

**LAPORAN PENELITIAN KOMPETITIF  
TAHUN ANGGARAN 2017**

**MODIFIKASI BENTUK KURVA DAN PERMUKAAN PUTAR POLIGON  
BEZIER PADA RANCANG BANGUN BENDA INDUSTRI  
KERAJINAN MARMER**

Nomor DIPA	: DIPA BLU: DIPA-025.04.2.423812/2016
Tanggal	: 7 Desember 2017
Satker	: (423812) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Kode Kegiatan	: (2132) Peningkatan Akses, Mutu, Kesejahteraan dan Subsidi Pendidikan Tinggi Islam
Kode Sub Kegiatan	: (008) Penelitian Bermutu
Kegiatan	: (004) Dukungan Operasional Penyelenggaraan Pendidikan

**OLEH:**

**Juhari, S.Pd, M.Si (19840209 20160801 1 055)**



**KEMENTERIAN AGAMA  
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
2017**

## **PERNYATAAN KESANGGUPAN MENYELESAIKAN PENELITIAN**

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP : 19840209 20160801 1 055  
Pangkat / Gol.Ruang : Asisten Ahli / III-B  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Jabatan dalam Penelitian : Ketua Peneliti

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Saya sanggup menyelesaikan dan menyerahkan laporan hasil penelitian maksimal pada tanggal 17 Juli 2017
2. Apabila sampai pada batas waktu yang ditentukan saya/kami belum menyerahkan laporan hasil, maka saya sanggup mengembalikan dana penelitian yang telah saya terima

Malang, 17 Juli 2017

Ketua Peneliti

Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP. 19840209 20160801 1 055

## **HALAMAN PENGESAHAN**

Laporan penelitian ini disahkan oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Pada Tanggal 17 Juli 2017

Ketua Peneliti

Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP. 19840209 20160801 1 055

Ketua LP2M  
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.  
NIP. 19600910 198903 2 001

## **PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN**

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP : 19840209 20160801 1 055  
Pangkat / Gol.Ruang : Asisten Ahli / III-B  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika  
Jabatan dalam Penelitian : Ketua Peneliti

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa dalam penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis disebutkan dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila dikemudian hari ternyata dalam penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan dan pelanggaran etika akademik, maka kami bersedia mengembalikan dana penelitian yang telah kami terima dan diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Malang, 17 Juli 2017

Ketua Peneliti

Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP. 19840209 20160801 1 055

## **PERNYATAAN TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR**

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya

Nama : Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP : 19840209 20160801 1 055  
Pangkat / Gol.Ruang : Asisten Ahli / III-B  
Tempat / Tanggal Lahir : Pamekasan / 09 Februari 1984  
Judul Penelitian : Modifikasi Bentuk Kurva dan Permukaan Putar Poligon  
Bezier pada Rancang Bangun Benda Industri Kerajinan  
Marmer

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Saya TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR
2. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa saya sedang tugas belajar, maka secara langsung saya menyatakan mengundurkan diri dan mengembalikan dana yang telah saya terima dari Program Penelitian Kompetitif tahun 2017.

Demikian surat pernyataan ini, saya buat sebagaimana mestinya.

Malang, 17 Juli 2017

Yang membuat pernyataan,

Juhari, S.Pd, M.Si  
NIP. 19840209 20160801 1 055

## ABSTRAK

Riset dilakukan untuk memperoleh kurva Bezier berderajat enam sehingga menghasilkan kelengkungan kurva yang lebih bervariasi dan multifaset. Tahapan dalam merumuskan aplikasi revolusi permukaan Bezier pada rancang bangun benda marmer ada tiga. Pertama, menghitung representasi parametrik revolusi permukaan Bezier dan modifikasi bentuknya dalam beberapa bentuk yang berbeda. Kedua, merumuskan permukaan parametrik Bezier agar tergabung secara kontinu. Terakhir, menerapkan formula tersebut pada rancang bangun benda marmer menggunakan simulasi komputer. Hasil yang diperoleh adalah kurva Bezier berderajat enam hasil modifikasi dari kurva Bezier berderajat lima dan beberapa bentuk revolusi permukaan Bezier yang bervariasi dan multifaset.

**Kata kunci:** *Revolusi permukaan Bezier, Pemodelan, Kontinuitas dan modifikasi bentuk*

## ABSTRACT

Research being done to obtain curve order bezier six so as to produce curvature the curve varies and multifaset. Step in formulating application revolution bezier on the surface devise up the marble there are three. Firstly, counting representation parametrics revolution surface bezier and modification form in several different forms. Secondly, formulate a surface parametrik bezier that joined continuously. The last, applying formula in the wake of devise marble use computer simulations. The result is a curve bezier six engineered order of the curve order bezier five and some form of revolution surface bezier varying and multifaset.

**Keywords:** *Sufaces Revolusion, Bezier, Modeling, Continuity and Modification*

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	i
<b>PERNYATAAN KESANGGUPAN MENYELESAIKAN PENELITIAN .....</b>	ii
<b>HALAMAN PENGESAHAN .....</b>	iii
<b>PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN .....</b>	iv
<b>PERNYATAAN TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR .....</b>	v
<b>ABSTRAK .....</b>	vi
<b>DAFTAR ISI .....</b>	vii
<b>BAB I. PENDAHULUAN .....</b>	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Batasan Masalah .....	3
1.3 Rumusan Masalah .....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
<b>BAB II. STUDI PUSTAKA .....</b>	6
2.1 Titik dan Segmen Garis .....	6
2.1.1 Penyajian Titik dan Segmen Garis di Ruang .....	6
2.1.2 Hitung Sudut di Antara Dua Segmen Garis .....	7
2.2 Konstruksi Bentuk Persegi .....	7
2.3 Penyajian Beberapa Bentuk Kuadratis Bidang .....	8
2.3.1 Lingkaran .....	8
2.3.2 Elips .....	9
2.4 Penyajian Benda-Benda Geometri Ruang .....	10
2.4.1 Penyajian Bola .....	10
2.4.2 Penyajian Tabung .....	12
2.4.3 Penyajian Kerucut .....	14
2.4.4 Penyajian Prisma Segienam .....	15
2.5 Operasi Geometri .....	16
2.5.1 Rotasi .....	17
2.5.2 Translasi .....	18
2.5.3 Refleksi .....	18
2.5.4 Dilatasi Titik Pada $R^3$ .....	19

2.6 Interpolasi Diantara Segmen Garis dan Kurva di Ruang .....	20
2.7 Permukaan Putar Ruang .....	21
2.8 Prinsip Penggabungan Permukaan Putar .....	23
2.9 Penyajian Kurva Hermit Kuadratik .....	23
2.10 Penyajian Kurva dan Permukaan Bezier .....	24
2.11 Konstruksi Objek Pada Program Maple 17 .....	25
2.11.1 Mengkonstruksi segmen Garis .....	25
2.11.2 Mengkonstruksi Persegi .....	26
2.11.3 Mengkonstruksi Lingkaran .....	26
2.11.4 Mengkonstruksi Silinder (Tabung) .....	27
2.11.5 Mengkonstruksi Bola .....	27
2.11.6 Mengkonstruksi Hiperboloida .....	27
<b>BAB III. METODE PENELITIAN .....</b>	<b>29</b>
3.1 Pendekatan Penelitian .....	29
3.2 Tahap – Tahap Penelitian .....	29
3.3 Simulasi Komputer dan Fabrikasi Prototip .....	30
<b>BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>32</b>
4.1 Formula Bezier Berderajat Enam Hasil Modifikasi Bezier Orde Lima .....	32
<b>BAB V. PENUTUP .....</b>	<b>45</b>
5.1 Kesimpulan .....	45
5.2 Penelitian Lanjutan .....	46
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>47</b>
<b>LAMPIRAN</b>	

## BAB I. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Ekonomi kreatif yang mencakup industri kreatif, di berbagai negara di dunia saat ini, diyakini dapat memberikan kontribusi bagi perekonomian bangsanya secara signifikan. Indonesia pun mulai melihat bahwa berbagai subsektor dalam industri kreatif berpotensi untuk dikembangkan, karena Bangsa Indonesia memiliki sumberdaya insani kreatif dan warisan budaya yang kaya. Menteri Perdagangan mengatakan, dari total ekspor Indonesia, sebanyak 9,25 persennya adalah produk dari industri kreatif. Pada 2010, sebanyak 7,3% produk domestik bruto Indonesia adalah kontribusi dari bisnis kreatif dan menyerap 8,5 juta tenaga kerja.

Model pengembangan industri kreatif adalah layaknya sebuah bangunan yang akan menguatkan ekonomi Indonesia, dengan landasan, pilar dan atap sebagai elemen-elemen bangunan tersebut. Dengan model pengembangan industri kreatif ini, maka akan membawa industri kreatif ini dari titik awal (*origin point*) menuju tercapainya visi dan misi industri kreatif Indonesia 2013 (*destination point*). Bangunan industri kreatif ini dipayungi oleh hubungan antara Cendekiawan (*intellectuals*), Bisnis (*business*), dan pemerintah (*Government*) yang disebut sebagai sistem '*triple helix*' yang merupakan aktor utama penggerak lahirnya kreativitas, ide, ilmu pengetahuan dan teknologi yang vital bagi tumbuhnya industri kreatif.

Namun dengan terus berkembangnya jumlah industri kreatif tersebut, justru mengakibatkan daya jual dan harga jual benda-benda yang diproduksi di pasaran domestik ataupun ekspor menjadi melemah. **Masalah utamanya** adalah umumnya produk yang mereka hasilkan polanya masih tetap, belum diimbangi dengan peningkatan kualitas seni dan divesifikasi/inovasi bentuk benda yang dibutuhkan oleh pelanggan baik dari aspek tingkat kesimetrian, keserasian, dan variasi model maupun dari aspek ragam jenis ukuran barang yang ditawarkan. Salah satu produk yang dihasilkan oleh industri kreatif dari sebuah industri di Tulungagung adalah benda onyx dan marmer (Gambar 1.1)



Gambar 1.1 Contoh beberapa bentuk benda industri onyx dan marmer

Teknik desain dan fabrikasi benda hasil industri masih dilakukan secara manual. Cara mendesain bentuk benda sebelum difabrikasi, kebanyakan dilakukan dengan menduplikasi benda yang sudah ada atau mengikuti model yang dipesan oleh pelanggan. Jika pengrajin menginginkan model baru untuk pemasaran di *stand* mereka, proses pembuatannya banyak dilakukan dengan cara *trial and error* atau *teknik mal*, yaitu dengan cara simulasi kertas dibeber di lantai kemudian digulung tegak untuk membentuk bendanya. **Dampak negatifnya** adalah hasil fabrikasi barang pesanan dimaksud sering salah bentuk atau salah ukuran sehingga harus reproduksi kembali. Dengan demikian biaya fabrikasi teknik *trial and error* ternyata lebih mahal, karena banyak menimbulkan kesalahan (resiko) fabrikasi, membutuhkan ekstra waktu dan tenaga untuk proses produksi. Selain itu dengan desain *teknik mal*, pengrajin sering gagal melakukan kontrak ekspor atau pengiriman hasil produksinya setelah sampai di pemesan terpaksa harus ditolak, karena ukuran model benda tidak sesuai dengan pesanan pembeli. Oleh karena itu untuk melakukan perbaikan dan inovasi bentuk benda dimaksud, maka perlu dilakukan kegiatan riset pengembangan.

Pemasaran domestik ataupun luar negeri benda-benda aksesoris bangunan semakin banyak dijumpai dan diminati, baik yang baru pada produk benda pakai maupun barang aksesoris, karena semakin tahun masyarakat semakin sadar akan kebutuhan peningkatan keindahan dan seni bangunan rumahnya ataupun tempat kerjanya. Di wilayah kabupaten Malang, sedikitnya ada 100 *stand* penjual kerajinan marmer dengan daya jual  $\pm 5\%$  per bulan. Dari pemasaran ini, keuntungan yang diperoleh pengrajin rata-rata mencapai  $\pm 10\%$  dari modal produksi. Pemasaran ke luar Malang di Jawa dan di berbagai kota propinsi di luar Jawa, dilakukan dengan cara pemesanan, jumlahnya rata-rata sekitar 3 (tiga) pemesan per bulan. Bagi pemesan di luar Jawa, umumnya barang-barang tersebut diperlukan untuk di jual kembali ke luar negeri. Telah dikembangkan juga teknik pemasaran dan pemesanan benda marmer melalui media web bersamaan dengan benda-benda kerajinan lain produk nasional untuk keperluan memperluas pasar ([www.jualbatuonyx.com](http://www.jualbatuonyx.com)). Namun **kendalanya** adalah meskipun harga pemesanan domestik maupun ekspor menjanjikan keuntungan yang lebih baik, tetapi karena penawaran variasi model terbatas (Gambar 1.1), nilai seninya masih rendah, dan kemampuan pengrajin dalam mewujudkan ketepatan waktu pembuatan dan ukuran benda yang dipesan rendah, maka akibatnya, *pertama*, daya jual pasar benda kerajinan marmer rendah. *Kedua*, pengrajin sering harus menanggung biaya tinggi untuk pengiriman, karena proses produksinya melampaui batas kontrak yang telah ditetapkan. *Ketiga*, biaya operasi fabrikasinya juga naik, karena waktu produksi bertambah.

Dalam beberapa tahun terakhir, pendekatan penelitian telah dikembangkan untuk memodelkan *knob/handle* yang salah satunya menggunakan metode geometri. Wahyudi (2001) telah melakukan penelitian tentang perancangan objek – objek industri dengan benda permukaan putar yang dapat diimplementasikan untuk desain vas bunga, gelas, kendi ataupun *knop*. Namun permukaan putar yang diperoleh pada penelitian tersebut umumnya mempunyai permukaan lengkung tunggal dan datar sehingga variasi bentuk yang didapat kurang beragam. Selain itu, Kusno (2007) melakukan desain relief pada benda Onyx dan Marmer. **Kelebihannya** adalah adanya modifikasi bentuk kurva kuadratik Bezier sehingga menghasilkan kreasi model benda onyx dan marmer yang lebih mudah dan variatif. **Kekurangannya** terletak pada benda yang di desain yakni pada Onyx dan Marmer yang tidak melibatkan beberapa hasil deformasi bangun geometri ruang.

Budiono (2011) memodelkan *handle* hanya menggunakan teknik penggabungan beberapa benda geometri ruang. **Kelemahannya** adalah belum ada modifikasi pada permukaan putar sehingga objek yang dihasilkan hanya terbatas pada model *handle* lengkung tunggal. Sedangkan benda geometri yang digunakan masih sederhana sehingga terlihat monoton dan kurang bervariasi. Miftahur (2013) memodelkan *knop* dengan menggunakan benda geometri ruang dan permukaan putar. Teknik yang digunakan adalah melakukan deformasi pada tabung, prisma segienam dan modifikasi permukaan putar. **Kelebihannya** adalah adanya modifikasi bentuk kurva kuadratik Bezier sehingga menghasilkan kreasi model *knop* yang lebih mudah dan variatif. **Kekurangannya** adalah fabrikasi *knop* hanya dilakukan pada benda geometri ruang berupa tabung dan prisma segienam. Selain itu, relief *knop* yang ditawarkan harus di modifikasi kembali pada permukaan putar kurvanya.

Sehubungan dengan beberapa penelitian sebelumnya terutama pada persoalan desain objek benda industri, penelitian ini dimaksudkan untuk mengembangkan atau membuat konstruksi baru melalui pemilihan parameter pengubah bentuk permukaan putar Bezier.

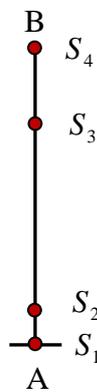
## 1.2 Batasan Masalah

Penelitian ini difokuskan untuk mencari formula kurva Hermit yang fleksibel untuk desain benda industri (onyx dan marmer). Kurva Hermit yang dimaksud adalah berderajat lima. Formula Hermit yang sudah diperoleh kemudian dilakukan modifikasi untuk mencari formula Kurva Bezier berderajat enam. Selanjutnya dilakukan simulasi komputer dan fabrikasi prototip pada benda industri tersebut dengan menggunakan bahasa pemrograman **Maple 17.0**.

### 1.3 Rumusan Masalah

Sehubungan dengan masalah-masalah yang diuraikan pada bagian latar belakang, diajukan konstuksi baru pada objek benda industri sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk kurva bezier berderajat enam dari hasil modifikasi kurva bezier berderajat lima pada desain benda industri?
2. Bagaimana model-model permukaan putar kurva bezier berderajat enam dari hasil modifikasi kurva bezier berderajat lima pada desain benda industri?
3. Bagaimana melalui pemberian variasi parameter jari-jari pada masing-masing titik dapat dibangun bentuk benda industri kerajinan marmer yang multifaset bersumbu simetri sehingga diperoleh permukaan yang datar dan lengkung?

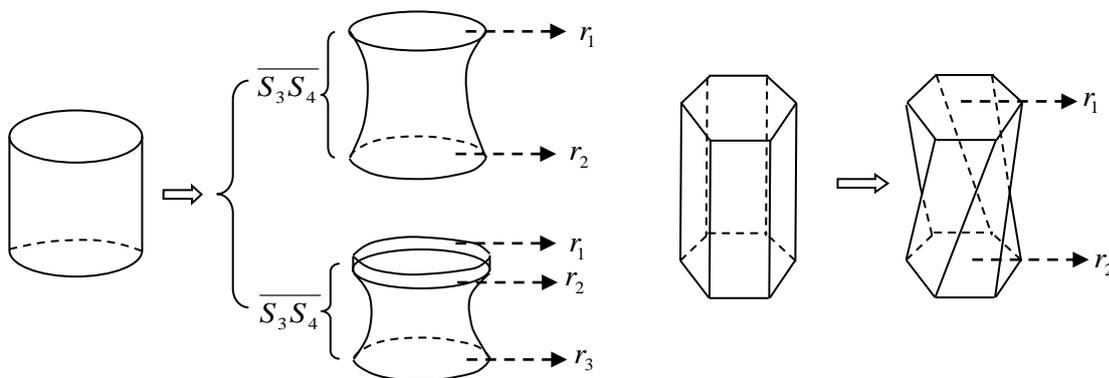


(a) Data awal

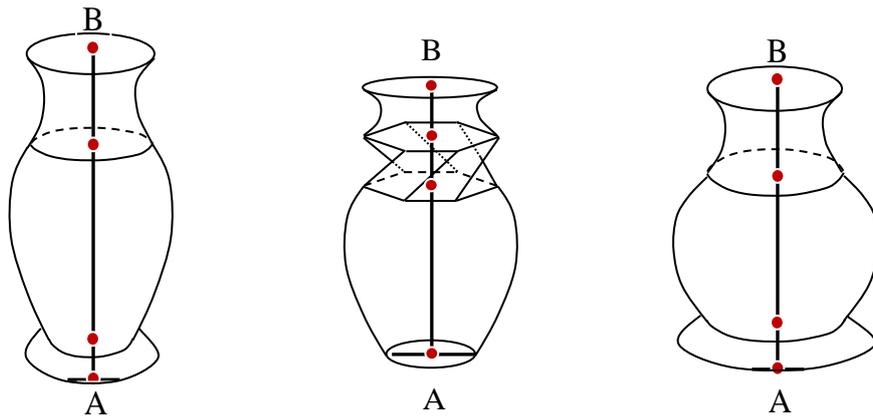


(b) Komponen pembangun

Gambar 1.2 Komponen awal kerajinan industri berbahan marmer



(a) Contoh hasil deformasi tabung dan prisma segienam penyusun benda berbahan marmer pada bagian permukaan



Gambar 1.3 Contoh model kerajinan industri berbahan marmer yang bervariasi

#### 1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui bentuk kurva bezier berderajat enam dari hasil modifikasi kurva bezier berderajat lima pada desain benda industri;
2. Membuat model-model permukaan putar kurva bezier berderajat enam dari hasil modifikasi kurva bezier berderajat lima pada desain benda industri;
3. Mendapatkan prosedur untuk membangun beberapa benda dasar sebagai komponen penyusun benda marmer yang multifaset bersumbu simetri sehingga diperoleh permukaan benda yang datar dan lengkung melalui pemberian variasi parameter jari-jari pada masing-masing titik.

#### 1.5 Manfaat

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dalam penelitian ini antara lain:

1. Dengan bantuan komputer, dapat dihasilkan beberapa prosedur baru model benda industri yang bervariasi dan simetris;
2. Memberikan informasi kepada produsen tentang beberapa daftar model benda industri sehingga menambah pilihan model yang sudah ada sebelumnya.



Gambar 1.4 Contoh model kerajinan industri berbahan tanah liat yang ada di pabrik keramik Dinoyo dengan motif sederhana

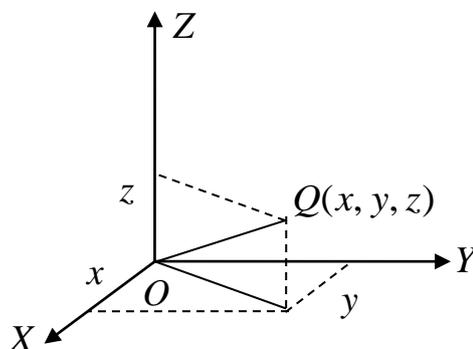
## BAB II. STUDI PUSTAKA

Sehubungan dengan keperluan mencari solusi permasalahan konstruksi objek kerajinan marmer melalui penggabungan beberapa benda geometri ruang dan permukaan putar, pada bab ini disajikan beberapa teori dasar yang berkaitan dengan prosedur tersebut. Adapun teori dasarnya adalah penyajian titik dan segmen garis di ruang, hitung sudut di antara dua segmen garis, konstruksi benda geometri ruang, operasi geometri, serta permukaan interpolasi. Hal ini untuk mempermudah dalam proses pembuatan beragam konstruksi kerajinan marmer serta menyajikannya pada program Maple 17.

### 2.1 Titik dan Segmen Garis

#### 2.1.1 Penyajian Titik dan Segmen Garis di Ruang

Misalkan  $Q$  adalah sebarang titik di ruang dinyatakan oleh  $Q(x,y,z)$  dengan  $x$ ,  $y$  dan  $z$  bilangan real. Jika diketahui pasangan bilangan real  $(x,y,z)$  maka dapat ditentukan tepat satu titik  $Q$  dengan sumbu koordinat  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$  di ruang (Gambar 2.1).



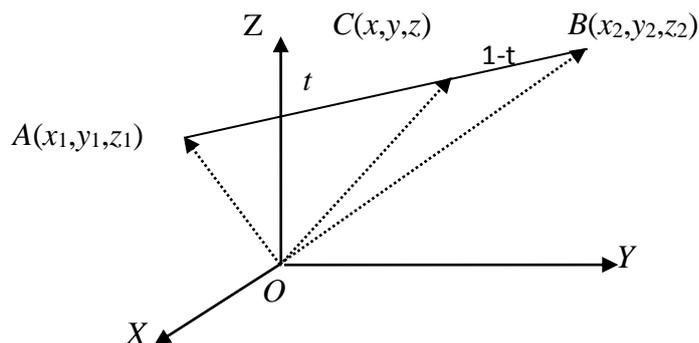
Gambar 2.1 Penyajian titik di ruang

Menurut Kusno (2002), penyajian segmen garis  $\overline{AB}$  yang dibangun oleh dua titik berbeda  $A(x_1, y_1, z_1)$  dan  $B(x_2, y_2, z_2)$  di ruang, sebagai titik ujung-titik ujung segmen garis, dapat dinyatakan sebagai tempat kedudukan titik-titik  $C(x, y, z)$  jika dan hanya jika

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \text{ atau}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle (1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2 \rangle \quad (2.1)$$

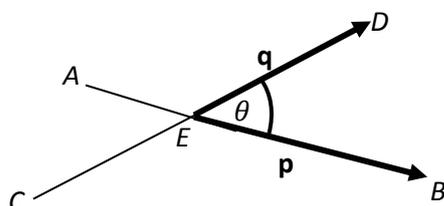
dengan  $t \in [0,1]$  seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Penyajian segmen garis di ruang

### 2.1.2 Hitung Sudut di Antara Dua Segmen Garis

Setiap dua segmen garis yang saling berpotongan akan membentuk sudut. Titik perpotongan dua segmen garis tersebut dinamakan titik sudut. Sudut diantara dua segmen garis didefinisikan sebagai sudut terkecil yang dibentuk oleh interseksi kedua segmen garis. Misalkan diketahui garis  $\overline{AB}$  dan garis  $\overline{CD}$  saling berpotongan pada titik  $E$ , maka yang dinamakan ukuran sudut kedua segmen garis tersebut adalah  $\angle BED$  dan  $\angle AEC$  dinotasikan  $\theta$  (Gambar 2.3)



Gambar 2.3 Ukuran sudut pada dua segmen garis yang saling berpotongan

## 2.2 Konstruksi Bentuk Persegi

Segiempat didefinisikan sebagai poligon yang mempunyai empat sisi. Pada bagian ini dibahas teknik membangun persegi. Persegi merupakan bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah rusuk  $s$  sama panjang dan memiliki empat buah sudut yang semuanya adalah sudut siku-siku (Gambar 2.4). Untuk membangun bentuk persegi dengan menggunakan hitungan vektor, tahapannya sebagai berikut:

- i. ambil 2 titik berbeda di bidang  $XOY$ , misalkan titik  $A(x_A, y_A)$  dan  $B(x_B, y_B)$ ;
- ii. buat segmen garis  $\overline{AB}$  dengan persamaan (2.1);
- iii. hitung koordinat titik  $C$  melalui kondisi:  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k \mathbf{n}_{\overline{AB}}$

dengan  $\mathbf{n}_{\overline{AB}}$  merupakan normal  $\overline{AB}$  dalam bentuk  $\mathbf{n}_{\overline{AB}}$

$$= \frac{\langle (y - y_A), -(x - x_A) \rangle}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y - y_A)^2}} \text{ dan } k \text{ ditetapkan, sehingga: } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k \mathbf{n}_{\overline{AB}}$$

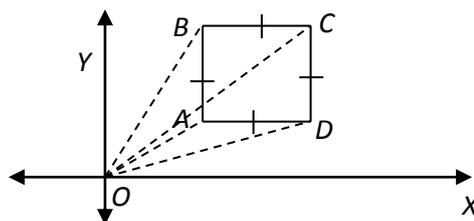
$$= \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + k \left( \frac{\langle (y - y_A), -(x - x_A) \rangle}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y - y_A)^2}} \right);$$

iv. buat segmen garis  $\overline{AC}$  dengan persamaan (2.1);

v. hitung koordinat titik  $D$  melalui kondisi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} \\ &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_C + x_B - x_A \\ y_C + y_B - y_A \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

vi. buat segmen garis  $\overline{BD}$  dan  $\overline{CD}$  dengan persamaan (2.1).



Gambar 2.4 Persegi

## 2.3 Penyajian Beberapa Bentuk Kuadratis Bidang

### 2.3.1 Lingkaran

Kusno (2010) di dalam Purwanto (2004) menjelaskan bahwa suatu lingkaran adalah himpunan titik-titik di bidang yang berjarak sama dari suatu titik tetap. Titik tetap tersebut dinamakan pusat lingkaran dan jarak yang sama dinamakan jari-jari lingkaran. Misal suatu lingkaran berpusat di titik  $O(0,0)$  dan titik  $A(x,y)$  merupakan sebarang titik pada lingkaran (Gambar 2.5.a) maka bentuk persamaan lingkarannya adalah

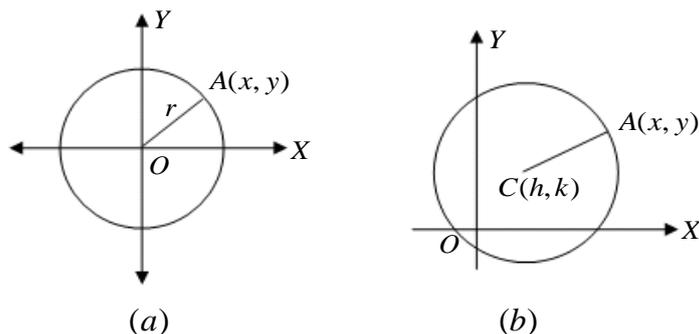
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ atau } x^2 + y^2 = r^2 \quad (2.2)$$

dengan  $r$  adalah jari-jari lingkaran. Sedangkan lingkaran yang berpusat di  $C(h,k)$  dan berjari-jari  $r$  (Gambar 2.3.b) memiliki persamaan

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \text{ atau } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (2.3)$$

jika persamaan (2.3) diuraikan maka diperoleh bentuk

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$



Gambar 2.5 Lingkaran

Jadi persamaan umum lingkaran dapat ditulis sebagai

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.4)$$

dengan

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

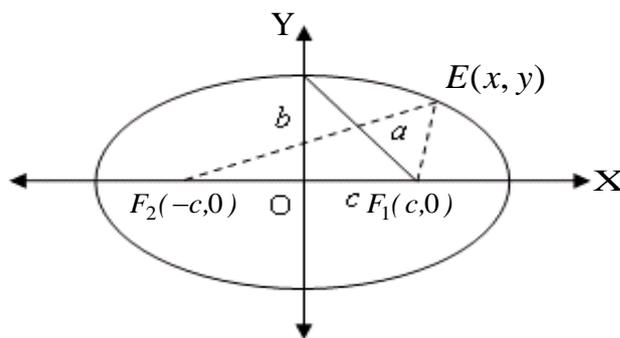
$F = h^2 + k^2 - r^2$  atau dapat juga dalam bentuk parametrik:

$$L(t) = \langle a \cos t, a \sin t \rangle \quad (2.5)$$

dengan  $0 \leq t \leq 2\pi$  dan  $a$  sebagai jari-jari lingkaran.

### 2.3.2 Elips

Elips adalah himpunan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu (fokus elips) besarnya tetap (Kusno, 2002). Misal  $F_1(c, 0)$  dan  $F_2(-c, 0)$  adalah titik fokus dari elips dimana jumlah jarak titik-titik fokus dengan suatu titik  $E(x, y)$  pada elips adalah  $\overline{EF_1} + \overline{EF_2} = 2a$  (Gambar 2.6).



Gambar 2.6 Elips

Jumlah jarak titik pada elips tersebut dapat diuraikan menjadi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (2.6)$$

jika persamaan (2.5) disederhanakan maka diperoleh

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (2.7)$$

dari gambar diketahui bahwa  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan umum elips yang berpusat di titik (0,0) dengan fokus elips berada pada sumbu  $X$ . Dalam bentuk parametrik, formula untuk elips dinyatakan sebagai

$$E(t) = \langle a \cos t, b \sin t \rangle \quad (2.9)$$

dengan  $0 \leq t \leq 2\pi$  dan  $a, b$  sebagai jari-jari mayor dan minor

## 2.4 Penyajian Benda-Benda Geometri Ruang

### 2.4.1 Penyajian Bola

Bola adalah tempat kedudukan titik-titik dalam ruang yang berjarak sama terhadap titik tertentu (Kusno, 2003). Titik tertentu tersebut dinamakan pusat bola, ruas garis dari pusat ke titik pada bola disebut jari-jari. Semua ruas garis penghubung dua titik pada bola yang melalui pusat disebut diameter (garis tengah). Pada bagian ini dijelaskan mengenai persamaan bola dalam bentuk parametrik jika diketahui bola dengan pusat  $Q(a,b,c)$  dan  $PQ = r$ , maka bentuk persamaan parametrik bola dapat dinyatakan sebagai berikut (Gambar 2.7).

Persamaan bola:

$$\mathbf{B}(\phi, \theta) = \overrightarrow{OQ} + \mathbf{S}(\phi, \theta)$$

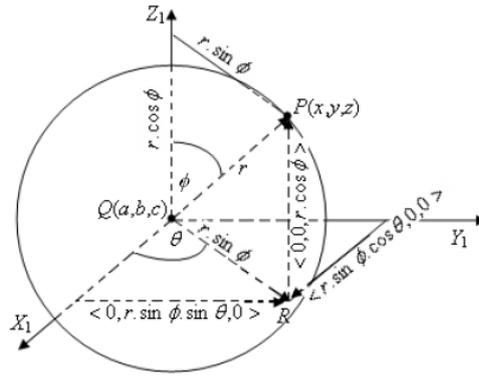
dengan  $\overrightarrow{OQ} = \langle a, b, c \rangle$  atau

$$\mathbf{B}(\phi, \theta) = \langle r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta \rangle$$

dengan demikian persamaan parametrik bola dengan pusat  $Q(a,b,c)$  dan jari-jari  $r$ , adalah:

$$\mathbf{B}(\phi, \theta) = \langle r \sin \phi \cos \theta + a, r \sin \phi \sin \theta + b, r \cos \theta + c \rangle \quad (2.10)$$

dengan  $0 \leq \phi, \theta \leq 2\pi$ , sedangkan  $r, a, b$  dan  $c$  adalah konstanta real.



Gambar 2.7 Bola dengan pusat  $Q(a,b,c)$  dan jari-jari  $r$

Dalam kasus bola dengan pusat sepanjang sumbu  $Y$ , persamaan bola dinyatakan sebagai

$$\mathbf{B}(\phi, \theta) = \langle r \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta + 0, r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta + y, r \cdot \cos \phi + 0 \rangle \tag{2.11}$$

dan persamaan parametrik bola dengan sumbu pusat  $X$ , yaitu

$$\mathbf{B}(\phi, \theta) = \langle r \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta + x, r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta + 0, r \cdot \cos \phi + 0 \rangle \tag{2.12}$$

di lain pihak jika diinginkan suatu potongan bola dengan pusat  $Q(a,b,c)$  yang dipotong tegak lurus terhadap sumbu  $x$ ,  $y$ , atau  $z$ , maka potongan bola dapat ditentukan melalui persamaan (2.10), (2.11) dan (2.12) dengan parameter  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  dan  $\phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}$

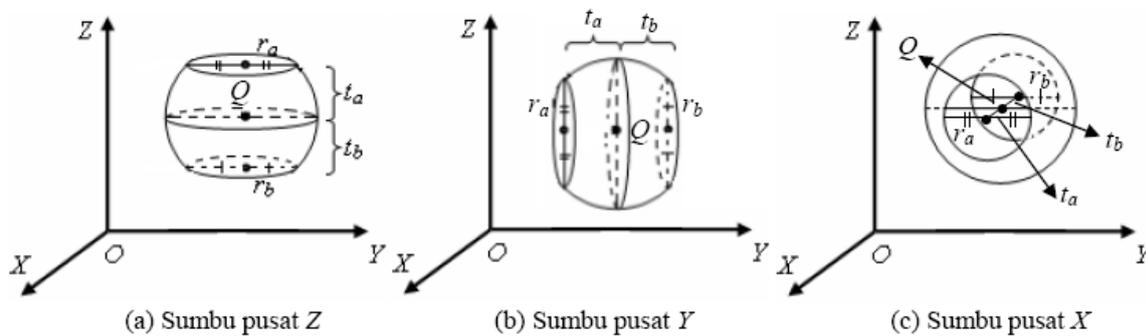
jari-jari alas pertama =  $r_a = r \cdot \sin(\phi, \min)$ ,

jari-jari alas kedua =  $r_b = r \cdot \sin(\phi, \max)$ ,

tinggi alas pertama =  $t_a = r \cdot \cos(\phi, \min)$ ,

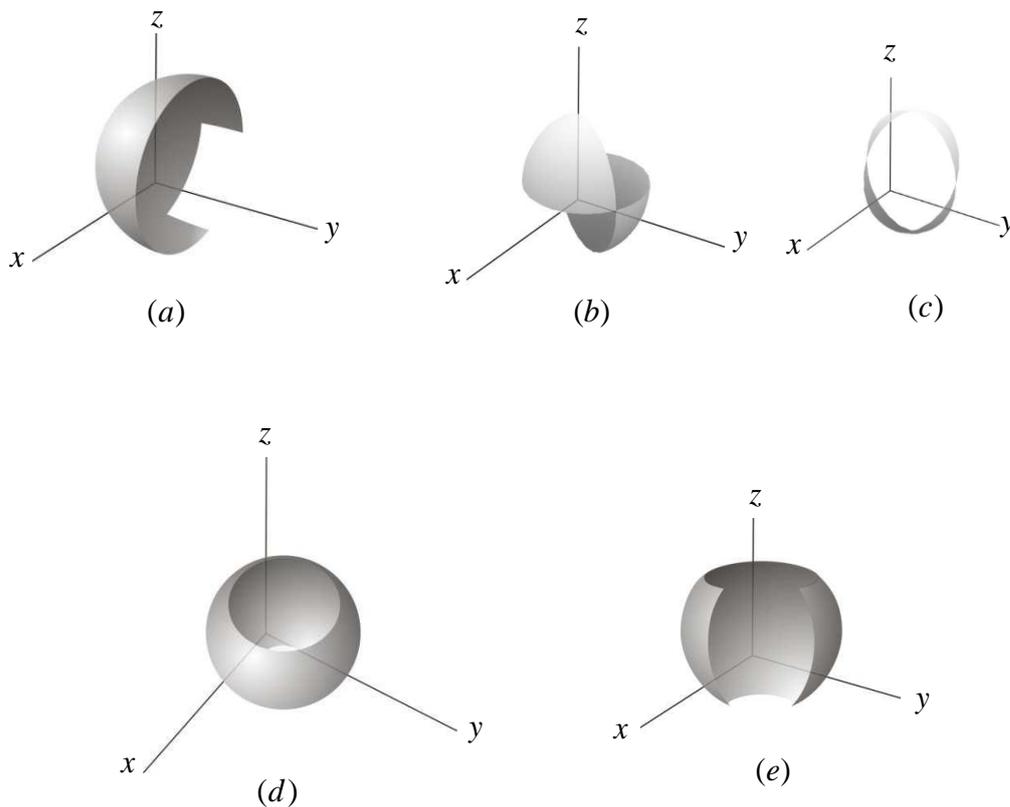
tinggi alas kedua =  $t_b = r \cdot \cos(\phi, \max)$ .

Hasil dari bentuk keratan bola dengan sumbu pusat  $Z$ ,  $Y$ , dan  $X$  masing-masing ditunjukkan pada Gambar 2.8 a,b,c.



Gambar 2.8 Keratan bola dengan pusat  $Q(a,b,c)$

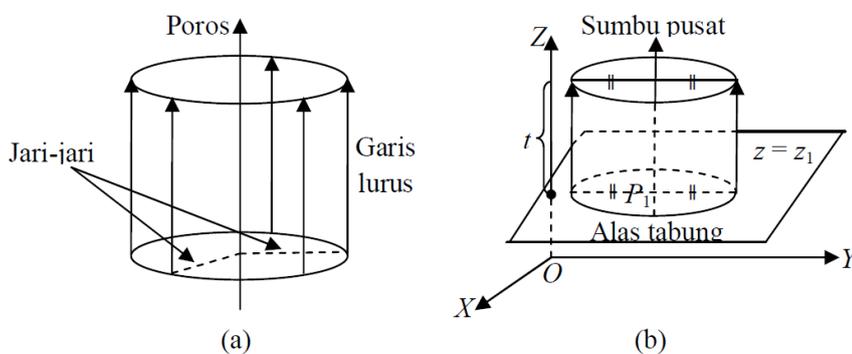
Dari persamaan (2.12) jika diambil batasan  $\phi$  dan  $\theta$  yang berbeda maka akan didapat bermacam-macam bentuk potongan bola seperti pada Gambar 2.9



Gambar 2.9 Beberapa bentuk potongan bola

### 2.4.2 Penyajian Tabung

Tabung dapat dibangun oleh garis lurus yang sejajar dengan garis lurus tertentu (poros) yang bergerak sejajar dengan jarak konstan yang disebut jari-jari (Suryadi, 1986:105). Tabung juga dapat diartikan sebagai benda ruang yang berasal dari lingkaran sebagai alas tabung yang bergerak secara paralel terhadap sumbu pusat sepanjang  $t$ . Suatu tabung dikatakan tabung tegak jika poros ataupun sumbu pusatnya tegak lurus terhadap alas.



Gambar 2.10 Tabung tegak

Jika diketahui sebuah tabung tegak dengan pusat alas  $P_1(x_1, x_2, x_3)$  jari-jari  $r$  dan tinggi  $t$ , maka dapat dicari persamaan parametrik tabung sebagai berikut.

a. Jika alas terletak pada bidang  $z = z_1$  dan sumbu pusat tabung sejajar sumbu Z, maka untuk mencari persamaan parametrik tabung dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut :

1. menentukan persamaan parametrik lingkaran dengan pusat  $P_1(x_1, x_2, x_3)$  jari-jari  $r$  dan terletak pada bidang  $z = z_1$  yaitu

$$\mathbf{L}(\theta) = \langle r \cdot \cos \theta + x_1, r \cdot \sin \theta + y_1, z_1 \rangle$$

dengan  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $\theta$  adalah parameter dan  $r$  suatu konstanta real;

2. mentranslasikan lingkaran dari  $z_1$  sampai  $z_1 + t$  maka terbentuk sebuah tabung dengan persamaan parametrik

$$\mathbf{T}(\theta, z) = \langle r \cdot \cos \theta + x_1, r \cdot \sin \theta + y_1, z \rangle$$

dengan  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  dan  $z_1 \leq z \leq z_1 + t$ ;  $\theta, z$  adalah parameter dan  $x_1, y_1, z_1, r$  adalah suatu konstanta real;

b. Jika alas terletak pada bidang  $x = x_1$  dan sumbu pusat tabung sejajar sumbu X, maka untuk mencari persamaan parametrik tabung dapat dilakukan dengan mengulangi langkah (a) sehingga didapatkan:

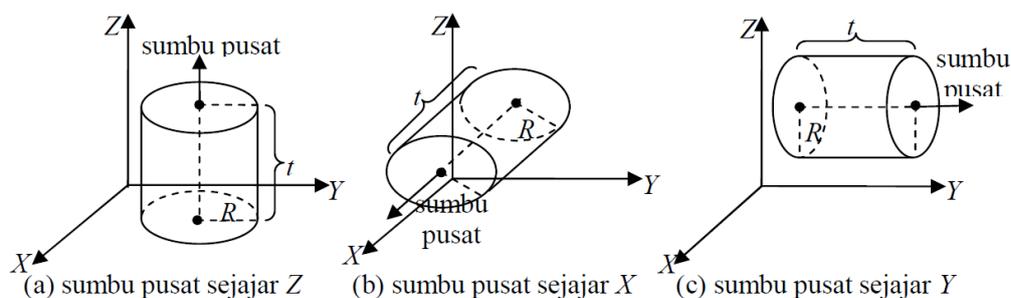
$$\mathbf{T}(\theta, x) = \langle x, r \cdot \sin \theta + y_1, z_1 + r \cdot \cos \theta \rangle$$

dengan  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  dan  $x_1 \leq x \leq x_1 + t$ ;  $\theta, z$  adalah parameter dan  $x_1, y_1, z_1, r$  adalah suatu konstanta real;

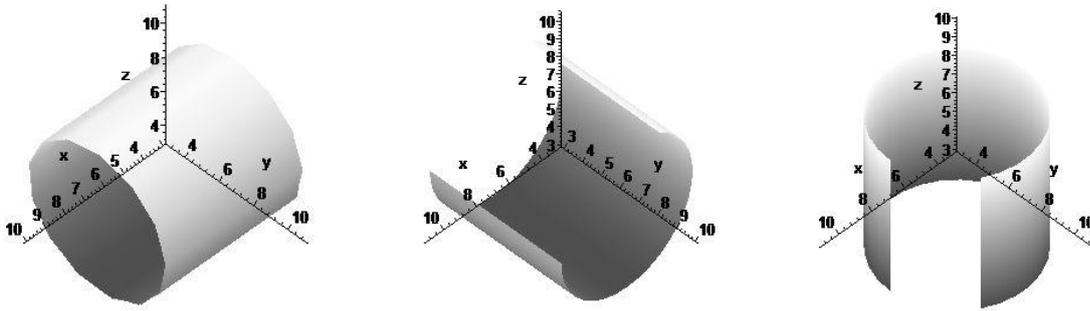
c. Jika alas terletak pada bidang  $y = y_1$  dan sumbu pusat tabung sejajar sumbu Y, maka untuk mencari persamaan parametrik tabung dapat dilakukan dengan mengulangi langkah (a) sehingga diperoleh:

$$\mathbf{T}(\theta, y) = \langle r \cdot \cos \theta + x_1, y, r \cdot \sin \theta + z_1 \rangle$$

dengan  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  dan  $y_1 \leq y \leq y_1 + t$ ;  $\theta, z$  adalah parameter dan  $x_1, y_1, z_1, r$  adalah suatu konstanta real (Bastian, 2011)



Gambar 2.11 Tabung dengan beragam sumbu pusat



Gambar 2.12 Beberapa bentuk potongan tabung

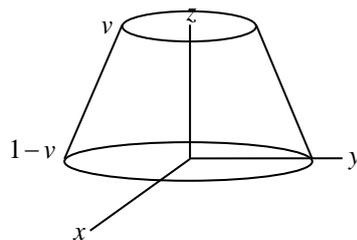
### 2.4.3 Penyajian kerucut

Permukaan kerucut (permukaan konik) adalah suatu permukaan yang dibangun oleh suatu garis (disebut generatrik) digerakkan melalui sebuah titik dan menyinggung sepanjang kurva satu arah  $c$  dengan kondisi geometrik tertentu (Kusno, 2009). Titik tetap ini selanjutnya disebut puncak kerucut.

Untuk mendapatkan sebuah kerucut terpancung dengan alas lingkaran  $c_1(u) = \langle r \cdot \cos u, r \cdot \sin u, z \rangle$  dan  $c_2(u) = \langle r \cdot \cos u, r \cdot \sin u, z \rangle$  dengan batasan  $0 \leq u \leq 2\pi$  dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$K(u, v) = (1 - v)c_1(u) + vc_2(u) \quad (2.13)$$

dengan  $0 \leq v \leq 1$



Gambar 2.13 Kerucut

Dari persamaan (2.13) dapat dibuat kerucut dengan titik  $v$  sebagai puncak dan  $1-v$  sebagai alas. Contoh keratan kerucut dengan batasan  $u$  yang berbeda ditunjukkan oleh Gambar 2.14 di bawah ini.



Gambar 2.14 Keratan Kerucut

#### 2.4.4 Penyajian Prisma Segienam

Prisma adalah polihedron yang dibatasi oleh dua bidang sejajar dan beberapa bidang perpotongan dengan garis potong sejajar. Bagian bidang yang memotong dua bidang (alas prisma) disebut sisi lateral (tegak) dari prisma. Sedangkan garis-garis potong yang sejajar adalah rusuk prisma. Suatu prisma dikatakan prisma tegak jika rusuk-rusuk tegaknya tegak lurus terhadap bidang alas. Tinggi prisma ditentukan oleh jarak antara dua bidang sejajar.

Jika diketahui sebuah poligon segienam dengan titik  $K_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $K_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $K_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $K_4(x_4, y_4, z_4)$ ,  $K_5(x_5, y_5, z_5)$ , dan  $K_6(x_6, y_6, z_6)$  maka dapat dibuat sebuah prisma tegak segienam dengan tinggi prisma adalah  $t$  melalui tahapan berikut (Bastian, 2011).

- a. Menetapkan tiga titik  $K_1, K_2, K_3$  dan vektor-vektor  $\overrightarrow{PQ}$ , dengan  $\overrightarrow{RQ}$

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{K_3K_2} = \langle x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3 \rangle$$

- b. Menghitung vektor normal satuan bidang alas ( $n_{a_u}$ ) didapat

$$n_{a_u} = \left\langle \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right\rangle$$

dengan persamaan  $a, b$ , dan  $c$  sebagai berikut :

$$a = y_1(z_3 - z_2) + y_2(z_1 - z_3) + y_3(z_2 - z_1)$$

$$b = x_1(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_2)$$

$$c = x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)$$

- c. Menranslasi poligon tersebut setinggi  $t$  dengan arah sejajar  $n_{a_u} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ,

didapatkan alas atas prisma bertitik sudut  $K'_1, K'_2, K'_3, K'_4, K'_5$ , dan  $K'_6$  dengan formula

$$\overrightarrow{OK'_1} = \overrightarrow{OK_1} + tn_{a_u} \Rightarrow \overrightarrow{OK'_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OK'_2} = \overrightarrow{OK_2} + tn_{a_u} \Rightarrow \overrightarrow{OK'_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

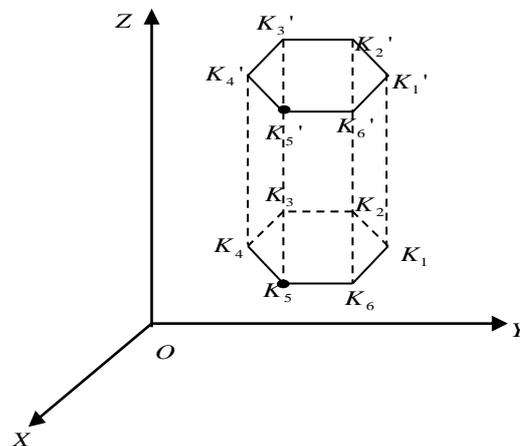
$$\overrightarrow{OK'_3} = \overrightarrow{OK_3} + tn_{a_u} \Rightarrow \overrightarrow{OK'_3} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK'_4} &= \overrightarrow{OK_4} + tn_{a_u} \Rightarrow \overrightarrow{OK'_4} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OK'_5} &= \overrightarrow{OK_5} + tn_{a_u} \Rightarrow \overrightarrow{OK'_5} = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OK'_6} &= \overrightarrow{OK_6} + tn_{a_u} \Rightarrow \overrightarrow{OK'_6} = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- d. Menginterpolasikan segmen-segmen garis pada bidang alas dengan bidang atas prisma menggunakan persamaan (2.14) sehingga didapatkan bidang segi empat dengan persamaan  $\square$

$$\begin{aligned}S_{K_1K_2K'_1K'_2}(u, v) &= (1 - v)\overrightarrow{K_1K_2}(u) + \overrightarrow{K'_1K'_2}(u) \\ S_{K_2K_3K'_2K'_3}(u, v) &= (1 - v)\overrightarrow{K_2K_3}(u) + v\overrightarrow{K'_2K'_3}(u) \\ S_{K_3K_4K'_3K'_4}(u, v) &= (1 - v)\overrightarrow{K_3K_4}(u) + v\overrightarrow{K'_3K'_4}(u) \\ S_{K_4K_5K'_4K'_5}(u, v) &= (1 - v)\overrightarrow{K_4K_5}(u) + v\overrightarrow{K'_4K'_5}(u) \\ S_{K_5K_6K'_5K'_6}(u, v) &= (1 - v)\overrightarrow{K_5K_6}(u) + v\overrightarrow{K'_5K'_6}(u) \\ S_{K_6K_1K'_6K'_1}(u, v) &= (1 - v)\overrightarrow{K_6K_1}(u) + v\overrightarrow{K'_6K'_1}(u)\end{aligned}$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$  dan  $0 \leq v \leq 1$ ,  $u$  dan  $v$  adalah parameter



Gambar 2.15 Penyajian prisma segi enam beraturan

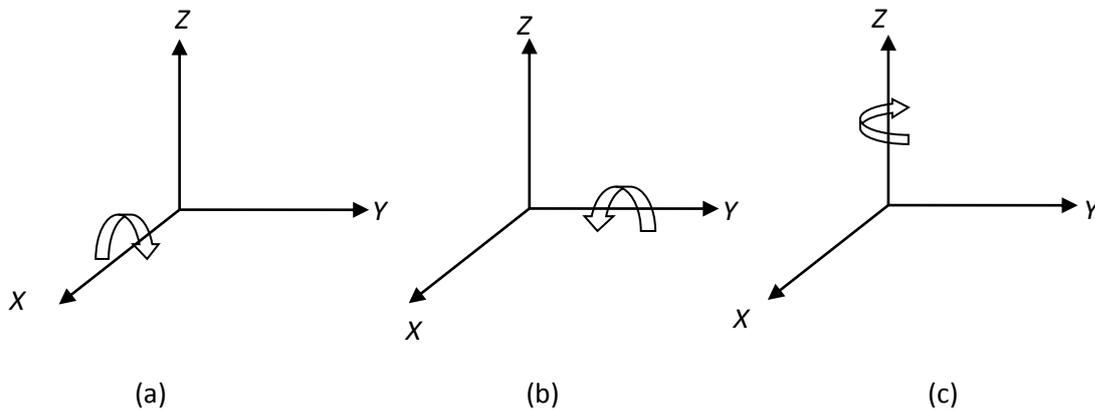
## 2.5 Operasi Geometri

Pada bagian ini dipelajari masalah transformasi titik dari  $R^3$  ke  $R^3$ . Transformasi tersebut terdiri atas rotasi (perputaran), translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), dan dilatasi (penskalaan). Sehubungan dengan keperluan penelitian ini, maka penulis hanya membahas masalah rotasi, translasi, dan refleksi (Rich, 2005).

### 2.5.1 Rotasi

Rotasi di  $R^3$  dapat dilakukan dengan memilih salah satu sumbu koordinat sebagai sumbu putar. Dalam  $R^3$  dikenal 2 sistem koordinat, yaitu sistem koordinat tangan kanan dan sistem koordinat tangan kiri, pada sistem koordinat tangan kanan, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai berlawanan arah rotasi dengan putaran jarum jam. Sedangkan pada sistem koordinat tangan kiri, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai searahnya rotasi dengan putaran jarum jam. Sistem koordinat tangan kanan diilustrasikan sebagai berikut (Gambar 2.16).

Secara umum rotasi dapat dituliskan dalam persamaan:  $QP = RP$ , dimana  $Q$  adalah posisi titik setelah dirotasi,  $R$  adalah matriks rotasi dan  $P$  adalah posisi titik sebelum dirotasi. (Kusno dalam Juliyanto, 2002).



- (a) Rotasi bersudut negatif terhadap sumbu  $X$ ;
- (b) Rotasi bersudut negatif terhadap sumbu  $Y$ ;
- (c) Rotasi bersudut negatif terhadap sumbu  $Z$ .

Gambar 2.16 Ilustrasi rotasi pada sistem koordinat tangan kanan

Apabila  $\alpha$  menunjukkan besarnya sudut rotasi dengan titik pangkal rotasi  $O(0,0,0)$  maka rotasi terhadap masing-masing sumbu dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

Tabel 2.1 Matriks Rotasi

No.	Bentuk Rotasi	Matriks Rotasi
1.	Rotasi terhadap sumbu $X$	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$

No.	Bentuk Rotasi	Matriks Rotasi
2.	Rotasi terhadap sumbu Y	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
3.	Rotasi terhadap sumbu Z	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$

### 2.5.2 Translasi

Translasi adalah perpindahan kedudukan sebarang titik dengan penambahan besaran pada arah sumbu X, Y dan Z. Secara umum, translasi dapat dinyatakan oleh persamaan  $Q = P + K$ , dimana  $P$  adalah posisi titik awal,  $Q$  adalah posisi titik setelah ditranslasikan dan  $K$  menunjukkan besarnya pergeseran ke arah sumbu X, Y dan Z. Persamaan translasi dalam bentuk matriks dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

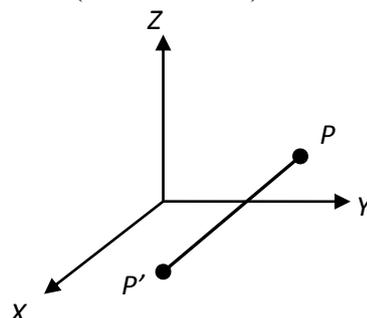
atau dalam bentuk koordinat kartesius dapat dituliskan sebagai

$$(x_q, y_q, z_q) = (x_p + x_k, y_p + y_k, z_p + z_k) \quad (2.14)$$

Translasi bersifat mempertahankan bentuk dan ukuran objek (Kusno dalam Juliyanto, 2002).

### 2.5.3 Refleksi

Refleksi titik  $P(x, y, z)$  di ruang terhadap bidang  $\alpha$  melalui titik asal adalah transformasi yang memetakan  $P$  ke bayangannya  $P'$  terhadap bidang tersebut. Dalam hal ini, kita akan membahas refleksi terhadap bidang-bidang  $x = 0$ ,  $y = 0$  dan  $z = 0$ . Misalkan  $T: R^3 \rightarrow R^3$  transformasi yang memetakan masing-masing titik ke dalam bayangan simetriknya terhadap bidang  $x = 0$  (Gambar 2.17).



Gambar 2.17 Refleksi terhadap bidang  $x = 0$

Adapun matriks transformasinya dapat ditentukan sebagai berikut:

$$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan  $T(\mathbf{e}_1)$ ,  $T(\mathbf{e}_2)$  dan  $T(\mathbf{e}_3)$  maka kita dapatkan matriks transformasinya sebagai berikut (Kusno dalam Juliyanto, 2002).

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks transformasi  $A$  dapat ditentukan persamaan-persamaan refleksi yang melalui titik awal  $P(x_p, y_p, z_p)$ . Adapun persamaan-persamaan refleksinya disajikan pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Persamaan Refleksi

No.	Refleksi Terhadap Bidang	Persamaan Refleksi
1.	$x = 0$	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
2.	$y = 0$	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
3.	$z = 0$	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$

#### 2.5.4 Dilatasi Titik Pada $R^3$

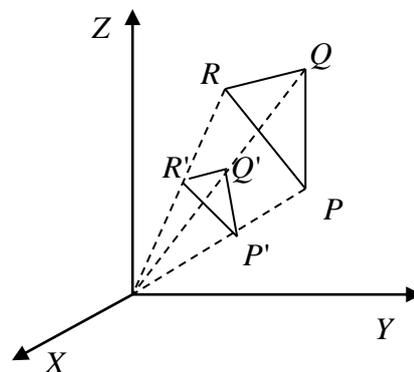
Dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu ( $k$ ) terhadap suatu titik tertentu yang disebut sebagai pusat dilatasi. Dengan kata lain, dilatasi merupakan transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bentuk.

Menurut Kusno (2009), transformasi dilatasi yang memetakan titik  $P(x, y, z)$  ke  $P'(x', y', z')$  didefinisikan dengan bentuk formula berikut :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x \\ k_2 y \\ k_3 z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Dalam hal ini pemilihan harga  $k_1$  menyajikan skala ke arah sumbu  $X$ ,  $k_2$  ke arah sumbu  $Y$  dan  $k_3$  menyajikan skala ke arah sumbu  $Z$ , jika  $k_1 = k_2 = k_3$ , maka peta obyek yang didapat sebangun dengan obyek aslinya (mungkin diperbesar, diperkeci; atau tetap).

Misalkan segitiga  $PQR$  dengan titik-titik sudut  $P(x_1, y_1, z_1)$ ,  $Q(x_2, y_2, z_2)$  dan  $R(x_3, y_3, z_3)$  dilatasi dengan faktor pengali  $k > 1$ , sehingga didapatkan segitiga bayangan  $P'Q'R'$  dengan titik-titik sudut  $P'(kx_1, ky_1, kz_1)$ ,  $Q'(kx_2, ky_2, kz_2)$  dan  $R'(kx_3, ky_3, kz_3)$  seperti terlihat pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Dilatasi dengan  $k > 1$

## 2.6 Interpolasi Diantara Segmen Garis dan Kurva di Ruang

Misalkan terdapat dua segmen garis  $\overline{AB}$  dan  $\overline{CD}$  didefinisikan masing-masing oleh  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$  dan  $D(x_4, y_4, z_4)$  dalam bentuk parametrik  $I_1(u)$  dan  $I_2(u)$ , maka permukaan parametrik hasil interpolasi linier kedua segmen garis tersebut diformulasikan sebagai berikut (Roifah, 2013) :

$$S(u, v) = (1 - v)I_1(u) + vI_2(u) \quad (2.16)$$

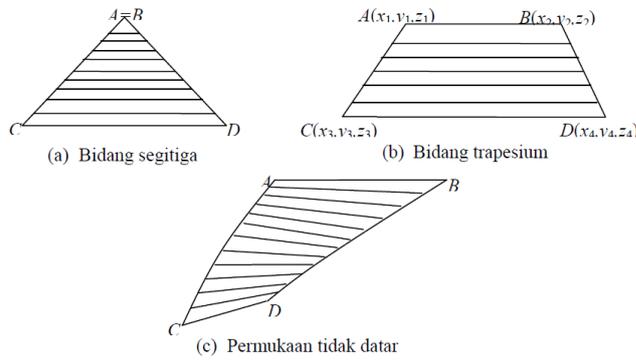
dengan  $0 \leq u \leq 1$  dan  $0 \leq v \leq 1$

Terdapat beberapa kasus khusus bentuk interpolasi linier kedua garis tersebut. Jika  $A = B$  maka hasil interpolasi persamaan (2.19) akan menghasilkan bidang segitiga (Gambar 2.19a) sedangkan jika  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  maka secara umum akan membentuk bidang segiempat (Gambar 2.19b). Jika bidang tersebut dibentuk dari interpolasi dua garis yang bersilang maka menghasilkan permukaan yang tidak datar (dapat berbentuk lengkung maupun puntiran) di sebagian permukaan tersebut (Gambar 2.19c) (Roifah, 2013).

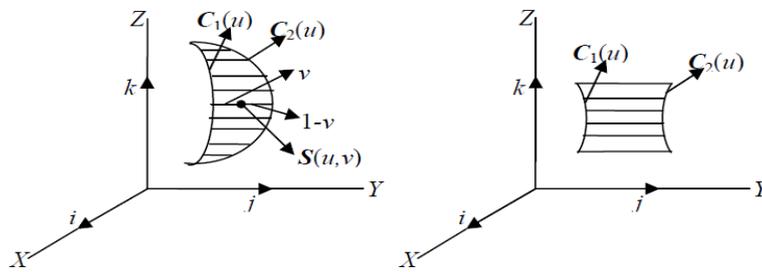
Dilain pihak kita dapat membangun permukaan lengkung hasil interpolasi kurva ruang melalui persamaan berikut :

$$S(u, v) = (1 - v)C_1(u) + vC_2(u) \tag{2.17}$$

dengan  $C_1(u)$  dan  $C_2(u)$  merupakan kurva batas (Gambar 2.20)



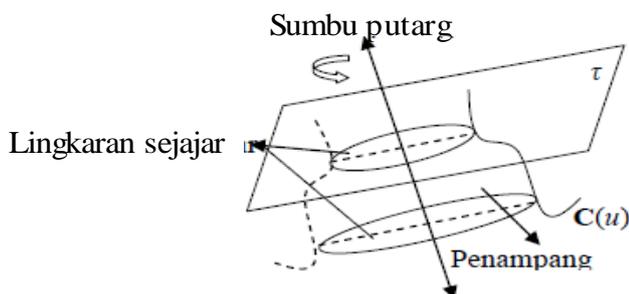
Gambar 2.19 Contoh kasus khusus interpolasi linier dua segmen garis



Gambar 2.20 Interpolasi linier pada kurva

### 2.7 Permukaan Putar Ruang

Menurut Belkhatir (2008) dan Kusno (2009), permukaan putar adalah suatu permukaan yang dibangkitkan oleh suatu kurva ruang  $C(u)$  (sebagai generatrik) diputar mengitari sebuah sumbu putar  $g$  yang disebut sebagai sumbu putar (Gambar 2.21). Dalam membahas permukaan putar, terdapat beberapa istilah yang perlu diketahui. Pertama, bagian-bagian bidang penampang yang melalui sumbu putar dan dibatasi oleh permukaan putar disebut dengan istilah penampang-penampang meridian. Semua penampang-penampang meridian adalah saling kongruen. Sedangkan lingkaran-lingkaran sejajar permukaan putar adalah perpotongan antara bidang-bidang sejajar yang tegak lurus sumbu putar dengan permukaan putar.



Gambar 2.21 Permukaan putar

Misalkan  $C_x(u)$ ,  $C_y(u)$  dan  $C_z(u)$  menyatakan komponen-komponen skalar dari kurva generatrix  $C(u)$ , maka permukaan putar yang dibangkitkan oleh kurva  $C(u)$  dapat diformulasikan sebagai berikut.

- a. Jika kurva generatrix  $C(u)$  pada bidang  $YOZ$  dan sumbu putar  $OZ$ , maka untuk mencari persamaan parametrik permukaan putar dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut (Gambar 2.22a).

1. Tentukan persamaan parametrik kurva  $C(u)$ , yaitu

$$C(u) = \langle C_x(u), C_y(u), C_z(u) \rangle, \quad (2.18)$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$ .

2. Putar kurva  $C(u)$  terhadap sumbu putar  $OZ$ , maka terbentuk sebuah permukaan putar dengan persamaan parametrik

$$S(u,v) = \langle C_x(u) \cos v, C_y(u) \sin v, C_z(u) \rangle, \quad (2.19)$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$  dan  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

- b. Jika kurva generatrix  $C(u)$  pada bidang  $XOY$  dan sumbu putar  $OY$ , maka untuk mencari persamaan parametrik permukaan putar dilakukan dengan mengulangi langkah a dan didapatkan persamaan (Gambar 2.22b)

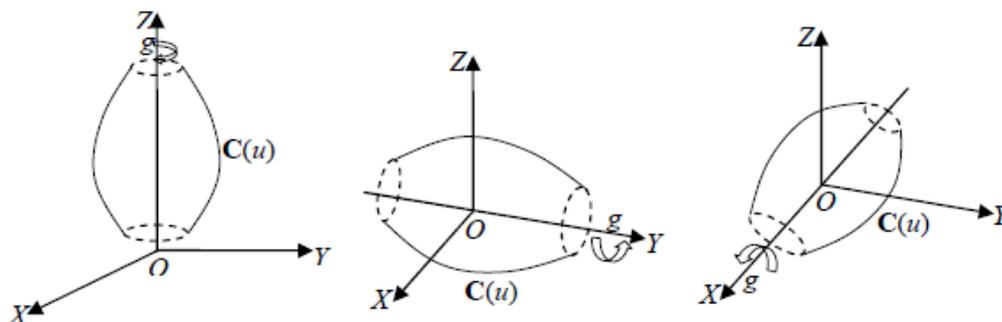
$$S(u,v) = \langle C_x(u) \cos v, C_y(u), C_z(u) \sin v \rangle, \quad (2.20)$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$  dan  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

- c. Jika kurva generatrix  $C(u)$  pada bidang  $XOY$  dan sumbu putar  $OX$ , maka untuk mencari persamaan parametrik permukaan putar dilakukan dengan mengulangi langkah a dan didapatkan persamaan (Gambar 2.22c)

$$S(u,v) = \langle C_x(u), C_y(u) \cos v, C_z(u) \sin v \rangle, \quad (2.21)$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$  dan  $0 \leq v \leq 2\pi$ .



(a) sumbu putar  $OZ$

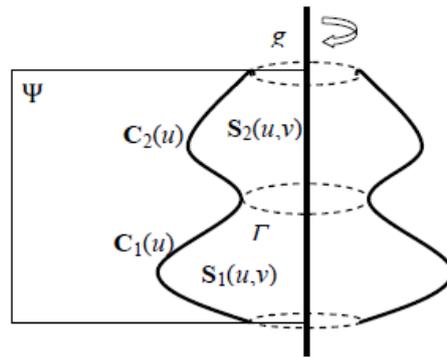
(b) sumbu putar  $OY$

(c) sumbu putar  $OX$

Gambar 2.22 Permukaan putar kurva  $C(u)$

## 2.8 Prinsip Penggabungan Permukaan Putar

Misalkan dua permukaan putar  $S_1(u,v)$  dan  $S_2(u,v)$  memiliki sumbu putar  $g$  dan orientasi arah kurva sama, masing-masing pada bidang meridian  $\psi$  dibangkitkan oleh kurva generatrix  $C_1(u)$  dan  $C_2(u)$ . Masalahnya adalah bagaimana menggabungkan kedua permukaan  $S_1(u,v)$  dan  $S_2(u,v)$  sehingga kontinyu parametrik sepanjang kurva persekutuannya  $\Gamma$  (Gambar 2.23). Dalam hal ini pemilihan  $S_1(u,v)$  dan  $S_2(u,v)$  dapat berupa permukaan putar natural, bentuk standar (berupa potongan bola, elipsoida, paraboloida, hiperboloida, silinder, dan kerucut) ataupun dari permukaan putar Bezier.



Gambar 2.23 Problem penggabungan dua permukaan putar

Jika pada permukaan tersebut masing-masing parameter  $u$  dan  $v$  terdefinisi dalam selang  $u_0 \leq u \leq u_1$  dan  $0 \leq v \leq 2\pi$ , maka untuk mendapatkan kekontinyuan parametrik sepanjang kurva persekutuan lingkaran  $\Gamma$  harus dipenuhi kondisi berikut.

- a. Kontinyu order nol, apabila dipenuhi

$$S_2(u_0, v) = S_1(u_1, v) \text{ atau } C_2(u_0) = C_1(u_1). \quad (2.22)$$

- b. Kontinyu order 1, apabila memenuhi kontinyu order nol dan memenuhi

$$S_2^u(u_0, v) = \lambda_1 S_1^u(u_1, v) \text{ atau } C_2^u(u_0) = \lambda_1 C_1^u(u_1). \quad (2.23)$$

dengan  $\lambda_1$  suatu konstanta.

- c. Kontinyu order 2, apabila memenuhi kontinyu order 1 dan memenuhi

$$S_2^{uu}(u_0, v) = \lambda_2 S_1^{uu}(u_1, v) \text{ atau } C_2^{uu}(u_0) = \lambda_2 C_1^{uu}(u_1). \quad (2.24)$$

dengan  $\lambda_2$  suatu konstanta.

## 2.9 Penyajian Kurva Hermit Kuadratik

Menurut Kusno (2009), kurva Hermit kuadratik dapat dinyatakan sebagai berikut (Gambar 2.24):

$$p(u) = p(0)K_1(u) + p(1)K_2(u) + p''(1)K_3(u) \quad (2.25)$$

dengan:

$$K1(u) = (1 - 2u + u^2),$$

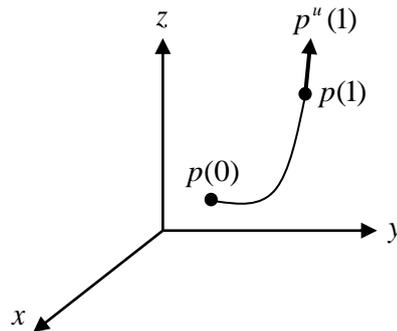
$$K2(u) = (2u - u^2),$$

$$K3(u) = (-u + u^2),$$

$\mathbf{p}(0)$  = titik awal kurva,

$\mathbf{p}(1)$  = titik akhir kurva,

$\mathbf{p}''(1)$  = vektor singgung di  $\mathbf{p}(1)$  dengan  $0 \leq u \leq 1$



Gambar 2.24 Kurva Hermit kuadratik

## 2.10 Penyajian Kurva dan Permukaan Bezier

Kurva Bezier derajat- $n$   $C(u)$  dinyatakan dalam bentuk parametrik berikut:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) \quad , 0 \leq u \leq 1 \quad (2.26)$$

dengan:

$$B_i^n(u) = C_i^n (1-u)^{n-1} u^i ,$$

$$C_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} ,$$

$P_i$  = koefisien geometri / titik kontrol kurva  $C(u)$ .

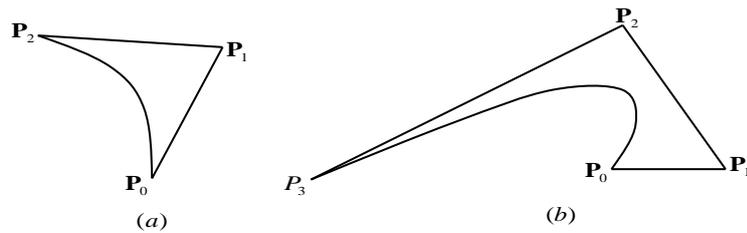
Jika  $n = 2$ , akan dihasilkan kurva Bezier kuadratik dengan persamaan parametrik (Gambar 2.19a):

$$C(u) = (1-u)^2 \mathbf{P}_0 + 2(1-u)u \mathbf{P}_1 + u^2 \mathbf{P}_2 ,$$

sedangkan untuk  $n = 3$  didapatkan empat titik kontrol yaitu  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ , dan  $\mathbf{P}_3$

sehingga persamaan parametrik kurva Bezier kubiknya adalah (Gambar 2.19b):

$$C(u) = (1-u)^3 \mathbf{P}_0 + 3(1-u)^2 u \mathbf{P}_1 + 3(1-u)u^2 \mathbf{P}_2 + u^3 \mathbf{P}_3$$



Gambar 2.25 Kurva Bezier (a) kuadratik (b) kubik

Permukaan Bezier pada prinsipnya identik dengan kurva Bezier. Permukaan Bezier  $S(u,v)$  derajat  $m$  dan  $n$  dinyatakan dalam bentuk parametrik berikut (Gambar 2.25):

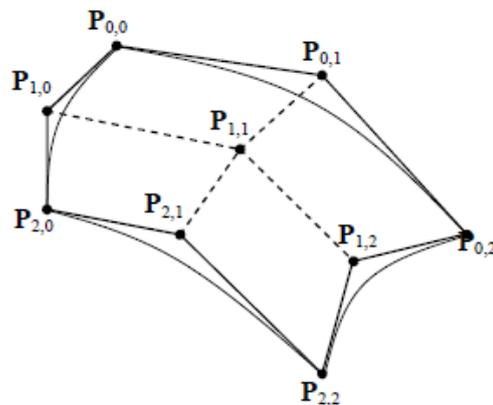
$$S(u,v) = \sum_{i,j=0}^{m,n} P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad , 0 \leq u, v \leq 1 \quad (2.25)$$

dengan:

$$B_i^m(u) = \frac{m!}{i!(m-i)!} (1-u)^{m-1} u^i$$

$$B_j^n(v) = \frac{n!}{j!(n-j)!} (1-v)^{n-1} v^j$$

$P_{ij}$  = koefisien geometri / titik kontrol kurva  $S(u,v)$ .



Gambar 2.26 Permukaan Bezier dengan  $m = 2$  dan  $n = 2$

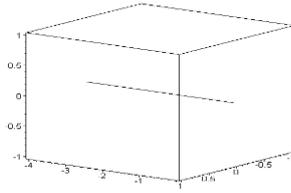
## 2.11 Konstruksi Objek Pada Program Maple 17

Pada bagian ini akan disajikan contoh bahasa pemrograman menggunakan *software* Maple 17 untuk mengkonstruksi objek geometri (Marjuni, 2007).

### 2.11.1 Mengkonstruksi Segmen Garis

Untuk membangun segmen garis  $\overline{AB}$  sejajar terhadap sumbu  $Y$  dengan titik ujungnya  $A(0,-4,0)$  dan  $B(0,4,0)$  pada Maple 17 (Gambar 2.27), maka dapat dituliskan dengan *script* program, yaitu:

```
>AB:=plot3d([(1-t)*0*t*0,(1-t)*(-4)*t*4,(1-t)*0*t*0],t=0..1,v=0..1,
color="blue");
```

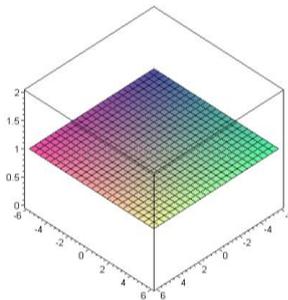


Gambar 2.27 Segmen Garis pada Maple 17

### 2.11.2 Mengkonstruksi Persegi

Misalkan diberikan titik  $A(3,-3,1)$ ,  $B(3,3,1)$ ,  $C(-3,3,1)$ ,  $D(-3,-3,1)$  akan dibangun bidang  $ABCD$  pada Maple 17 (Gambar 2.28), maka dapat dituliskan dengan *script* program:

```
> a:=-2;
a := -2
> b:=2;
b := 2
> ABCD:=plot3d([(1-v)*3*u+v*3*u,v*3,1], u=a..b,
v=a..b):
> plot3d([(1-v)*3*u+v*3*u,v*3,1], u=a..b,v=a..b);
```

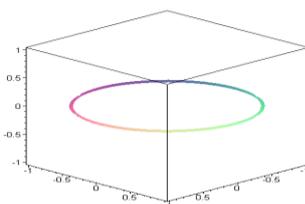


Gambar 2.28 Bidang bentuk persegi pada Maple 17

### 2.11.3 Mengkonstruksi Lingkaran

Membangun bidang lingkaran yang berpusat di titik  $(0,0)$  dengan jari-jari 2 satuan pada Maple 17 (Gambar 2.29) dapat ditunjukkan dengan *script* berikut :

```
> Lingk:=[-cos(t),-sin(t),0,t=0..2*Pi]:
```



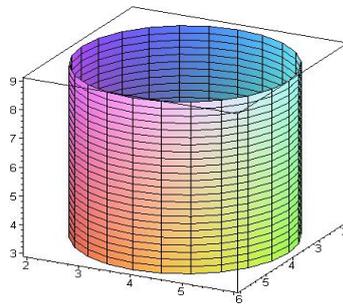
Gambar 2.29 Lingkaran di Ruang

#### 2.11.4 Mengkonstruksi Silinder (Tabung)

Tabung dapat diartikan sebagai benda ruang yang berasal dari lingkaran sebagai alas tabung yang bergerak secara paralel terhadap sumbu pusat sepanjang  $t$ . Suatu tabung dikatakan tabung tegak jika poros ataupun sumbu pusatnya tegak lurus terhadap alas. Contoh penulisan *script* pada Maple 17 untuk membangun silinder (tabung) seperti ditunjukkan pada Gambar 2.30 adalah :

```
>silinder:=plot3d([2*cos(u)+4,2*sin(u)+4,3*v],u=0..2*Pi,v=1.
.3,title="Silinder Terbuka R=2 melalui sumbu (4,4,z=3*v)");
```

Silinder terbentuk dengan jari-jari 2 satuan melalui sumbu  $x=4$ ,  $y=4$ , dan  $z=3v$



Gambar 2.30 Silinder Pada Maple 17

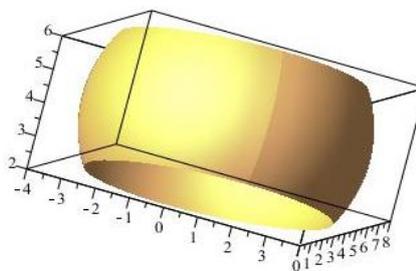
#### 2.11.5 Mengkonstruksi Bola

Membangun Bola menggunakan software maple 17 dengan *script* sebagai berikut:

```
k:=plot3d([4*sin(s)*cos(t)+4,4*sin(s)*sin(t),4*cos(s)+4],s=Pi/
3..2*Pi/3,t=0..2*Pi):
```

*Script* di atas didapatkan potongan bola dengan titik pusat A(4,4,4) dengan jari-jari 4 satuan.

Hasil dari *script* diatas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.31.



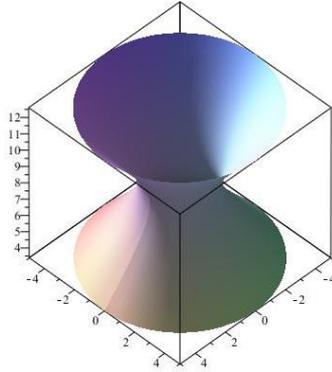
Gambar 2.31 Bola Pada Maple 17

#### 2.11.6 Mengkonstruksi Hiperboloida

Untuk membangun Hiperboloida dengan menggunakan software maple 17 dengan *script* sebagai berikut:

```
k:=plot3d([2*cosh(t)*cos(s),2*cosh(t)*sin(s),2*sinh(t)+8],s=0.  
.2*Pi,t=-Pi/2..Pi/2):
```

dari *script* diatas diperoleh bangun hiperboloida dengan pusat  $(0,0,8)$  dengan jari-jari mayor adalah 2 satuan, untuk hasil dari programnya dapat ditunjukkan pada Gambar 2.32.



Gambar 2.32 Hiperboloida Pada Maple 17

### BAB III. METODE PENELITIAN

#### 3.1 Pendekatan Penelitian

Dalam penelitian ini, pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kepustakaan (*library research*). Hal ini dilakukan dengan cara membaca, memahami, menelaah kemudian mengidentifikasi pengetahuan yang diperoleh dari literatur. Pendekatan kepustakaan (*library research*) untuk membahas kurva Bezier berderajat enam yang dihasilkan dari modifikasi kurva Bezier berderajat lima yang digunakan untuk desain benda **industri kerajinan marmer dan onyx**. Program yang digunakan dalam membantu modifikasi dan desain kurva Bezier adalah **Maple 17.0**

#### 3.2 Tahap-Tahap Penelitian

Tahapan penelitian meliputi 2 kegiatan:

##### 1. Membentuk formula Bezier berderajat enam hasil modifikasi Bezier berderajat lima.

Kegiatan ini dimaksudkan untuk mendesain dan mengubah bentuk kurva sesuai dengan keinginan kita (fleksibel) atas dasar data titik yang dipilih. Tahapannya adalah:

###### a. Membuat Kurva Hermit berderajat enam

Pada pencarian kurva Hermit berderajat enam akan didapatkan matrik Hermit ukuran 6 x 6 atau bisa disebut matrik modifikasi Hermit. Dalam hal ini, diperlukan langkah yaitu menetapkan formula dan data dari 2 titik sebagai kondisi batas kurva, 3 titik kontrol sebagai variabel bebas. Misalkan dipilih kurva parametrik berderajat enam dalam bentuk:

$$P(u) = a_0 + a_1u^1 + a_2u^2 + a_3u^3 + a_4u^4 + a_5u^5 + a_6u^6$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$  dan turunannya terhadap variabel parameter  $u$  sebagai berikut:

$$P_u(u) = a_1 + 2a_2u^1 + 3a_3u^2 + 4a_4u^3 + 5a_5u^4 + 6a_6u^5$$

###### b. Membuat kurva berderajat enam hasil modifikasi Bezier berderajat lima dengan menetapkan titik kontrol poligon baru, yaitu:

$$\Omega = [P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}, NP_{34}, NP_{35}, P_3]$$

$$NP_{31} = \lambda_{31}P_1 + (1 - \lambda_{31})P_0$$

$$NP_{32} = \lambda_{32}P_2 + (1 - \lambda_{32})P_1$$

$$NP_{33} = \lambda_{33}P_3 + (1 - \lambda_{33})P_2$$

$$NP_{34} = \lambda_{34}P_4 + (1 - \lambda_{34})P_3$$

$$NP_{35} = \lambda_{35}P_5 + (1 - \lambda_{35})P_4$$

dan menggunakan matrik ukuran 6 x 6 Hermit.

2. Membuat model-model permukaan putar Bezier berderajat enam hasil modifikasi Bezier berderajat lima. Pada pembuatan model-model permukaan diperlukan beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Menentukan data titik
2. Membangun kurva Bezier berderajat enam hasil modifikasi Bezier berderajat lima dengan menggunakan data titik untuk memberikan kelengkungan
3. Merotasi atau menginterpolasi kurva Bezier
4. Simulasi kurva kuartik Bezier dengan data titik yang ditentukan menggunakan Maple 17

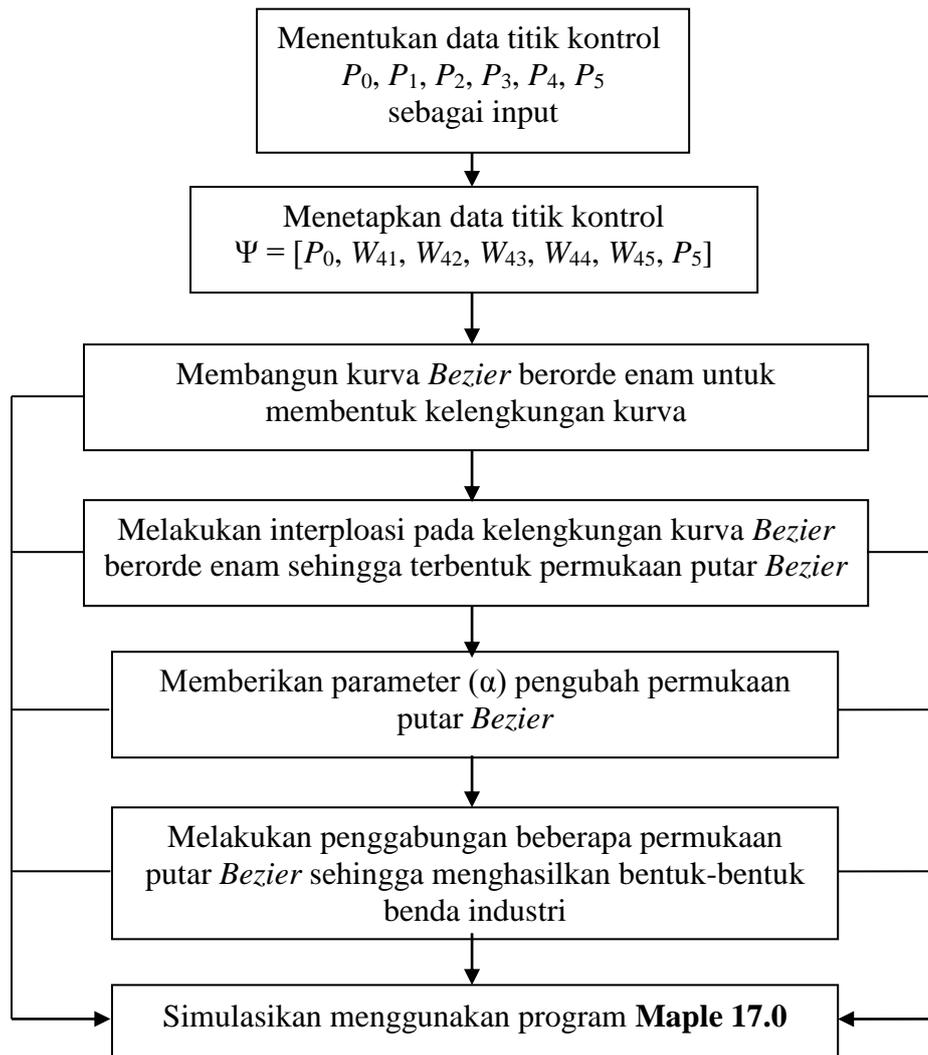
### 3. Studi teknik membangun kesimetrian relief

Pertama membangun beberapa bentuk benda geometri bidang atau ruang (misal: lingkaran, elips, bola, elipsoida, atau lainnya) dan menentukan data titik untuk membangun beberapa kurva poligon Bezier. Perpaduan dan kombinasi dari dua teknik desain tersebut akan terbangun **model-model grafis benda geometri** sebagai bahan dasar untuk memodelisasi relief permukaan benda berbahan marmer tersebut. Variasi model benda geometris ini selanjutnya ditransformasikan secara relief terhadap sumbu simetris (dapat berupa garis, bidang atau kurva) atau titik pusat agar didapatkan bentuk simetris atau juga melalui operasi perputaran. Tahap selanjutnya melakukan desain bentuk relief untuk permukaan yang bersifat datar atau lengkung pada benda-benda kerajinan industri yang di desain.

#### 3.3 Simulasi Komputer dan Fabrikasi Prototip

Hasil formulasi matematik, selanjutnya dilakukan programasi dan desain relief benda. Setelah itu, dilakukan pembuatan contoh prototip benda-benda industri kerajinan dengan mengacu pada model benda yang telah ada di **PABRIK KERAJINAN BENDA INDUSTRI BERBAHAN TANAH LIAT DAN MARMER**, sebuah perusahaan yang bergerak di bidang kebutuhan industri serta data koleksi desain yang ada di **DINOYO MALANG**.

### 3.4 Skema Penelitian



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

## BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Formula Bezier Berderajat Enam Hasil Modifikasi Bezier Berderajat Lima

#### a. Formula Bezier Berderajat Lima

Misalkan kurva kuartik parametrik  $P(u)$  dinyatakan dalam bentuk aljabar sebagai berikut:

$$x(u) = a_x + b_x u + c_x u^2 + d_x u^3 + e_x u^4 + f_x u^5$$

$$y(u) = a_x + b_x u + c_x u^2 + d_x u^3 + e_x u^4 + f_x u^5$$

$$z(u) = a_x + b_x u + c_x u^2 + d_x u^3 + e_x u^4 + f_x u^5$$

Dengan  $u$  dibatasi interval  $0 \leq u \leq 1$ . Pembahasan terhadap nilai  $u$  ini dimaksudkan agar segmen kurva terbangun terbatas dan mudah dikontrol. Ditulis dalam fungsi faktorial (parametrik)

$$p(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5$$

Turunan pertama dari  $P(u)$  adalah

$$p'(u) = b + 2cu + 3du^2 + 4eu^3 + 5fu^4$$

Turunan kedua dari  $P(u)$  adalah

$$p''(u) = 2c + 6du + 12eu^2 + 20fu^3$$

Kemudian ditetapkan dalam kondisi berikut

$$P(u = 0) = a$$

$$P(u = 1) = a + b + c + d + e + f$$

$$P'(u = 0) = b$$

$$P'(u = 1) = b + 2c + 3d + 4e + 5f$$

$$P''(u = 0) = 2c$$

$$P''(u = 1) = 2c + 6d + 12e + 20f$$

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P''(0) \\ P''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Dengan a,b, dan c merupakan vektor-vektor yang ekuivalen dengan koefisien skalar aljabar.

Sehingga,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P''(0) \\ P''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$$M_H \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P''(0) \\ P''(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} \text{ dengan } M_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -15 & 8 & 7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 6 & -3 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Misalkan kurva Bezier berderajat lima dinyatakan dalam bentuk

$$C_5(u) = \sum_{i=0}^5 P_i B_i^5(u)$$

dengan  $B_i^5(u) = \binom{5}{i} (1-u)^{5-i} \cdot u^i$  dan  $0 \leq u \leq 1$ , maka

saat  $i = 0$

$$B_0^5(u) = (1-u)^5$$

saat  $i = 1$

$$B_1^5(u) = 5(1-u)^4 \cdot u$$

saat  $i = 2$

$$B_2^5(u) = 10(1-u)^3 \cdot u^2$$

saat  $i = 3$

$$B_3^5(u) = 10(1-u)^2 \cdot u^3$$

saat  $i = 4$

$$B_4^5(u) = 5(1-u) \cdot u^4$$

saat  $i = 5$

$$B_5^5(u) = u^5$$

diperoleh

$$C_5(u) = \sum_{i=0}^5 P_i B_i^5(u)$$

$$C_5(u) = P_0(1-u)^5 + P_1 5u(1-u)^4 + P_2 10u^2(1-u)^3 + P_3 10u^3(1-u)^2 + P_4 5u^4(1-u) + P_5 u^5$$

$$C_5'(u) = -5P_0(1-u)^4 - 20P_1u(1-u)^3 + 5P_1(1-u)^4 - 30P_2u^2(1-u)^2 + 20P_2u(1-u)^3 - 20P_3u^3(1-u) + 30P_3u^2(1-u)^2 - 5P_4u^4 + 20P_4u^3(1-u) + 5P_5u^4$$

$$C_5''(u) = 20P_0(1-u)^3 + 60P_1u(1-u)^2 - 40P_1(1-u)^3 + 60P_2u^2(1-u) - 120P_2u(1-u)^2 + 20P_2(1-u)^3 + 20P_3u^3 - 120P_3u^2(1-u) + 60P_3u(1-u)^2 - 40P_4u^3 + 60P_4u^2(1-u) + 20P_5u^3$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$ , maka

$$C_5'(0) = 5(P_1 - P_0)$$

$$C_5''(0) = 20(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$$C_5'(1) = 5(P_5 - P_4)$$

$$C_5''(1) = 20(P_3 - 2P_4 + P_5)$$

Titik interpolasi adalah titik pertama dan keenam, sementara titik kedua hingga titik kelima adalah titik aproksimasi. Sehingga, untuk segmen ke- $i$  yang terbentuk titik-titik kontrol  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  didefinisikan sebagai berikut:

$$V(0) = P_0$$

$$V(1) = P_5$$

$$V'(0) = 5(P_1 - P_0)$$

$$V'(1) = 5(P_5 - P_4)$$

$$V''(0) = 20(P_0 - 2P_1 + P_2)$$

$$V''(1) = 20(P_3 - 2P_4 + P_5).$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 V(u) &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5] M_{MH} \begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V'(0) \\ V'(1) \\ V''(0) \\ V''(1) \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -15 & 8 & 7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 6 & -3 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ V(1) \\ V'(0) \\ V'(1) \\ V''(0) \\ V''(1) \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -15 & 8 & 7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 6 & -3 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -15 & 8 & 7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 6 & -3 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_5 \\ 5(P_1 - P_0) \\ 5(P_5 - P_4) \\ 20(P_0 - 2P_1 + P_2) \\ 20(P_3 - 2P_4 + P_5) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 15 & -15 & 8 & 7 & \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 6 & -3 & -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 20 & -40 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -10 & 30 & -30 & 10 & 10 & 0 \\ 5 & -20 & 30 & -20 & -15 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= [1 - 5u + 10u^2 - 10u^3 + 5u^4 - u^5 \quad 5u - 20u^2 + 30u^3 - 20u^4 + 5u^5 \quad 10u^2 - 30u^3$$

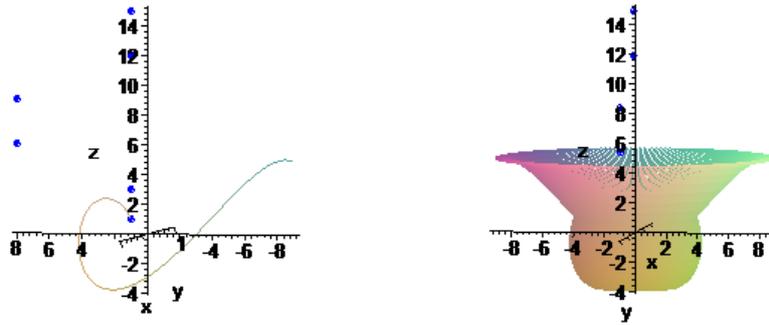
$$+ 30u^4 - 10u^5 \quad 10u^3 - 20u^4 + 10u^5 \quad 10u^3 - 15u^4 + 5u^5 \quad u^5] \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= P_0(1 - 5u + 10u^2 - 10u^3 + 5u^4 - u^5) + P_1(5u - 20u^2 + 30u^3 - 20u^4 + 5u^5) \\ + P_2(10u^2 - 30u^3 + 30u^4 - 10u^5) + P_3(10u^3 - 20u^4 + 10u^5) \\ + P_4(10u^3 - 15u^4 + 5u^5) + P_5(u^5)$$

$M_{MH}$  merupakan matriks yang dihasilkan pada kurva Hermit berderajat lima. Jadi kurva kuartik bezier dalam bentuk parametrik yaitu:

$$V(u) = P_0(1 - 5u + 10u^2 - 10u^3 + 5u^4 - u^5) + P_1(5u - 20u^2 + 30u^3 - 20u^4 + 5u^5) \\ + P_2(10u^2 - 30u^3 + 30u^4 - 10u^5) + P_3(10u^3 - 20u^4 + 10u^5) \\ + P_4(10u^3 - 15u^4 + 5u^5) + P_5(u^5)$$

Dengan  $0 \leq u \leq 1$ . Berikut ini disajikan contoh kurva kuartik bezier dengan titik-titik kontrol  $P_0 = (1,0,1)$ ,  $P_1 = (1,0,3)$ ,  $P_2 = (8,0,6)$ ,  $P_3 = (8,0,9)$ ,  $P_4 = (1,0,12)$ ,  $P_5 = (1,0,15)$ .



Gambar 4.1 Kurva Bezier Berderajat Lima

### b. Modifikasi Kurva Bezier Berderajat Lima menjadi Kurva Bezier Berderajat Enam

$$C_5(u) = \sum_{i=0}^5 P_i B_i^5(u)$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$ . Pandang poligon bezier  $[P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5]$  dengan titik kontrolnya adalah  $W_{51}, W_{52}, W_{53}, W_{54}, W_{55}$  didefinisikan sebagai berikut,

$$W_{51} = \lambda_{51}P_1 + (1 - \lambda_{51})P_0$$

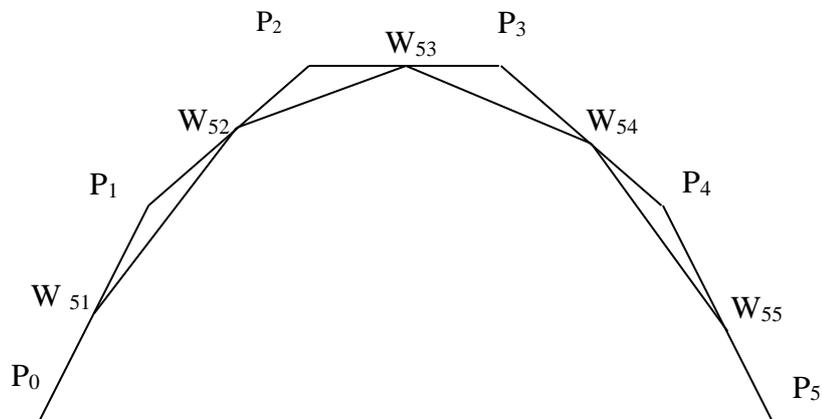
$$W_{52} = \lambda_{52}P_2 + (1 - \lambda_{52})P_1$$

$$W_{53} = \lambda_{53}P_3 + (1 - \lambda_{53})P_2$$

$$W_{54} = \lambda_{54}P_4 + (1 - \lambda_{54})P_3$$

$$W_{55} = \lambda_{55}P_5 + (1 - \lambda_{55})P_4$$

Dengan  $0 \leq \lambda_{51}, \lambda_{52}, \lambda_{53}, \lambda_{54}, \lambda_{55} \leq 1$  dan  $\lambda_{51}, \lambda_{52}, \lambda_{53}, \lambda_{54}, \lambda_{55}$  ditetapkan.



Gambar 4.2 Modifikasi Kurva Bezier Berderajat Lima Menjadi Kurva Bezier Berderajat Enam

Dengan titik-titik kontrol poligon yang baru  $\Omega = [P_0, W_{51}, W_{52}, W_{53}, W_{54}, W_{55}, P_5]$  pada model kurva bezier berderajat lima  $C_5(u)$  dapat dimodifikasi menjadi kurva Bezier berderajat enam  $C_6(u)$  dengan titik-titik kontrol poligon  $\Omega$  dengan cara sebagai berikut,

Misalkan kurva kuartik parametrik  $P(u)$  dinyatakan dalam bentuk aljabar sebagai berikut:

$$x(u) = a_x + b_x u + c_x u^2 + d_x u^3 + e_x u^4 + f_x u^5 + g_x u^6$$

$$y(u) = a_y + b_y u + c_y u^2 + d_y u^3 + e_y u^4 + f_y u^5 + g_y u^6$$

$$z(u) = a_z + b_z u + c_z u^2 + d_z u^3 + e_z u^4 + f_z u^5 + g_z u^6$$

Dengan  $u$  dibatasi interval  $0 \leq u \leq 1$ . Pembahasan terhadap nilai  $u$  ini dimaksudkan agar segmen kurva terbangun terbatas dan mudah dikontrol. Ditulis dalam fungsi vektorial (parametrik)

$$P(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + gu^6$$

Turunan pertama dari  $P(u)$  adalah

$$P'(u) = b + 2cu + 3du^2 + 4eu^3 + 5fu^4 + 6gu^5$$

Turunan kedua dari  $P(u)$  adalah

$$P''(u) = 2c + 6du + 12eu^2 + 20fu^3 + 30gu^4$$

Turunan ketiga dari  $P(u)$  adalah

$$P'''(u) = 6d + 24eu + 60fu^2 + 120gu^3$$

Kemudian ditetapkan dalam kondisi berikut

$$P_0 = P(u = 0) = a$$

$$P_1 = P(u = 1) = a + b + c + d + e + f + g$$

$$P_2 = P'(u = 0) = b$$

$$P_3 = P'(u = 1) = b + 2c + 3d + 4e + 5f + 6g$$

$$P_4 = P''(u = 0) = 2c$$

$$P_5 = P''(u = 1) = 2c + 6d + 12e + 20f + 30g$$

$$P_6 = P'''(u = 0) = 6d$$

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P''(0) \\ P''(1) \\ P'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix}$$

Dengan  $a, b$ , dan  $c$  merupakan vektor-vektor yang ekuivalen dengan koefisien skalar aljabar.

Sehingga,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -15 & 15 & -10 & -5 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 24 & -24 & 15 & 9 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P''(0) \\ P''(1) \\ P'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix}$$

$$M_{MH} \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \\ P''(0) \\ P''(1) \\ P'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix} \text{ dengan } M_{MH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -15 & 15 & -10 & -5 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 24 & -24 & 15 & 9 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Misalkan kurva Bezier berderajat enam dinyatakan dalam bentuk

$$C_6(u) = \sum_{i=0}^6 P_i B_i^6(u)$$

dengan  $B_i^6(u) = \binom{6}{i} (1-u)^{6-i} \cdot u^i$  dan  $0 \leq u \leq 1$ , maka

<p>saat <math>i = 0</math></p> $B_0^6(u) = (1-u)^6$ <p>saat <math>i = 1</math></p> $B_1^6(u) = 6(1-u)^5 \cdot u$	<p>saat <math>i = 2</math></p> $B_2^6(u) = 15(1-u)^4 \cdot u^2$ <p>saat <math>i = 3</math></p> $B_3^6(u) = 20(1-u)^3 \cdot u^3$ <p>saat <math>i = 4</math></p>	$B_4^6(u) = 15(1-u)^2 \cdot u^4$ <p>saat <math>i = 5</math></p> $B_5^6(u) = 6(1-u) \cdot u^5$ <p>saat <math>i = 6</math></p> $B_6^6(u) = u^6$
--	--	---

diperoleh

$$C_6(u) = \sum_{i=0}^6 P_i B_i^6(u)$$

$$C_6(u) = P_0(1-u)^6 + 6W_{51}u(1-u)^5 + 15W_{52}u^2(1-u)^4 + 20W_{53}u^3(1-u)^3 + 15W_{54}u^4(1-u)^2 + 6W_{55}u^5(1-u) + P_5 u^6$$

$$C_6'(u) = -6P_0(1-u)^5 - 30W_{51}u(1-u)^4 + 6W_{51}(1-u)^5 - 60W_{52}u^2(1-u)^3 + 30W_{52}u(1-u)^4 - 60W_{53}u^3(1-u)^2 + 60W_{53}u^2(1-u)^3 - 30W_{54}u^4(1-u) + 60W_{54}u^3(1-u)^2 - 6W_{55}u^5 + 30W_{55}u^4(1-u) + 6P_5 u^5$$

$$C_6''(u) = 30P_0(1-u)^4 + 120W_{51}u(1-u)^3 - 60W_{51}(1-u)^4 - 240W_{52}u(1-u)^3 + 180W_{52}u^2(1-u)^2 + 30W_{52}(1-u)^4 + 120W_{53}u^3(1-u) - 360W_{53}u^2(1-u)^2 + 120W_{53}u(1-u)^3 - 240W_{54}u^3(1-u) + 30W_{54}u^4 + 180W_{54}u^2(1-u)^2 - 60W_{55}u^4 + 120W_{55}u^3(1-u) + 30P_5 u^4$$

dengan  $0 \leq u \leq 1$ , maka

$$C'_6(0) = 6(W_{51} - P_0)$$

$$C''_6(1) = 30(W_{54} - 2W_{55} + P_5)$$

$$C'_6(1) = 6(P_5 - W_{55})$$

$$C'''_6(0) = 120(3W_{51} - 3W_{52} + W_{53} - P_0)$$

$$C''_6(0) = 30(P_0 - 2W_{51} + W_{52})$$

Sehingga, untuk segmen ke- $i$  yang terbentuk titik-titik kontrol poligon baru  $\Omega = [P_0, W_{51}, W_{52}, W_{53}, W_{54}, W_{55}, P_5]$  didefinisikan sebagai berikut:

$$V_M(0) = P_0$$

$$V_M(1) = P_5$$

$$V'_M(0) = 6(W_{51} - P_0)$$

$$V'_M(1) = 6(P_5 - W_{55})$$

$$V''_M(0) = 30(P_0 - 2W_{51} + W_{52})$$

$$V''_M(1) = 30(W_{54} - 2W_{55} + P_5)$$

$$V'''_M(0) = 120(3W_{51} - 3W_{52} + W_{53} - P_0)$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 V(u) &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5 \ u^6] M_{MH} \begin{bmatrix} V_M(0) \\ V_M(1) \\ V'_M(0) \\ V'_M(1) \\ V''_M(0) \\ V''_M(1) \\ V'''_M(0) \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5 \ u^6] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -15 & 15 & -10 & -5 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 24 & -24 & 15 & 9 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_M(0) \\ V_M(1) \\ V'_M(0) \\ V'_M(1) \\ V''_M(0) \\ V''_M(1) \\ V'''_M(0) \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5 \ u^6] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -15 & 15 & -10 & -5 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 24 & -24 & 15 & 9 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_5 \\ 6(W_{51} - P_0) \\ 6(P_5 - W_{55}) \\ 30(P_0 - 2W_{51} + W_{52}) \\ 30(W_{54} - 2W_{55} + P_5) \\ 120(3W_{51} - 3W_{52} + W_{53} - P_0) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5 \ u^6] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ -15 & 15 & -10 & -5 & -3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 24 & -24 & 15 & 9 & 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -10 & 10 & -6 & -4 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 30 & -60 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & -60 & 30 \\ -120 & 360 & -360 & 120 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ W_{51} \\ W_{52} \\ W_{53} \\ W_{54} \\ W_{55} \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \ u \ u^2 \ u^3 \ u^4 \ u^5 \ u^6] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -30 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 60 & -60 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ -105 & -60 & 90 & -60 & 15 & 0 & 0 \\ 114 & 30 & -60 & 60 & -30 & 6 & 0 \\ -39 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ W_{51} \\ W_{52} \\ W_{53} \\ W_{54} \\ W_{55} \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= [u^6 - 6u^5 + 15u^4 - 20u^3 + 15u^2 - 6u + 1, -6u^6 + 30u^5 - 60u^4 + 60u^3 - 30u^2 + 6u, 15u^6 - 60u^5 + 90u^4 - 60u^3 + 15u^2, -20u^6 + 60u^5 - 60u^4$$

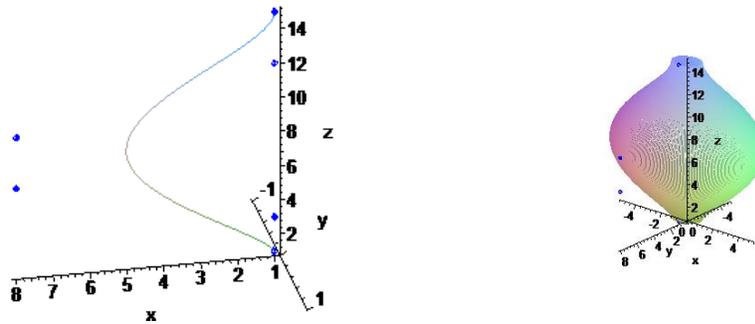
$$+ 20u^3, 15u^6 - 30u^5 + 15u^4, -6u^6 + 6u^5, u^6] \begin{bmatrix} P_0 \\ W_{51} \\ W_{52} \\ W_{53} \\ W_{54} \\ W_{55} \\ P_5 \end{bmatrix}$$

$$= P_0(u^6 - 6u^5 + 15u^4 - 20u^3 + 15u^2 - 6u + 1) + W_{51}(-6u^6 + 30u^5 - 60u^4 + 60u^3 - 30u^2 + 6u) + W_{52}(15u^6 - 60u^5 + 90u^4 - 60u^3 + 15u^2) + P_3(-20u^6 + 60u^5 - 60u^4 + 20u^3) + P_4(15u^6 - 30u^5 + 15u^4) + W_{55}(-6u^6 + 6u^5) + P_5(u^6)$$

$M_{MH}$  merupakan matriks yang dihasilkan pada kurva Hermit berderajat enam. Jadi kurva Bezier derajat enam dalam bentuk parametrik yaitu:

$$\begin{aligned}
 V(u) = & P_0(u^6 - 6u^5 + 15u^4 - 20u^3 + 15u^2 - 6u + 1) \\
 & + W_{51}(-6u^6 + 30u^5 - 60u^4 + 60u^3 - 30u^2 + 6u) \\
 & + W_{52}(15u^6 - 60u^5 + 90u^4 - 60u^3 + 15u^2) \\
 & + P_3(-20u^6 + 60u^5 - 60u^4 + 20u^3) + P_4(15u^6 - 30u^5 + 15u^4) \\
 & + W_{55}(-6u^6 + 6u^5) + P_5(u^6)
 \end{aligned}$$

Dengan  $0 \leq u \leq 1$ . Berikut ini disajikan contoh kurva kuartik bezier dengan titik-titik kontrol  $P_0 = (1,0,1), P_1 = (1,0,3), P_2 = (8,0,6), P_3 = (8,0,9), P_4 = (1,0,12), P_5 = (1,0,15)$ . Misal dengan  $\lambda = [0.1,0.1,0.1,0.1,0.1]$ .



Gambar 4.2 Hasil Modifikasi Kurva Bezier Berderajat Lima Menjadi Kurva Bezier Berderajat Enam

## BAB V. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab IV, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil modifikasi kurva Bezier berderajat lima ke dalam bentuk Bezier berderajat enam diperoleh dari matrik modifikasi Hermit dan penetapan titik kontrol poligon sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} V_M(u) = & P_0(u^6 - 6u^5 + 15u^4 - 20u^3 + 15u^2 - 6u + 1) \\ & + W_{51}(-6u^6 + 30u^5 - 60u^4 + 60u^3 - 30u^2 + 6u) \\ & + W_{52}(15u^6 - 60u^5 + 90u^4 - 60u^3 + 15u^2) \\ & + P_3(-20u^6 + 60u^5 - 60u^4 + 20u^3) \\ & + P_4(15u^6 - 30u^5 + 15u^4) + W_{55}(-6u^6 + 6u^5) + P_5(u^6) \end{aligned}$$

pada bentuk Bezier berderajat enam hasil modifikasi Bezier berderajat lima memiliki enam titik control yaitu  $\Omega = [P_0, W_{51}, W_{52}, W_{53}, W_{54}, W_{55}, P_5]$ . Selanjutnya dipilih nilai yang beragam pada data titik untuk menghasilkan bentuk-bentuk permukaan putar.

2. Bentuk-bentuk dari permukaan putar Bezier berderajat enam hasil dari modifikasi kurva Bezier berderajat lima dengan beberapa pemilihan data titik kontrol  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$ , dan  $P_5$  titik kontrol yang baru  $W_{51}, W_{52}, W_{53}, W_{54}$  dan  $W_{55}$  yang dipengaruhi oleh pemberian nilai parameter  $\lambda_{51}, \lambda_{52}, \lambda_{53}, \lambda_{54}, \lambda_{55}$  menyajikan hasil yang berbeda-beda. Langkah-langkah yang dilakukan untuk mengkonstruksi kerajinan marmer adalah menentukan tinggi dan jari-jari bendanya. Sehingga dapat dimanfaatkan untuk memodelkan benda industri keramik yang lainnya.

## **5.2 Penelitian Lanjutan**

Penelitian berikutnya dapat dikembangkan modifikasi kurva Bezier berderajat- $n$ . selain itu dapat ditawarkan desain benda relief yang lebih bervariasi dengan menggabungkan kurva Bezier dan beberapa benda-benda geometri ruang.

## DAFTAR PUSTAKA

- Arinda, D. 2007. *Konstruksi Vas Bunga Melalui Penggabungan Beberapa Benda Geometri Ruang*. Jember: Universitas Jember
- Bastian, A. 2011. *Desain Kap Lampu Duduk Melalui Penggabungan Benda-benda Geometri Ruang*. Jember : Universitas Jember.
- Belkhatir, B. 2008. *Geometric Continuity  $C^1G^2$  of Blending Curves<sup>1</sup>*. Spain: Departamento de Matematica Aplicada
- Budiono, M. 2011. *Pemodelan Handle Pintu Tipe Simetris Melalui Teknik Penggabungan Beberapa Benda Geometri Ruang*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
- Juliyanto, B. 2002. *Hitung Volume dan Ekuivalensi Volume Polihedron*. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
- Kusno, 2003. *Geometri*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Kusno, 2007. *Modelisasi Benda Onyx dan Marmer Melalui Penggabungan dan Pemilihan Parameter Pengubah Bentuk Permukaan Putar Bezier*. Jember: Universitas Jember
- Kusno, 2010. *Geometri Rancang Bangun. Studi Tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer*. Jember: Jember University Press
- Marjuni, A. 2007. *Media Pembelajaran Matematika dengan Maplet*. Jakarta : Graha Ilmu
- Purwanto, B. 2004. *Konstruksi Bentuk Kotak Penyimpan Alat Tulis Kantor Dengan Penggabungan Benda-Benda Dasar Geometri*. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
- Peter, Steven. 2004. *Visualizing Maple Plots with JavaViewLib*. Germany: Institute of Mathematics, Technical University Berlin
- Rich, B. 2005. *Geometri*. Jakarta: Erlangga (Authorized Translation English language edition published by McGraw-Hill.

- Roifah, M. 2013. *Modelisasi Knop Melalui Penggabungan Benda Dasar Hasil Deformasi Tabung, Prisma Segienam Beraturan, dan Permukaan Putar*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Rusli, H., 2006. *Penggunaan Kurva Bezier untuk Desain Benda Pecah Belah dan Plastik Karakter Simetrik dan Putar*. Semarang: Universitas Negeri Semarang
- Rovenski, V. 2010. *Modeling of Curves and Surfaces with MATLAB*. Israel: Department of Mathematics and Computer Science University of Haifa
- Sobester, A. 2005. *Conceptual Design of UAV Airframes Using a Generic Geometry Service*. UK: University of Southampton, Southampton, Hampshire
- Wahyudi, J. 2001. *Perancangan Objek-Objek Industri dengan Benda Permukaan Putar*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

## DAFTAR RIWAYAT HIDUP

### IDENTITAS DIRI

Nama : Juhari, M.Si  
NIP/NIK : 20130902 1 319  
Jenis Kelamin :  **Laki-laki**  Perempuan  
Tempat dan Tanggal Lahir : Pamekasan, 09 Februari 1984  
Status Perkawinan :  **Kawin**  Belum Kawin  Duda/Janda  
Agama : Islam  
Golongan / Pangkat : III-b / Penata Muda Tk. I  
Jabatan Fungsional Akademik : Asisten Ahli  
Perguruan Tinggi : UIN Maulana Malik Ibrahim Malang  
Alamat : Jl. Gajayana 50 Malang  
Telp./Faks. : (0341) 551354 / (0341) 572533  
Alamat Rumah : Jl. Tumapel No.40 RT.01 RW.06 Singosari Malang  
Telp./Faks. : 081336397956  
Alamat E-mail : jo\_alkanderi57@yahoo.co.id

**Nama Orang Tua**  
Bapak : Damanhuri  
Ibu : Saleha  
Alamat Orang Tua : Jl.P.Trunojoyo Gg XII No.54 Panempan Pamekasan

### Surat Keputusan (SK) Rektor

- No.SK & Tanggal Mulai Diangkat Sebagai Dosen:  
No.SK : Un.3/Kp.01.4/2625A/2012  
Tanggal Mulai Diangkat Sebagai Dosen : 31 Agustus 2012
- No.SK & Tanggal Mulai Mengajar:  
No.SK : Un.03.6/HK.00.5/1035/2012  
Tanggal Mulai Mengajar : 5 September 2012

### RIWAYAT PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI

Tahun Lulus	Jenjang	Perguruan Tinggi	Jurusan/ Bidang Studi
2003-2007	S-1	Universitas Jember (UNEJ)	Matematika/Pendidikan
2009-2012	S-2	Universitas Jember (UNEJ)	Matematika/Terapan

### PELATIHAN PROFESIONAL

Tahun	Pelatihan	Penyelenggara
2013	Peserta Workshop “ <i>Internalisasi Nilai-Nilai Keislaman Dalam Silabus</i> ”	Jurusan Matematika Fakultas Sains dan

		Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
2013	Peserta Workshop “ <i>Simulasi Pemodelan Matematika Numerik</i> ”	Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
2013	Peserta Workshop “ <i>Penyusunan Silabus Berbasis Integrasi Sains dan Islam</i> ”	Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
2014	Peserta Workshop “ <i>Structural Equation Modeling (SEM)</i> ”	Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
2014	Peserta Workshop “ <i>Peningkatan Kompetensi Pedagogi Calon Dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang</i> ”	Lembaga Penjaminan Mutu (LPM) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
2014	Peserta Workshop Pembekalan Dosen Muda “ <i>Membangun Paradigma Qur’ani Dalam Memperkokuh Intregrasi Islam dan Sains Menuju World Class University</i> ”	Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat (LP2M) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
2015	Peserta Workshop “ <i>Matematika dan Pembelajarannya</i> ”	Jurusan FMIPA Universitas Mataram

### PENGALAMAN MENGAJAR

Mata Kuliah	Jenjang	Institusi/Jurusan/Program	Tahun... s.d. ...
Kalkulus	S1	Jurusan Pendidikan Matematika IKIP PGRI Jember	2008-2009
Teori Belajar dan Pembelajaran	S1	Jurusan Pendidikan Matematika IKIP PGRI Jember	2008-2009
Analisis Numerik	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-2013
Pemrograman Komputer I	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-sekarang
Praktikum Pemrograman Komputer I	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-sekarang
Pemrograman	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK	2012-sekarang

Komputer II		UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	
Praktikum Pemrograman Komputer II	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-sekarang
Sistem Informasi	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-sekarang
Pemrograman Lanjut	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-sekarang
Struktur Data	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2012-sekarang
Kapita Selekt Komputasi	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2013-2014
Jaringan Komputer	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2013-2014
Matematika Diskrit	S1	Jurusan Matematika FSAINTEK UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	2014-2015

### PRODUK BAHAN AJAR

Mata Kuliah	Program Pendidikan	Jenis Bahan Ajar (Cetak dan Noncetak)	Semester / Tahun Akademik
Analisis Numerik	S1	Modul Praktikum	Ganjil 2012/2013
Pemrograman Komputer I (Matlab)	S1	Modul Praktikum	Genap 2012/2013
Pemrograman Komputer II (Maple)	S1	Modul Praktikum	Ganjil 2012/2013
Pemrograman Lanjut	S1	Modul Praktikum	Ganjil 2013/2014

## PENGALAMAN PENELITIAN

Tahun	Judul Penelitian	Ketua / Anggota Tim	Sumber Dana
2012	Pemodelan Pertumbuhan Tanaman Jagung Menggunakan <i>L-Systems</i>	Ketua	Mandiri
2012	Desain Kotak Kemasan Melalui Operasi Geometri	Anggota Tim	Mandiri
2013	Pelabelan Total Super $(a,d)$ – Sisi Antimagic Pada Graf <i>Firecracker</i>	Ketua	Mandiri
2013	Pemodelan pertumbuhan batang tanaman menggunakan <i>Deterministic L-System</i>	Ketua	Mandiri
2014	Konstruksi Objek Kerajinan Marmer Melalui Penggabungan Beberapa Benda Geometri Ruang Dan Permukaan Putar	Ketua	DIPA Fakultas Sains dan Teknologi
2015	Simulasi Model Matematika Pada Benda Relief <i>Handle</i> Melalui Penggabungan dan Pemilihan Parameter Pengubah Bentuk Permukaan Putar Bezier	Ketua	DIPA Fakultas Sains dan Teknologi
2016	Penerapan <i>L-Systems</i> dan Fraktal Pada Motif Batik Melalui Penggabungan Dua Buah Citra	Ketua	DIPA Fakultas Sains dan Teknologi
2017	Modifikasi Bentuk Kurva dan Permukaan Putar Polinom Bezier Menggunakan Algoritma <i>de Casteljaou</i>	Ketua	DIPA Fakultas Sains dan Teknologi

## KARYA ILMIAH

### A. Buku/Bab Buku/Jurnal

Tahun	Judul	Penerbit/Jurnal
2012	Pemodelan Pertumbuhan Tanaman Jagung Menggunakan <i>L-Systems</i>	Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Oktober 2011 UNEJ ISBN : 978-602- 19240-0-6
2013	Pelabelan Total Super $(a,d)$ – Sisi Antimagic Pada Graf <i>Firecracker</i>	Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Mei 2013 UIN Maliki Malang ISBN : 978-602-958-488-2
2013	Pemodelan pertumbuhan batang tanaman	Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Terapan 2013 UNSYIAH Aceh

	menggunakan <i>Deterministic L-System</i>	ISBN : 978-602-17004-7-1
2014	Pemodelan <i>Stochastic L-Systems</i> Pada Pertumbuhan Tanaman <i>Zea Mays.L</i>	Prosiding Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya di Universitas Hasanuddin Makassar ISBN :
2015	Konstruksi Objek Kerajinan Marmer Melalui Penggabungan Benda Geometri Ruang dan Permukaan Putar	Prosiding Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya di Universitas Mataram

## B. Makalah/Poster

### KONFERENSI/SEMINAR/WORKSHOP/LOKAKARYA/SIMPOSIUM

Tahun	Judul Kegiatan	Penyelenggara	Panitia/ Peserta/ Pembicara
2011	Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Oktober 2011	Jurusan Pendidikan Matematika FKIP UNEJ	Pemakalah
2013	<i>Pelatihan Structural Equation Modeling (SEM)</i>	Jurusan Matematika Fak. Saintek UIN Maliki Malang	Panitia
2013	Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Mei 2013	Jurusan Matematika Fak. Saintek UIN Maliki Malang	Panitia
2013	Seminar Nasional Matematika dan Terapan	UNSYIAH Aceh	Pemakalah
2014	Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya	Jurusan FMIPA Unhas	Pemakalah
2015	Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya	Jurusan FMIPA Unram	Pemakalah

### KEGIATAN PROFESIONAL/PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

Tahun	Jenis>Nama Kegiatan	Tempat
2014	Pendamping pada sosialisasi “Desain Pengembangan Seni Kerajinan Anyaman Bambu di Desa Pandansari”	Desa Pandansari Kecamatan Ngantang Kabupaten Malang
2015	Pembinaan Siswa MAN 2 Madiun Dalam	MAN 2 Madiun

	Rangka Untuk Meningkatkan Kualitas Tim KSM (Kompetisi Sains Madrasah)	
2015	Pelatihan Pembuatan Bahan Ajar Berbasis Multimedia Bagi Guru – Guru Yayasan Ali Imron Pakamban Sumenep	Sumenep
2016	Pelatihan Pembuatan Bahan Ajar Berbasis Multimedia Bagi Guru – Guru Lembaga Pendidikan Ma’arif NU Kecamatan Watulimo Trenggalek	Trenggalek

Saya menyatakan bahwa semua keterangan dalam Curriculum Vitae ini adalah benar dan apabila terdapat kesalahan, saya bersedia mempertanggungjawabkannya.

Malang, 30 Mei 2017

Dosen Yang Bersangkutan,

Juhari, M.Si

NIDN. 19840209 20160801 1 055