r_{ss}) + \frac{\partial f(v_{ss}, r_{ss})}{\partial v} (v - v_{ss}) + \frac{\partial f(v_{ss}, r_{ss})}{\partial r} (r - r_{ss}) + HOT \quad (4.29)$$

$$g(v, r) = g(v_{ss}, r_{ss}) + \frac{\partial g(v_{ss}, r_{ss})}{\partial v} (v - v_{ss}) + \frac{\partial g(v_{ss}, r_{ss})}{\partial r} (r - r_{ss}) + HOT \quad (4.30)$$

Saat mendekati titik tetap, eror akan mendekati 0 karena $v - v_{ss} \ll 1$ dan $r - r_{ss} \ll 1$, begitu juga $f(v_{ss}, r_{ss}) = g(v_{ss}, r_{ss}) = 0$, jadi:

$$f(v, r) \approx \frac{\partial f(v_{ss}, r_{ss})}{\partial v} (v - v_{ss}) + \frac{\partial f(v_{ss}, r_{ss})}{\partial r} (r - r_{ss}) \quad (4.31)$$

$$g(v, r) \approx \frac{\partial g(v_{ss}, r_{ss})}{\partial v} (v - v_{ss}) + \frac{\partial g(v_{ss}, r_{ss})}{\partial r} (r - r_{ss}) \quad (4.32)$$

Degan melihat kembali persamaan (4.23) dan (4.24) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} f(v, r) &= c \left(v(t) - \frac{1}{3} (v(t))^3 + r(t) + I \right) \\ g(v, r) &= -\frac{1}{c} (v(t) - a + br(t)) \end{aligned}$$

Maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(v, r)}{\partial v} &= -cv^2(t) + c, & \frac{\partial f(v, r)}{\partial r} &= c \\ \frac{\partial g(v, r)}{\partial v} &= -\frac{1}{c}, & \frac{\partial g(v, r)}{\partial r} &= -\frac{b}{c} \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (4.31) dan (4.32) ke dalam persamaan (4.22), diperoleh:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(v - v_{ss})}{dt} = \frac{\partial f(v_{ss}, r_{ss})}{\partial v} (v - v_{ss}) + \frac{\partial f(v_{ss}, r_{ss})}{\partial r} (r - r_{ss})$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d(r - r_{ss})}{dt} = \frac{\partial g(v_{ss}, r_{ss})}{\partial v} (v - v_{ss}) + \frac{\partial g(v_{ss}, r_{ss})}{\partial r} (r - r_{ss})$$

Sehingga,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(v - v_{ss})}{dt} = (-c(v(t))^2 + c)(v - v_{ss}) + (c)(r - r_{ss}) \quad (4.33)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d(r - r_{ss})}{dt} = \left(-\frac{1}{c}\right)(v - v_{ss}) + \left(-\frac{b}{c}\right)(r - r_{ss}) \quad (4.34)$$

Kemudian persamaan (4.33) dan (4.34) dapat direpresentasikan menggunakan matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} (v - v_{ss})' \\ (r - r_{ss})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cv^2 + c & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c} \end{bmatrix} \bigg|_{(v_{ss}, r_{ss})} \begin{bmatrix} (v - v_{ss}) \\ (r - r_{ss}) \end{bmatrix}$$

Substitusikan nilai parameter $a = 0.7$, $b = 0.8$, $c = 3$, $I = 0$ (Wallisch P, dkk, 2009: 166), $v_{ss} = 1.1994$ dan $r_{ss} = -0.62426$ sehingga diperoleh,

$$\begin{bmatrix} (v - v_{ss})' \\ (r - r_{ss})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1.1994)^2 + 3 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{0.8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v - v_{ss}) \\ (r - r_{ss}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (v - v_{ss})' \\ (r - r_{ss})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3157 & 3 \\ -0.3333 & -2.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v - v_{ss}) \\ (r - r_{ss}) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Misalkan $(v - v_{ss}) = u(t)$, $(r - r_{ss}) = w(t)$, dan $A = \begin{bmatrix} -1.3157 & 3 \\ -0.3333 & -2.666 \end{bmatrix}$,

maka persamaan (4.35) menjadi:

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ w'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3157 & 3 \\ -0.3333 & -2.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$u'(t) = -1.3157u(t) + 3w(t) \rightarrow w(t) = \frac{u'(t) + 1.3157u(t)}{3}$$

$$w'(t) = -0.3333u(t) - 2.666w(t)$$

$$\left(\frac{u'(t) + 1.3157u(t)}{3}\right)' = -0.3333u(t) - 2.666\left(\frac{u'(t) + 1.3157u(t)}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3}u''(t) + 0.4386u'(t) = -0.3333u(t) - 0.8886u'(t) - 1.1692u(t)$$

$$\frac{1}{3}u''(t) + 0.4386u'(t) + 0.8886u'(t) + 0.3333u(t) + 1.1692u(t) = 0$$

$$\frac{1}{3}u''(t) + 1.3272u'(t) + 1.5025u(t) = 0$$

$$u''(t) + 3.9816u'(t) + 4.5075u(t) = 0 \quad (4.37)$$

Misal, $u(t) = e^{mt}$, $u'(t) = me^{mt}$, $u''(t) = m^2e^{mt}$

Maka persamaannya adalah:

$$m^2e^{mt} + 3.9816me^{mt} + 4.5075e^{mt} = 0$$

$$e^{mt}(m^2 + 3.9816m + 4.5075) = 0$$

Karena $e^{mt} \neq 0$, maka $m^2 + 3.9816m + 4.5075$ adalah suatu persamaan karakteristik, sehingga

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3.9816 \pm \sqrt{15.8531 - 4 \times 1 \times 4.5075}}{2 \times 1}$$

$$m_{1,2} = \frac{-3.9816 \pm \sqrt{15.8531 - 18.0300}}{2} = \frac{-3.9816 \pm \sqrt{-2.1769}}{2}$$

$$m_1 = -\frac{3.9816}{2} + \frac{\sqrt{2.1769} i}{2}, \quad m_2 = -\frac{3.9816}{2} - \frac{\sqrt{2.1769} i}{2}$$

Dengan demikian diperoleh solusi

$$u(t) = e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \quad (4.38)$$

$u'(t) =$

$$\begin{aligned} & -\frac{3.9816}{2} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \right. \\ & \left. C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) + e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \quad (4.39) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} u'(t) = & C_1 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) + \\ & C_2 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) \end{aligned}$$

Sehingga dapat dicari penyelesaian umum untuk $w(t) = \frac{w(t) + 1.3157u(t)}{3}$

$$w(t) = \frac{u'(t) + 1.3157u(t)}{3} = \frac{1}{3}u'(t) + \frac{1.3157u(t)}{3}$$

$$\begin{aligned}
w(t) = & \frac{1}{3}C_1 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) + \\
& \frac{1}{3}C_2 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) + \\
& \frac{1.3157}{3} \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t) \right) \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Ingat pemisalan sebelumnya, sehingga dari penyelesaian umum di atas kemudian diperoleh nilai untuk

$$\begin{aligned}
(v - v_{ss}) &= u(t) \\
\rightarrow v(t) &= e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t) + 1.1994 \quad (4.41)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(r - r_{ss}) &= w(t) \\
\rightarrow r(t) &= \frac{1}{3}C_1 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) + \\
& \frac{1}{3}C_2 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) + \\
& \frac{1.3157}{3} \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t) \right) - 0.62426 \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Akan dicari nilai C_1 dan C_2 saat nilai $v(t) = 0.5$ dan $t = 0$ untuk persamaan (4.41),

$$\begin{aligned}
v(t) &= e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t) + 1.1994 \\
0.5 &= e^{-\frac{3.9816}{2}(0)} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}(0) + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}(0)) + 1.1994 \\
0.5 &= e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 1.1994 \\
0.5 &= C_1 + 1.1994 \\
C_1 &= -0.6994
\end{aligned}$$

Kemudian untuk mencari C_2 dari persamaan awal (4.23),

$$\frac{dv(t)}{dt} = c \left(v(t) - \frac{1}{3} (v(t))^3 + r(t) + I \right)$$

dengan memisalkan $c = 3, r(t) = -1, I = 0, v(t) = 0.5$, sehingga

$$\frac{dv(t)}{dt} = 3 \left(0.5 - \frac{1}{3} (0.5)^3 - 1 \right)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = 3 \left(0.5 - \frac{1}{3} (0.5)^3 - 1 \right)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -1.625$$

Lalu substitusikan $\frac{dv(t)}{dt} = -1.625, t = 0$, dan $C_1 = -0.6994$ pada turunan dari persamaan (4.41),

$$v'(t) =$$

$$-\frac{3.9816}{2} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) + e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right)$$

$$-1.625 = -\frac{3.9816}{2} e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0 \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \sin 0 + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \cos 0 \right)$$

$$-1.625 = -\frac{3.9816}{2} (-0.6994) + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2$$

$$C_2 = -4.0901$$

Sehingga diperoleh solusi untuk $v(t)$, yaitu:

$$v(t) = e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-0.6994 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - 4.0901 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) + 1.1994 \quad (4.43)$$

Kemudian juga akan dicari nilai C_1 dan C_2 saat nilai $r(t) = -1$ dan $t = 0$ untuk persamaan (4.42),

$$r(t) =$$

$$\frac{1}{3} C_1 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) \right) + C_2 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) \right) + \frac{1.3157}{3} \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t) \right) - 0.62426$$

$$-1 =$$

$$\frac{1}{3} C_1 \left(e^0 \left(-\frac{3.9816}{2} \cos 0 - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin 0 \right) \right) +$$

$$C_2 \left(e^0 \left(-\frac{3.9816}{2} \sin 0 + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos 0 \right) \right) + \frac{1.3157}{3} (e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)) - 0.62426$$

$$-1 = \frac{1}{3} C_1 \left(-\frac{3.9816}{2} \right) + C_2 \left(\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) + \frac{1.3157}{3} C_1 - 0.62426$$

$$C_1 = 3.2783 C_2 + 1.6697$$

Kemudian untuk mencari C_2 digunakan persamaan awal (4.24),

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{c} (v(t) - a + br(t))$$

dengan memisalkan $c = 3, a = 0.7, b = 0.8, r(t) = -1, v(t) = 0.5$, sehingga

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{1}{3} (0.5 - 0.7 + 0.8 \times -1)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{1}{3}$$

Lalu turunkan persamaan (4.42) terhadap t , sebelumnya akan dilakukan proses manipulasi aljabar untuk memudahkan penurunan:

$$r(t) =$$

$$\frac{1}{3} C_1 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) +$$

$$\frac{1}{3} C_2 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) +$$

$$\frac{1.3157}{3} (e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t)) - 0.62426$$

$$r(t) =$$

$$C_1 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) +$$

$$C_2 \left(e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{3.9816}{2} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) \right) +$$

$$1.3157 (e^{-\frac{3.9816}{2}t} (C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t)) - 0.62426$$

$$r(t) = -\frac{3.9816}{2} \frac{1}{3} C_1 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} C_1 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t -$$

$$\frac{3.9816}{2} \frac{1}{3} C_2 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} C_2 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t +$$

$$1.3157 e^{-\frac{3.9816}{2}t} C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t + 1.3157 e^{-\frac{3.9816}{2}t} C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - 0.62426$$

$$r(t) = -\frac{3.9816}{2} \frac{1}{3} C_1 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} C_2 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t +$$

$$1.3157 e^{-\frac{3.9816}{2}t} C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} C_1 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t -$$

$$\frac{3.9816}{2} \frac{1}{3} C_2 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + 1.3157 e^{-\frac{3.9816}{2}t} C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - 0.62426$$

$$r(t) = 0.6521 C_1 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} C_2 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t +$$

$$0.6521 C_2 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} C_1 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - 0.62426$$

$$r(t) =$$

$$0.6521 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) +$$

$$\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - C_1 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) - 0.62426$$

Lalu turunkan persamaan (4.42) terhadap t , diperoleh:

$$r'(t) =$$

$$-\frac{3.9816}{2} 0.6521 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) +$$

$$0.6521 e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) -$$

$$\frac{3.9816}{2} \left(\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) \frac{1}{3} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - C_1 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right) +$$

$$\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2} t \right)$$

$$r'(0) = -\frac{3.9816}{2} 0.6521 e^0 (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + 0.6521 e^0 \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \sin 0 + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \cos 0 \right) - \frac{3.9816}{2} \left(\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) \frac{1}{3} e^0 (C_2 \cos 0 - C_1 \sin 0) +$$

$$\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} e^0 \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 \sin 0 - \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_1 \cos 0 \right)$$

$$r'(0) = -\frac{3.9816}{2} 0.6521 C_1 + 0.6521 \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 + -\frac{3.9816}{2} \left(\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) \frac{1}{3} C_2 +$$

$$\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) C_1$$

$$\frac{1}{3} =$$

$$-\frac{3.9816}{2} 0.6521 (3.2783 C_2 + 1.6697) + 0.6521 \frac{\sqrt{2.1769}}{2} C_2 -$$

$$\frac{3.9816}{2} \left(\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) \frac{1}{3} C_2 + \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{2.1769}}{2} \right) (3.2783 C_2 + 1.6697)$$

$$\frac{1}{3} = -5.4573 C_2 - 2.7734, \rightarrow C_2 = -0.5693$$

$$C_1 = 3.2783 C_2 + 1.6697, \rightarrow C_1 = -0.1966$$

Sehingga diperoleh solusi untuk $r(t)$, yaitu:

$$\begin{aligned}
 r(t) = & \\
 & 0.6521e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-0.1966 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - 0.5693 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) + \\
 & \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-0.5693 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - 0.1966 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) - \\
 & 0.62426
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

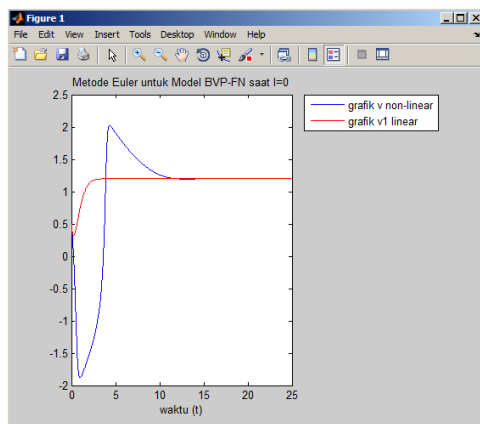
4.4 Simulasi Numerik dengan Menggunakan Metode Euler

Akan dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Euler pada solusi linier model BVP-FN untuk membandingkan grafik non-linear dan linearnya. Diketahui solusi linier $v(t)$ dan $r(t)$ untuk model BVP-FN adalah pada persamaan (4.43) dan (4.44) sebagai berikut,

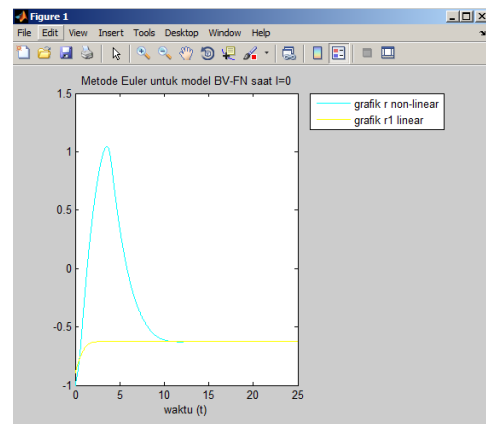
$$v(t) = e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-0.6994 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - 4.0901 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) + 1.1994$$

$$\begin{aligned}
 r(t) = & 0.6521e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-0.1966 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - 0.5693 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) + \\
 & \frac{\sqrt{2.1769}}{2} \frac{1}{3} e^{-\frac{3.9816}{2}t} \left(-0.5693 \cos \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t - 0.1966 \sin \frac{\sqrt{2.1769}}{2}t \right) - 0.62426
 \end{aligned}$$

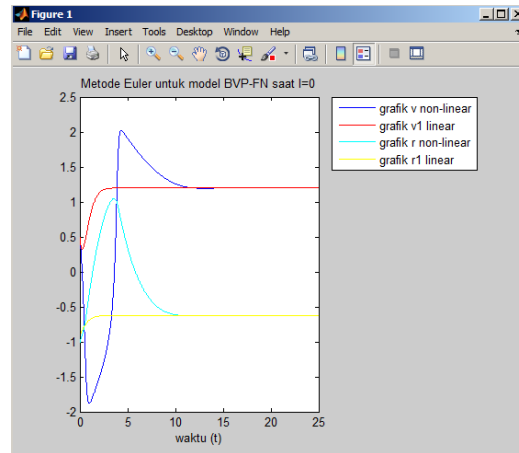
Dengan menggunakan program Matlab maka diperoleh grafik sebagai berikut,



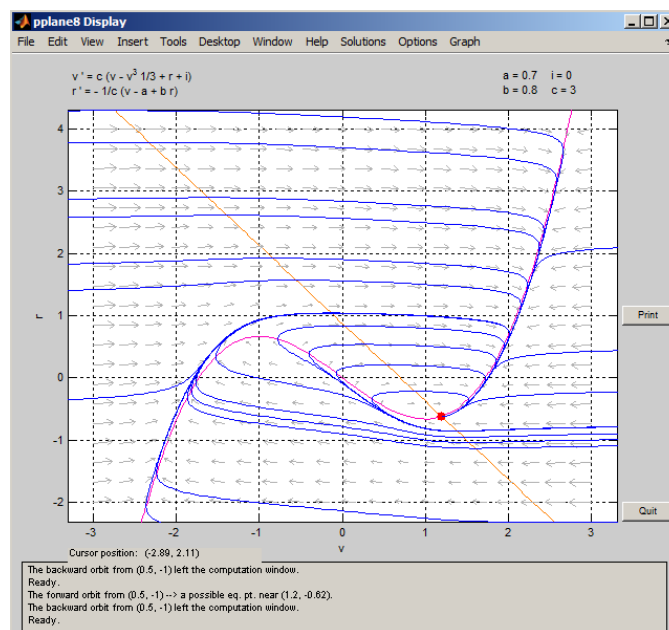
Gambar 4.4. Plot v non-linear dan v_1 linear



Gambar 4.5. Plot r non-linear dan r_1 linear



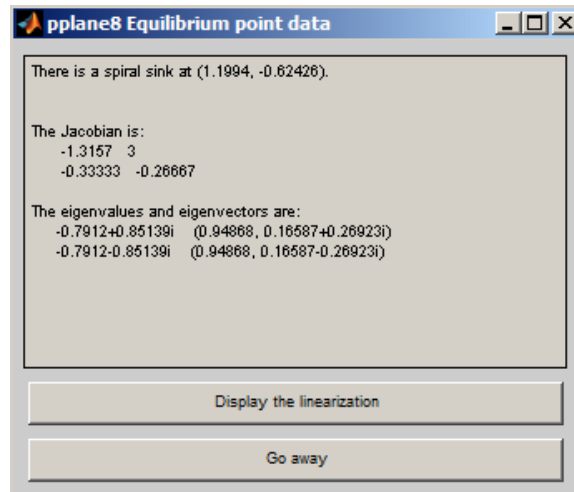
Gambar 4.6. Plot gabungan v non-linear, v_1 linear, r non-linear, dan r_1 linear



Gambar 4.7. Bidang fase model linier BVP-FN (v_1 linier dan r_1 linier)

Menurut Verhulst (1990), jika didekati menggunakan sistem linear dengan nilai awal yang telah ditentukan, ketika model Fitzhugh-Nagumo stabil maka sistem non-linearinya juga akan stabil. Dari kedua gambar dapat disimpulkan bahwa linearisasi untuk model Fitzhugh-Nagumo masih kurang akurat. Tetapi dilihat dari kedua gambar secara keseluruhan grafik linearisasinya masing-masing stabil menuju ke titik yang sama dengan grafik pada model non-linearinya.

4.5 Analisis Phase Plane Model Linear BVP-FN



Gambar 4.8. PPlane8 Equilibrium point data

Phase portraitnya berbentuk spiral yang berpusat/tenggelam pada titik tetap $(1.1994, -0.62426)$ dengan matriks Jacobian sebagai berikut,

$$J = \begin{pmatrix} -13157 & 3 \\ -0.33333 & -0.26667 \end{pmatrix}$$

dan nilai eigen

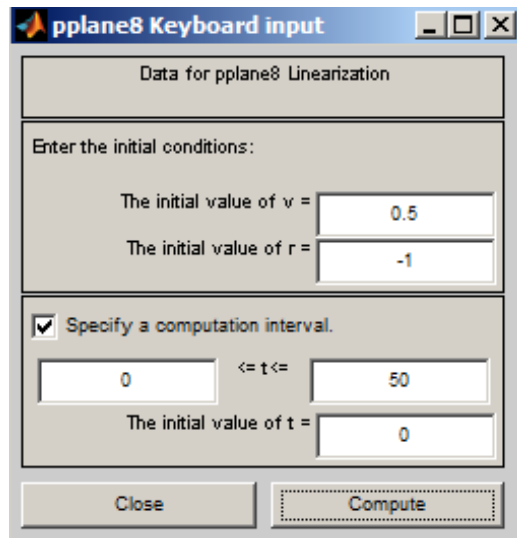
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7912 + 0.85139 i \\ -0.7912 - 0.85139 i \end{pmatrix}$$

serta vektor eigen

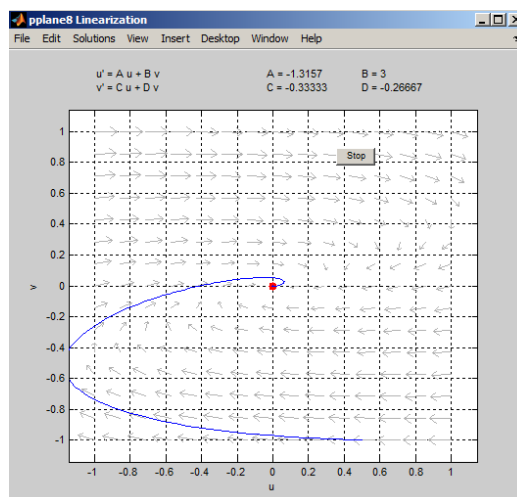
$$(v^1) = \begin{pmatrix} 0.94868 \\ 0.94868 \end{pmatrix}, \quad (v^2) = \begin{pmatrix} 0.16587 + 0.26923 i \\ 0.16587 - 0.26923 i \end{pmatrix}$$

Karena pada nilai eigen terdapat bilangan kompleks, maka phase portraitnya berbentuk spiral dengan *stable focus*. Dan karena nilai eigen yang riil kurang dari nol, maka arah pada phase portraitnya adalah ke dalam.

Diberikan nilai awal $v(0) = 0.5$ dan $r(0) = -1$.



Gambar 4.9. PPlane8 Keyboard Input

Gambar 4.10. Lintasan Phase Plane BVP-FN saat kondisi awal $v(0) = 0.5$ dan $r(0) = -1$

Bentuk linear Model BVP-FN dari program Matlab yaitu,

$$\text{sys} := \frac{d}{dt} v(t) = -1.3157 v(t) + 3 r(t), \quad \frac{d}{dt} r(t) = -0.33333 v(t) - 0.26667 r(t)$$

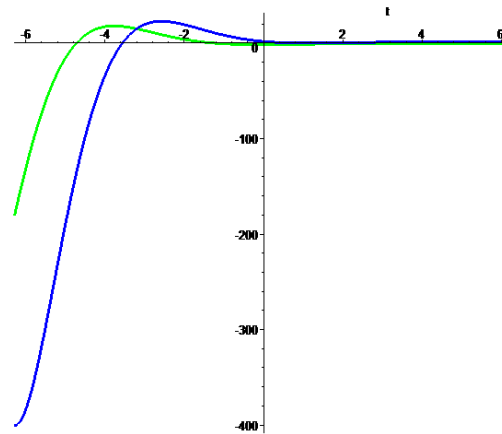
Dengan memberikan nilai awal,

$$\text{ics} := v(0) = 0.5, r(0) = -1$$

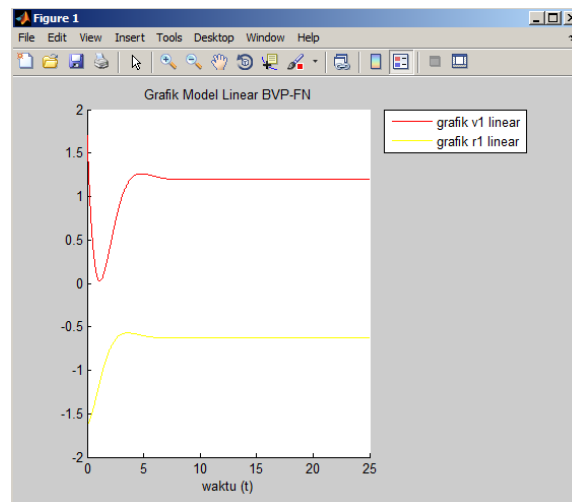
Maka diperoleh solusi khusus program Maple,

$$\begin{aligned} \{r(t) = & e^{(-0.7911850000 t)} (-0.8118202818 \sin(0.8513953340 t) - 1. \cos(0.8513953340 t)), \\ v(t) = & 0.00001500015000 e^{(-0.7911850000 t)} \\ & (-255441.4498 \sin(0.8513953340 t) + 33333. \cos(0.8513953340 t))\} \end{aligned}$$

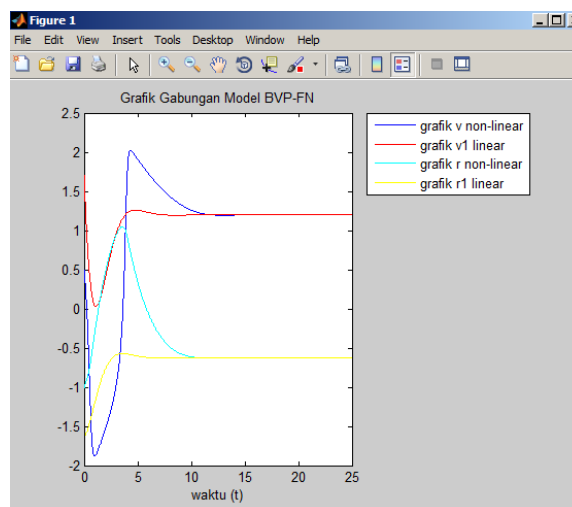
Sehingga dapat dilihat grafiknya sebagai berikut,

Gambar 4.11. Plot v_1 linear dan r_1 linear

Pada program Matlab ditampilkan sebagai berikut,

Gambar 4.12. Plot v_1 linear dan r_1 linear

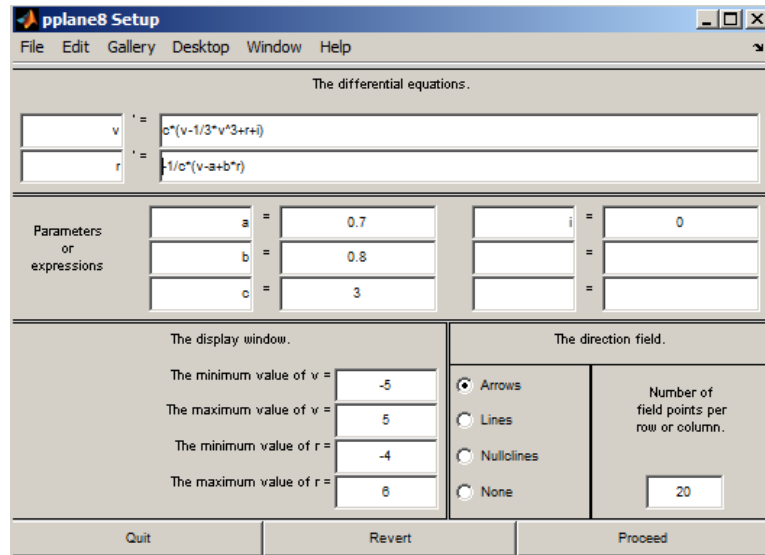
Grafik gabungannya sebagai berikut,

Gambar 4.13. Plot gabungan v non-linear, v_1 linear, r non-linear, dan r_1 linear

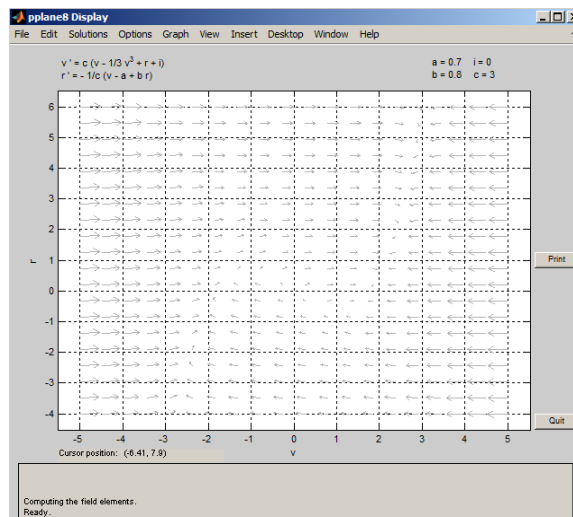
4.6 Analisis Bidang Fase Model BVP-FN

Akan dilakukan analisis bidang fase pada model BVP - Fitzhugh Nagumo menggunakan aplikasi Matlab program pplane8 dengan memberi nilai I yang bervariasi agar dapat diketahui batas kestabilannya.

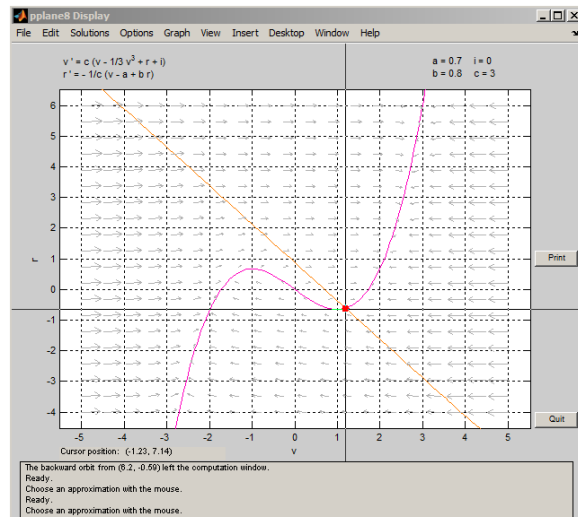
- a. Ketika neuron dalam keadaan istirahat (tanpa rangsangan), yaitu $I = 0$.



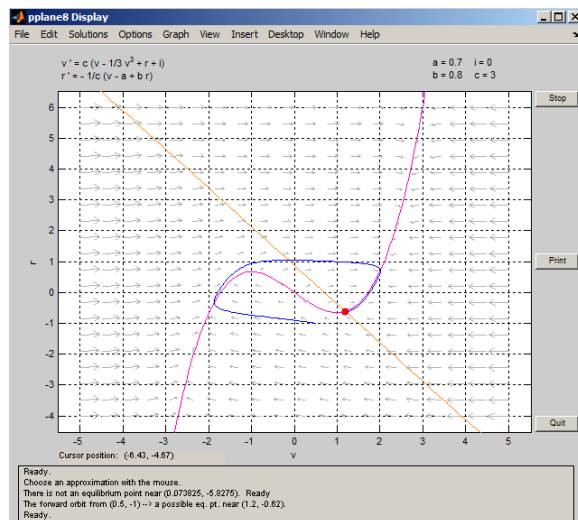
Gambar 4.14. Program pplane8 untuk Model BVP-Fitzhugh Nagumo



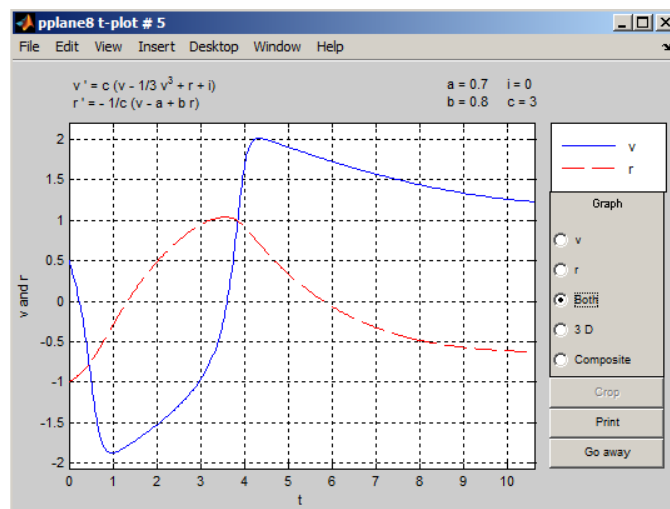
Gambar 4.15. Hasil Bidang Fase Model BVP-Fitzhugh Nagumo



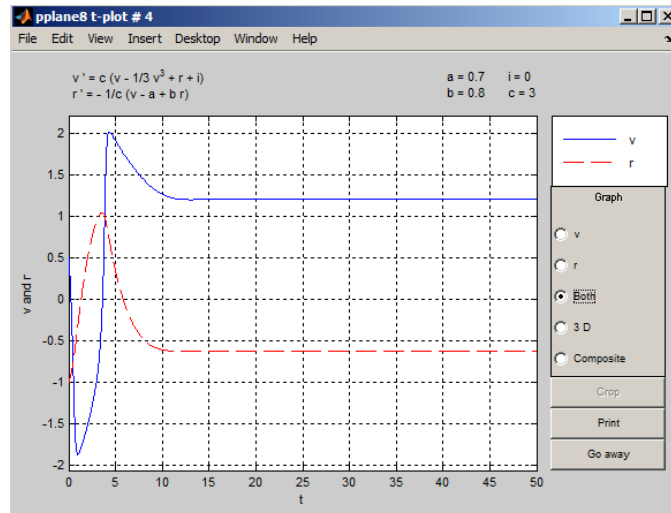
Gambar 4.16. v -nullcline berwarna ungu dan r -nullcline berwarna kuning dengan syarat $v'(t) = 0$, dan $r'(t) = 0$



Gambar 4.174. Lintasan Bidang Fase BVP-FN saat kondisi awal $v(0) = 0.5$ dan $r(0) = -1$



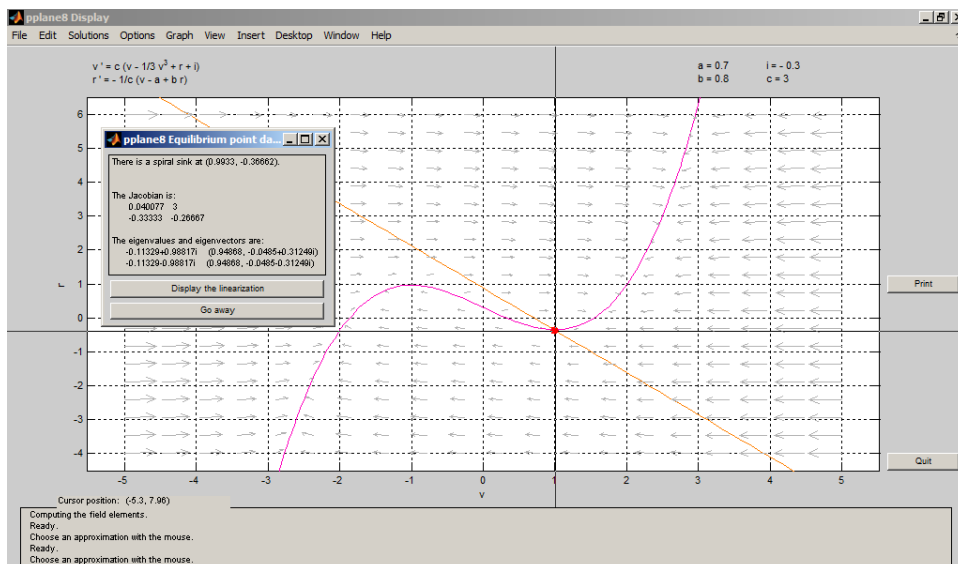
Gambar 4.18. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t saat kondisi awal $v(0) = 0.5$ dan $r(0) = -1$



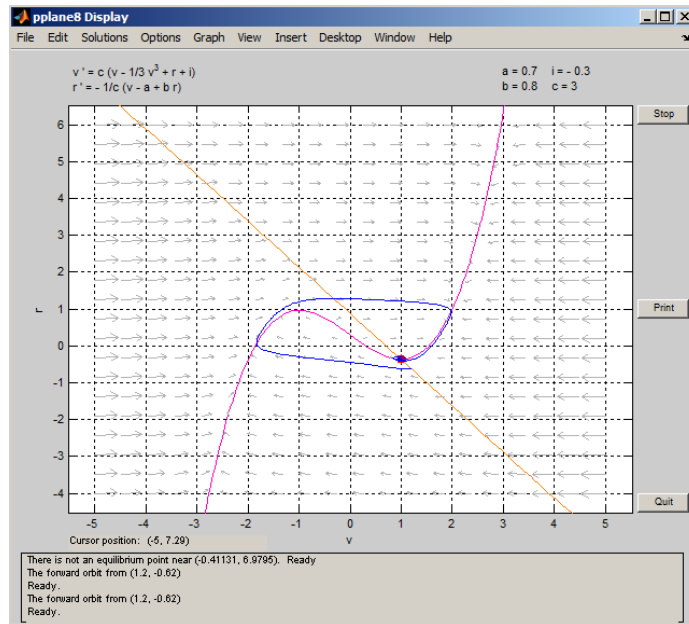
Gambar 4.19. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t pada interval $t = 0 - 50$

Gambar ini menunjukkan ketika potensial membran pada neuron diubah ke titik $(0.5, -1)$, maka membran akan kembali ke nilai pada titik equilibrium yaitu $v = 1.1994$, $r = -0.62426$. Artinya sama saja dengan memberikan neuron rangsangan depolarisasi. Setelah rangsangan depolarisasi singkat, potensial membran neuron akan kembali pada keadaan potensial istirahat yaitu titik Equilibrium.

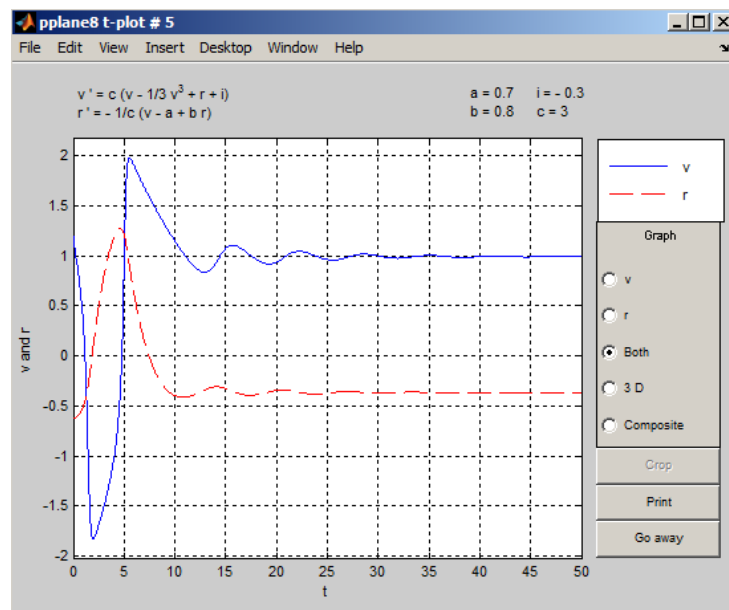
b. Ketika diberikan $I = -0.3$.



Gambar 4.20. Titik kesetimbangan (equilibrium) Model BVP-FN saat $I = -0.3$



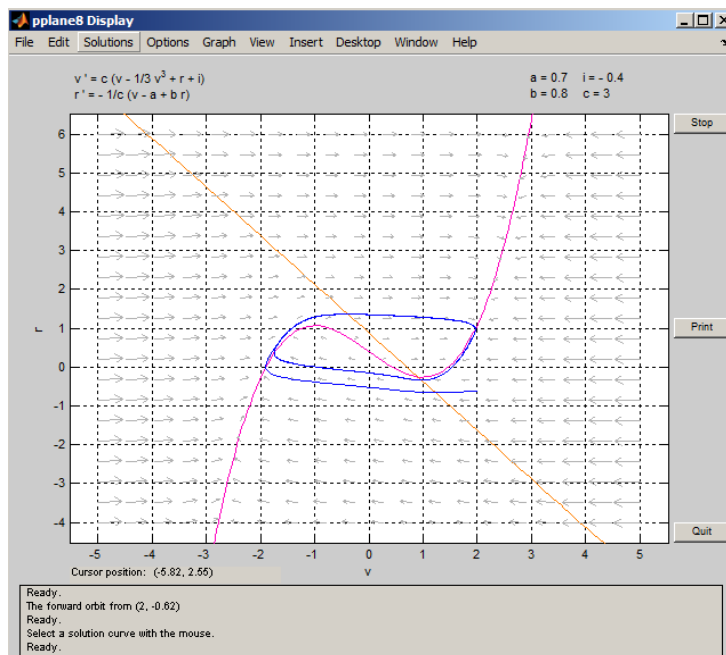
Gambar 4.21. Lintasan Bidang Fase saat diberikan kondisi awal $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$



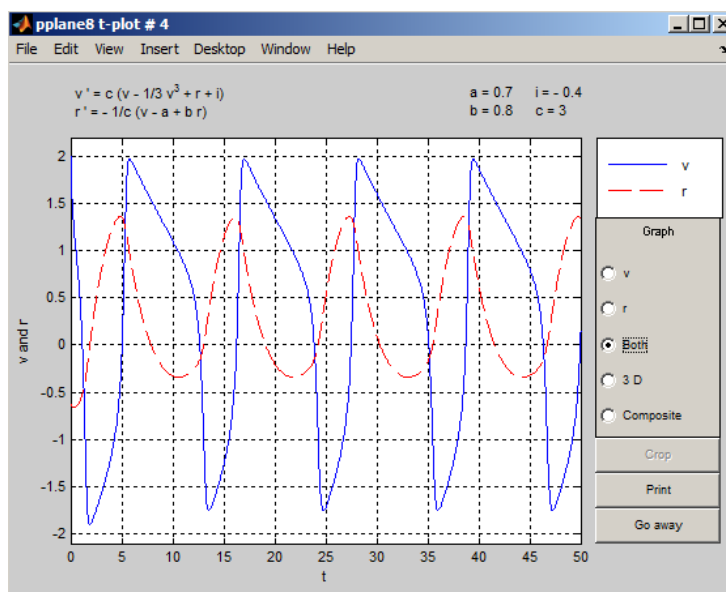
Gambar 4.22. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$

Pada kasus (b) dapat disimpulkan bahwa ketika nilai I berubah dari 0 menjadi -0.3 tidak ada perubahan yang mencolok dari grafik. Artinya stimulus ini hanya membuat neuron mengalami peningkatan besar potensial membran negatif atau hiperpolarisasi lalu terjadi depolarisasi singkat selanjutnya neuron tetap kembali menuju ke titik keseimbangannya.

c. Ketika diberikan $I = -0.4$.



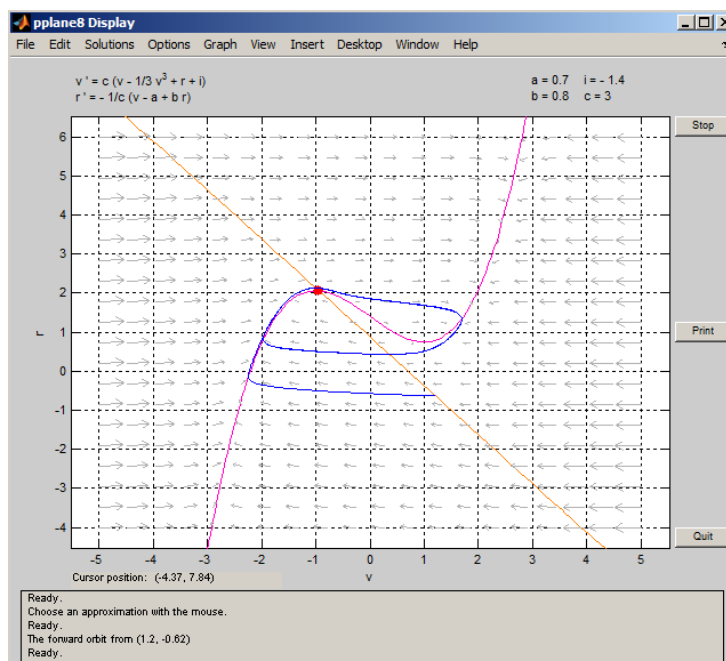
Gambar 4.23. Lintasan Bidang Fase saat kondisi awal $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$



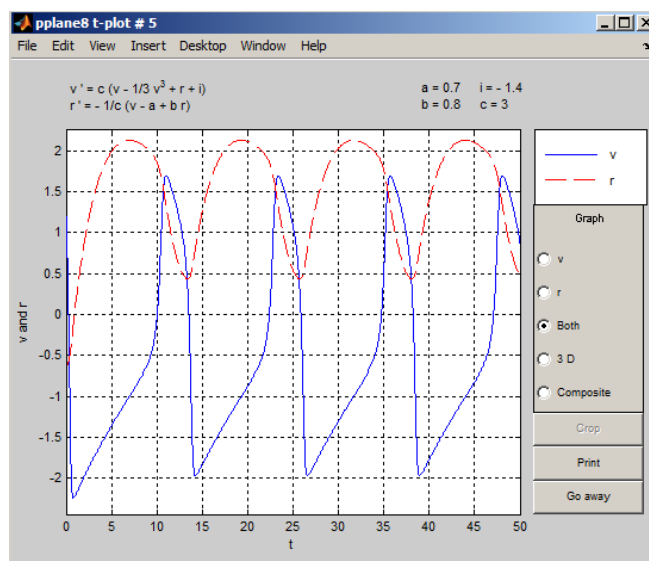
Gambar 4.24. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$

Pada kasus (c) dapat dilihat bahwa pada saat neuron diubah ke titik awal $(v, r) = (1.1994, 0.62426)$ maka membran akan mengalami depolarisasi dan lalu hiperpolarisasi secara berulang-ulang. Dari gambar (4.24) terlihat bahwa grafik tidak stabil karena nilai menuju ke titik (1.9559) dan menjauhi titik equilibrium. Kasus ini menunjukkan bahwa grafik saat kondisi awal tidak stabil.

d. Ketika diberikan $I = -1.4$.



Gambar 4.25. Lintasan Bidang Fase saat kondisi awal $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$

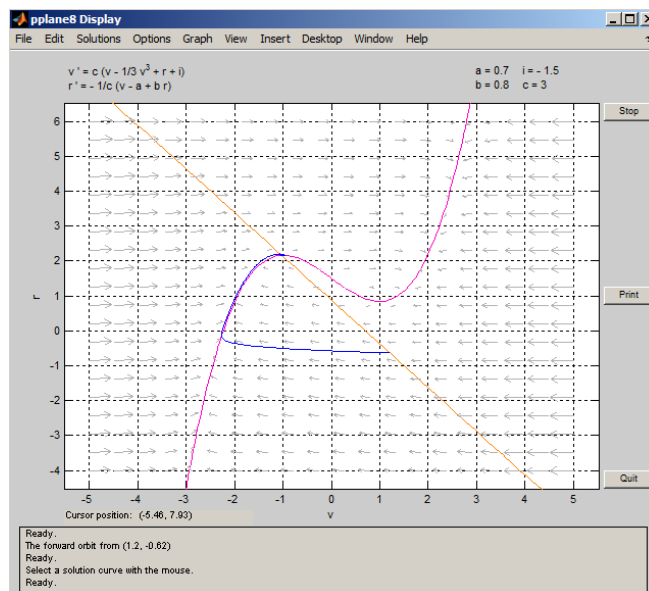


Gambar 4.26. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$

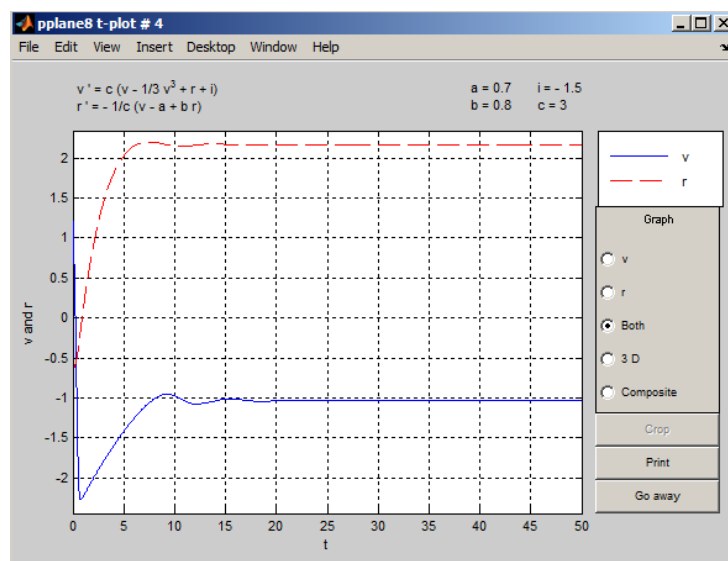
Jika I diubah menjadi -1.4 , dapat dilihat bahwa pada saat neuron diubah ke titik awal $(v, r) = (1.1994, 0.62426)$ membran akan mengalami hiperpolarisasi dan kemudian depolarisasi secara berulang-ulang. Dari gambar (4.26) terlihat bahwa grafik tidak stabil karena nilai v menuju ke titik (1.9559) dan menjauhi titik equilibrium. Artinya stimulus ini membuat neuron mengalami penurunan dan kenaikan membran berulang-ulang. Fenomena neuron yang seperti

ini disebut sebagai *excitation block*, di mana neuron mengalami peningkatan arus injeksi secara berulang.

e. Ketika diberikan $I = -1.5$.



Gambar 4.27. Lintasan Bidang Fase saat kondisi awal $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$



Gambar 4.28. Grafik gabungan $v(t)$ dan $r(t)$ vs t ketika $v(0) = 1.1994$, $r(0) = -0.62426$

Gambar (4.28) menunjukkan ketika I diubah menjadi -1.5 maka grafik menjadi stabil dan membran akan kembali ke nilai pada titik equilibrium yaitu $v = -1.1994$, $r = 2.2341$. Artinya sama saja dengan memberikan neuron rangsangan depolarisasi. Setelah rangsangan depolarisasi singkat, potensial membran neuron akan kembali pada keadaan potensial istirahat yaitu titik Equilibrium.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan paparan penjelasan yang telah dibahas pada bab IV, dapat disimpulkan bahwa analisis bidang fase telah berhasil digunakan untuk melihat visualisasi model BVP - Fitzhugh - Nagumo ketika terjadi perubahan rangsangan atau saat nilai I berubah-ubah. Analisis bidang fase mampu mendeskripsikan menggunakan grafik suatu model umpan balik antara rangsangan dan tanggapan neuron. Analisis bidang fase juga telah berhasil menyajikan gambaran visual tentang kondisi yang terjadi saat potensial aksi di dalam neuron ketika tubuh manusia menerima suatu rangsangan. Dari penjelasan tersebut dapat disimpulkan bahwa grafik BVP-Fitzhugh Nagumo menjadi tidak stabil pada interval $-1.4 < I < -0.4$. Sementara pada interval $I \geq -0.3$ dan $I \leq -1.5$ grafik stabil dan menuju ke titik equilibrium.

5.2 Saran

Hingga saat ini, solusi analitik dari model BVP-Fitzhugh-Nagumo belum ditemukan. Saran yang dapat penulis berikan untuk pembaca, yaitu dapat menambahkan keterangan asumsi dari model. Selain itu, dapat pula mencoba mencari solusi analitik dari model BVP-FN lalu membandingkan hasilnya dengan solusi numerik untuk melihat seberapa besar kesalahan hampiran dari program numerik yang dibuat.

DAFTAR PUSTAKA

- Anonim. *Sistem Jaringan Sel Saraf*. Diakses tanggal 06 Februari 2017 di website: <http://en.wikipedia.org/wiki/Neuron>.
- Banerjee, Sandip. 2014. *Mathematical Modeling: Model, Analysis, and Applications*. Indian Institute of Technology Roorkee: CRC Press.
- Barnes, Belinda dan Fulford, Glenn Robert. 2009. *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equations Approach Using Maple and Matlab*. Indian Institute of Technology Roorkee: CRC Press.
- Bober, William. 2013. *Introduction to Numerical and Analytical Methods with Matlab for Engineers and Scientists*. Indian Institute of Technology Roorkee: CRC Press.
- Fitzhugh, R. 1961. *Impuls and Physiology States in Theoretical Models of Nerve Membran. Biophysical*. Jurnal penelitian.
- Goodwine, Bill. 2011. *Engineering Differential Equations Theory and Applications*. Springer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering.
- Hirsch MW, Smale S, Devaney RL. 2004. *Differential Equations, Dynamical System and An Introduction to Chaos*. USA: Elsevier Academic Press.
- Juhari, dkk. 2013. *Analisis Model Hodgkin-Huxley dan Model Fitzhugh-Nagumo Pada Sistem Dinamika Karakteristik Distribusi Potensial Jantung*. Malang: UIN Maliki.
- Minorsky, N. 1947. *Introduction to Nonlinear Mechanics*. Edward Brother, Inc.
- Nagumo, J. 1962. *An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon*. Jurnal Proc. IRE, 501.
- Neuhauser, Claudia. 2010. *Calculus for Biology and Medicine*. Pearson education international: University of Minnesota.
- Oswari, S. 2008. *Model Matematika Penjalaraan Impuls Saraf pada Satu Sel Saraf di Subthalamik Nukleus*. Bandung.
- Shepardson, Dylan. 2009. *Algorithms for Inverting Hodgkin-Huxley Type Neuron Models*. Thesis of Georgia Institute of Technology.
- Subiyanto, 2011. *Simulasi Propagasi Impuls pada Sel Saraf Terkopel Menggunakan Model Fitzhugh-Nagumo*. Bogor: IPB.

Upadhyay, Ranjit Kumar. 2014. *Introduction to Mathematical Modeling and Chaotic Dynamics*. Indian School of Mines: CRC Press.

Yuanita, D. 2009. *Dinamika Impuls pada Satu Sel Saraf dengan Akupunktur sebagai Stimulus*. Bandung.

Lampiran-lampiran

Program Matlab untuk menampilkan gambar 4.6

```
%Metode Euler untuk model BVP-FN ketika I=0

%f adalah ruas kanan dari ODE
%a dan b adalah batas kiri dan kanan dari domain
%ya adalah nilai awal y(a)
%M adalah banyaknya langkah
%Y adalah solusi dari ODE
%h panjang langkah metode Euler

clc,clear,clf

disp('Metode Euler untuk model BVP-FN');
a=0;
b=25;
ya=[0.5; -1]; %[v0; r0]
h=0.01;

k=1;

M=round((b-a)/h);
Y = zeros(2,M+1);
T = a:h:b;
Y(:,1)=ya;

while k<=M
Y(:,k+1) = Y(:,k) + h.*f(Y(:,k))';
k=k+1;
end

v=Y(1,:);
r=Y(2,:);
Y(:,end) %untuk melihat model FN stabil menuju titik (v,r)
plot(T,v,'b-')

hold on
t=0:0.01:25;
v1=zeros(length(t));
v1=exp(-3.9816/2*t).*(-0.6994*cos(sqrt(2.1769)/2*t)-
4.0901*sin(sqrt(2.1769)/2*t))+1.1994;
plot(t,v1,'r-')

disp('Metode Euler untuk model BVP-FN');

a=0;
b=25;
ya=[0.5; -1]; %[v0; r0]
h=0.01;

k=1;

M=round((b-a)/h);
Y = zeros(2,M+1);
```

```

T = a:h:b;
Y(:,1)=ya;

while k<=M
Y(:,k+1) = Y(:,k) + h.*f(Y(:,k))';
k=k+1;
end

v=Y(1,:);
r=Y(2,:);
Y(:,end); %untuk melihat model FN stabil menuju titik (v,r)
plot(T,r,'c-')

hold on
t=0:0.01:25;
r1=zeros(length(t));
r1=0.6521*exp(-3.9816/2*t).*(-0.1966*cos(sqrt(2.1769)/2*t)-
0.5693*sin(sqrt(2.1769)/2*t))+sqrt(2.1769)/2 *1/3 *exp(-
3.9816/2*t).*(-0.5693*cos(sqrt(2.1769)/2*t)-
0.1966*sin(sqrt(2.1769)/2*t))-0.62426;
plot(t,r1,'y-')

title('Metode Euler untuk model BVP-FN saat I=0')
xlabel 'waktu (t)'
legend('grafik v non-linear','grafik v1 linear','grafik r non-
linear','grafik r1 linear','Location','NorthEastOutside')

```

Program Matlab untuk menampilkan gambar 4.13

```

%Solusi model BVP-FN

%f adalah ruas kanan dari ODE
%a dan b adalah batas kiri dan kanan dari domain
%ya adalah nilai awal y(a)
%M adalah banyaknya langkah
%Y adalah solusi dari ODE
%h panjang langkah metode Euler

clc,clear,clf

disp('Metode Euler untuk model BVP-FN');
a=0;
b=25;
ya=[0.5; -1]; %[v0; r0]
h=0.01;

k=1;

M=round((b-a)/h);
Y = zeros(2,M+1);
T = a:h:b;
Y(:,1)=ya;

while k<=M

```

```

Y(:,k+1) = Y(:,k) + h.*f(Y(:,k))';
k=k+1;
end

v=Y(1,:);
r=Y(2,:);
Y(:,end) %untuk melihat model FN stabil menuju titik (v,r)
plot(T,v,'b-')

hold on
t=0:0.01:25;
v1=zeros(length(t));
v1=0.1500015000e-4*exp(-0.7911850000*t).*(-
255441.4498*sin(0.8513953340*t)+33333.*cos(0.8513953340*t))+1.1994
;
plot(t,v1,'r-')

disp('Metode Euler untuk model BVP-FN');

a=0;
b=25;
ya=[0.5; -1]; %[v0; r0]
h=0.01;

k=1;

M=round((b-a)/h);
Y = zeros(2,M+1);
T = a:h:b;
Y(:,1)=ya;

while k<=M
Y(:,k+1) = Y(:,k) + h.*f(Y(:,k))';
k=k+1;
end

v=Y(1,:);
r=Y(2,:);
Y(:,end); %untuk melihat model FN stabil menuju titik (v,r)
plot(T,r,'c-')

hold on
t=0:0.01:25;
r1=zeros(length(t));
r1=exp(-0.7911850000*t).*(-0.8118202818*sin(0.8513953340*t)-
1.*cos(0.8513953340*t))-0.62426;
plot(t,r1,'y-')

title('Grafik Gabungan Model BVP-FN')
xlabel 'waktu (t)'
legend('grafik v non-linear','grafik v1 linear','grafik r non-
linear','grafik r1 linear','Location','NorthEastOutside')

```

Program Maple untuk mencari titik tetap model BVP-FN

```
> restart;
> a:=0.7;b:=0.8;c:=3;i:=0:
> pers1:=c*(v-v^3*1/3+r+i);
      pers1 := -v3 + 3 r + 3 v
> pers2:=- (v-a+b*r)/c;
      pers2 := -0.2666666667 r -  $\frac{v}{3}$  + 0.2333333333
> solve({pers1=0,pers2=0},{v,r});
{r=-0.6242600441 , v = 1.199408035 },
{r = 1.624630022 - 1.690476415 I, v = -0.5997040176 + 1.352381132 I},
{r = 1.624630022 + 1.690476415 I, v = -0.5997040176 - 1.352381132 I}
```

Program Maple untuk menampilkan gambar 4.11

```
> restart:
> sys:=diff(v(t),t)=-1.3157*v(t)+3*r(t),diff(r(t),t)=-
0.33333*v(t)-0.26667*r(t);
      sys :=  $\frac{d}{dt} v(t) = -1.3157 v(t) + 3 r(t), \frac{d}{dt} r(t) = -0.33333 v(t) - 0.26667 r(t)$ 
> ics:=v(0)=0.5,r(0)=-1;
      ics := v(0) = 0.5, r(0) = -1
> solusikusus:=evalf(dsolve([sys,ics]));
      solusikusus := {r(t) =
      e(-0.7911850000 t) (-0.8118202818 sin(0.8513953340 t) - 1. cos(0.8513953340 t)),
      v(t) = 0.00001500015000 e(-0.7911850000 t)
      (-255441.4498 sin(0.8513953340 t) + 33333. cos(0.8513953340 t))}
> sol1:=.1500015000e-4*exp(-.7911850000*t)*(-
255441.4498*sin(.8513953340*t)+33333.*cos(.8513953340*t)
)+1.1994;
      sol1 := 0.00001500015000 e(-0.7911850000 t)
      (-255441.4498 sin(0.8513953340 t) + 33333. cos(0.8513953340 t)) + 1.1994
> sol2:=exp(-.7911850000*t)*(-
.8118202818*sin(.8513953340*t)-1.*cos(.8513953340*t))-
0.62426;
      sol2 := e(-0.7911850000 t) (-0.8118202818 sin(0.8513953340 t) - 1. cos(0.8513953340 t))
      - 0.62426
> plot([sol1,sol2],thickness=3,color=[blue,green]);
```