LAPORAN PENELITIAN KOMPETITIF

TAHUN ANGGARAN 2017

KARAKTERISASI MODUL TIDAK TERDEKOMPOSISI ATAS DAERAH DEDEKIND

Nomor DIPA	:	DIPA BLU: DIPA-025.04.2.423812/2016
Tanggal	:	7 Desember 2017
Satker	:	(423812) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Kode Kegiatan	:	(2132) Peningkatan Akses, Mutu, Kesejahteraan dan Subsidi Pendidikan Tinggi Islam
Kode Sub Kegiatan	:	(008) Penelitian Bermutu
Kegiatan	:	(004) Dukungan Operasional Penyelenggaraan Pendidikan

OLEH

DEWI ISMIARTI, M.Si (198705052016008012058)

KEMENTERIAN AGAMA

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG

2017

PERNYATAAN KESANGGUPAN MENYELESAIKAN PENELITIAN

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Dewi Ismiarti
NIP	:	19870505201608012058
Pangkat / Gol.Ruang	:	Asisten Ahli / III-B
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi / Matematika
Jabatan dalam Penelitian	:	Ketua Peneliti

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Saya sanggup menyelesaikan dan menyerahkan laporan hasil penelitian maksimal pada tanggal 17 Juli 2017
2. Apabila sampai pada batas waktu yang ditentukan saya/kami belum menyerahkan laporan hasil, maka saya sanggup mengembalikan dana penelitian yang telah saya terima

Malang, 17 Juli 2017

Ketua Peneliti

Dewi Ismiarti, M.Si

19870505201608012058

HALAMAN PENGESAHAN

Laporan penelitian ini disahkan oleh Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Pada Tanggal 17 Juli 2017

Ketua Peneliti

Dewi Ismiarti, M.Si
NIP. 19870505 20160801 2 058

Ketua LP2M
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.
NIP. 19600910 198903 2 001

PERNYATAAN ORISINALITAS PENELITIAN

Kami yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Dewi Ismiarti
NIP	:	19870505201608012058
Pangkat / Gol.Ruang	:	Asisten Ahli / III-B
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi / Matematika
Jabatan dalam Penelitian	:	Ketua Peneliti

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa dalam penelitian ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibaut oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis disebutkan dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila dikemudian hari ternyata dalam penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur penjiplakan dan pelanggaran etika akademik, maka kami bersedia mengembalikan dana penelitian yang telah kami terima dan diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku.

Malang, 17 Juli 2017

Ketua Peneliti

Dewi Ismiarti, M.Si

19870505201608012058

PERNYATAAN TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR

Yang bertanda tangan di bawah ini, Saya:

Nama	:	Dewi Ismiarti
NIP	:	19870505201608012058
Pangkat / Gol.Ruang	:	Asisten Ahli / III-B
Tempat; Tgl. Lahir	:	Blitar; 5 Mei 1987
Judul Penelitian	:	Karakterisasi Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Dedekind

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Saya TIDAK SEDANG TUGAS BELAJAR
2. Apabila dikemudian hari terbukti bahwa saya sedang tugas belajar, maka secara langsung saya menyatakan mengundurkan diri dan mengembalikan dana yang telah saya terima dari Program Penelitian Kompetitif tahun 2017.

Demikian surat pernyataan ini, saya buat sebagaimana mestinya.

Malang, 17 Juli 2017

Yang membuat pernyataan

Dewi Ismiarti, M.Si

19870505201608012058

ABSTRAK

Modul tidak terdekomposisi adalah modul yang tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul sejatinya. Telah diketahui karakteristik modul torsi tidak terdekomposisi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama antara lain modul siklis primer dan memiliki satu pembagi elementer. Daerah Dedekind adalah kelas gelanggang yang lebih umum dari daerah ideal utama. Tulisan ini bertujuan untuk memaparkan hasil penelitian tentang karakteristik modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind. Pembagi elementer yang didefinisikan pada modul torsi atas daerah ideal utama dibuat padanannya untuk modul torsi atas daerah Dedekind. Diperoleh karakterisasi pada modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind adalah modul tidak terdekomposisi jika dan hanya jika siklis primer jika dan hanya jika memiliki satu pembagi elementer.

Kata kunci: daerah Dedekind, modul tidak terdekomposisi, modul atas daerah Dedekind.

ABSTRACT

A module is indecomposable if it is cannot be written as a direct sum of its proper submodules. It is well known that some characterization of finitely generated indecomposable torsion module over a principal ideal domain are primary cyclic and only has only one elementary divisor. Dedekind domains is more general than principal ideal domains. This article intends to present some characterization of finitely generated indecomposable torsion module over Dedekind domains. We generalize the definition of elementary divisor in torsion module over principal ideal domains to the torsion module over Dedekind domains. The result is a torsion module over Dedekind domains is indecomposable if and only if primary cyclic if and only if has only one elementary divisor.

Keywords: Dedekind domain, indecomposable module, module over a Dedekind domain.

DAFTAR ISI

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Modul merupakan suatu struktur aljabar perumuman dari ruang vektor. Skalar pada ruang vektor yang berasal dari suatu lapangan diperumum ke gelanggang. Selain sebagai perumuman ruang vektor, modul juga dapat dipandang sebagai perumuman gelanggang, karena setiap gelanggang adalah modul atas dirinya sendiri.

Pada teori modul dikenal suatu struktur modul yang disebut dengan modul sederhana. Modul sederhana adalah modul taknol yang tidak memliki submodul selain modul nol dan dirinya sendiri. Jumlah langsung dari submodul-submodul sederhana disebut dengan modul semi sederhana.

Dekomposisi modul adalah penguraian modul menjadi jumlah langsung submodul-submodulnya. Karena modul sederhana tidak memiliki submodul sejati maka modul sederhana tidak dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul sejatinya. Suatu modul yang tidak dapat diuraikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul sejatinya disebut modul tidak terdekomposisi. Namun sebaliknya modul tidak terdekomposisi belum tentu sederhana.

Modul tidak terdekomposisi lebih umum daripada modul sederhana, sebagai perumuman modul semi sederhana muncul konsep jumlah langsung submodul-submodul tidak terdekomposisi. Jumlah langsung submodul-submodul tidak terdekomposisi disebut dengan modul terdekomposisi secara lengkap.

Dalam konsep modul terdekomposisi secara lengkap penting untuk mengetahui kapan suatu modul tidak terdekomposisi. Dalam (Roman, 2008) telah dipaparkan beberapa karakteristik dari modul tidak terdekomposisi pada modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Karakteristik tersebut yakni modul tidak terdekomposisi jika dan hanya jika siklis primer jika dan hanya jika hanya memiliki satu pembagi elementer.

Daerah Dedekind adalah daerah integral yang setiap ideal taknolnya dapat dibalik. Setiap daerah ideal utama adalah daerah Dedekind namun daerah Dedekind tidak selalu daerah ideal utama. Oleh karena itu daerah Dedekind dapat dipandang sebagai perumuman daerah ideal utama.

Struktur modul dipengaruhi oleh gelanggang tumpuannya. Karakteristik modul tidak terdekomposisi pada modul atas daerah ideal utama belum tentu berlaku pada modul atas daerah Dedekind. Oleh karena itu perlu dilakukan penelitian tentang karakteristik modul tidak terdekomposisi pada modul atas daerah Dedekind.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diperoleh rumusan masalah : bagaimana karakteristik modul tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mengkarakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind.

1.4 Manfaat

Manfaat penelitian ini adalah untuk mendapatkan pengembangan teori yang sudah diketahui pada modul atas daerah ideal utama ke modul atas daerah Dedekind.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini modul yang akan diperhatikan adalah modul torsi yang dibangun secara hingga.

BAB 2

STUDI PUSTAKA

2.1 Grup

Grup adalah struktur aljabar yang sangat mendasar. Grup mendasari struktur-struktur aljabar yang lain. Berikut diberikan pengertian grup.

Definisi 2.1. *Grup G adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi oleh operasi $*$*

$$\begin{array}{rccc} *: & G \times G & \to & G \\ & (a,b) & \mapsto & a * b \end{array}$$

sehingga

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, *untuk setiap* $a, b, c \in G$ *(Sifat asosiatif).*

2. *Terdapat* $e \in G$ *sehingga* $a * e = e * a = a$, *untuk setiap* $a \in G$ *(Eksistensi Identitas).*

3. *Untuk setiap* $a \in G$ *terdapat* $b \in G$ *sehingga* $a * b = b * a = e$ *(Eksistensi Invers).*

Himpunan G bersama operasi $*$ yang membentuk grup dilambangkan dengan $(G, *)$. Unsur e pada Definisi 2.1 disebut unsur *identitas* dari grup G terhadap operasi $*$. Selanjutnya unsur b pada Definisi 2.1 disebut *invers* dari a terhadap $*$ di G dan biasa dilambangkan dengan a^{-1}. Jika operasi pada G bersifat komutatif, yakni $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$ maka G disebut *Grup Abelian.*

2.2 Gelanggang

Gelanggang adalah suatu himpunan yang dilengkapi dua operasi biner (selanjutnya cukup disebut operasi) sehingga memenuhi sifat-sifat tertentu. Berikut ini diberikan definisi gelanggang.

Definisi 2.2. *Gelanggang (Ring)* R adalah suatu himpunan yang dilengkapi oleh dua operasi, operasi pertama disebut penjumlahan (dilambangkan dengan $+$)

$$\begin{array}{rccc} +: & R \times R & \to & R \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

dan operasi kedua disebut perkalian (dilambangkan dengan $\times$, dan peta atau hasil kali dari (a,b) dituliskan dengan ab)

$$\begin{array}{rccc} \times: & R \times R & \to & R \\ & (a,b) & \mapsto & ab \end{array}$$

sehingga

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, untuk setiap $a,b,c \in R$.
2. Terdapat $0 \in R$ sehingga $a+0 = 0+a = a$, untuk setiap $a \in R$.
3. Untuk setiap $a \in R$ terdapat $-a \in R$ sehingga $a+(-a) = (-a)+a = 0$.
4. $a+b = b+a$, untuk setiap $a,b \in R$.
5. $(ab)c = a(bc)$, untuk setiap $a,b,c \in R$.
6. $a(b+c) = ab+ac$ dan $(b+c)a = ba+ca$, untuk setiap $a,b,c \in R$.

Pada gelanggang, identitas terhadap penjumlahan disebut unsur *nol* dan biasa dilambangkan dengan 0. Invers dari a terhadap penjumlahan disebut *negatif* a dan dilambangkan dengan $-a$.

Di gelanggang R tidak disyaratkan adanya identitas terhadap perkalian. Jika R memiliki identitas terhadap perkalian, identitas ini disebut unsur *kesatuan* atau *identitas*, yakni suatu unsur tak nol di R yang dilambangkan dengan 1 dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk setiap $a \in R$. Jika

R memiliki identitas terhadap perkalian, R disebut *gelanggang dengan unsur kesatuan.*

Unsur tak nol dari gelanggang dengan unsur kesatuan R tidak harus memiliki invers terhadap perkalian. Jika suatu unsur tak nol a di R memiliki invers terhadap perkalian, yakni suatu unsur di R yang dilambangkan dengan a^{-1} sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ maka a disebut **unit** dari R, dan a^{-1} disebut **invers** dari a. Jadi yang dimaksud invers dari suatu unsur pada gelanggang adalah invers dari unsur tersebut terhadap perkalian.

Perkalian pada gelanggang tidak harus bersifat komutatif. Jika perkalian di R bersifat komutatif, yakni $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in R$ maka R disebut *gelanggang komutatif.*

Contoh 2.3.

1. Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan 1.

2. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan 1.

3. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan 1.

4. Himpunan semua matriks 2×2 dengan entri-entri bilangan bulat

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

   adalah gelanggang tak komutatif dengan unsur kesatuan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Himpunan bilangan genap $2\mathbb{Z}$ bersama penjumlahan dan perkalian biasa merupakan gelanggang komutatif tanpa unsur kesatuan.

6. Himpunan semua fungsi bernilai real atas satu variabel real

$$R = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ fungsi } \}$$

terhadap operasi penjumlahan titik demi titik

$$\begin{array}{rccc} + : & R \times R & \to & R \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array}$$

dengan $f + g$ adalah suatu fungsi yang didefinisikan dengan

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}$$

dan perkalian titik demi titik

$$\begin{array}{rccc} \times : & R \times R & \to & R \\ & (f,g) & \mapsto & fg \end{array}$$

dengan fg adalah suatu fungsi yang didefinisikan dengan

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}$$

adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan 1_f, dimana $1_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi dengan $1_f(x) = 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.4. Suatu subhimpunan S dari gelanggang R disebut *subgelanggang (subring)* dari R jika S merupakan gelanggang terhadap operasi yang sama dengan di R.

Definisi 2.5. Subgelanggang I dari R disebut *ideal* dari R jika untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$ berlaku $ar \in I$ dan $ra \in I$.

Jadi ideal bersifat menyerap hasil kali setiap unsur di ideal dengan unsur di gelanggang baik dari kiri maupun kanan. Dengan kata lain, Ideal tertutup terhadap perkalian dengan gelanggang. Dalam studi lanjut, ideal pada Definisi 4.23 disebut juga dengan **ideal dua sisi**. Kemudian subgelanggang I dari R yang memenuhi $ra \in I$ untuk setiap $r \in R$ dan $a \in I$ disebut **ideal kiri** dan subgelanggang I dari R yang memenuhi $ar \in I$ untuk setiap $r \in R$ dan $a \in I$ disebut

ideal kanan. Ideal I dikatakan **ideal sejati** dari R jika $I \neq R$.

Cara menentukan apakah suatu subhimpunan takkosong adalah ideal dapat digunakan teorema berikut.

Teorema 2.6. *(***Uji Ideal***)*

Subhimpunan tak kosong I dari R adalah ideal dari R jika untuk setiap $a, b \in I$ dan $r \in R$ berlaku

1. $a - b \in I$
2. $ra \in I$ *dan* $ar \in I$.

Contoh 2.7.

1. Misalkan n adalah bilangan bulat positif, $n\mathbb{Z}$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}$.
2. Gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ adalah subgelanggang dari gelanggang bilangan rasional $\mathbb{Q}$, akan tetapi $\mathbb{Z}$ bukan ideal dari $\mathbb{Q}$.
3. Perhatikan gelanggang

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

Misalkan I adalah subhimpunan dari $M_2(\mathbb{Z})$ yang entri-entrinya bilangan genap

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

Akan diselidiki apakah I merupakan ideal dari $M_2(\mathbb{Z})$.

Karena $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, maka dari definisi himpunannya jelas bahwa $I \subseteq M_2(\mathbb{Z})$. Selanjutnya I tak kosong, karena kita dapat memilih $0, 2 \in 2\mathbb{Z}$ sehingga $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in I$. Misalkan $A, B \in I$ dan $C \in M_2(\mathbb{Z})$ maka dapat dituliskan

$$A = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ 2a_3 & 2a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b_1 & 2b_2 \\ 2b_3 & 2b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

dengan $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $i = 1, \cdots, 4$. Perhatikan

$$\begin{aligned}
A - B &= \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ 2a_3 & 2a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2b_1 & 2b_2 \\ 2b_3 & 2b_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2a_1 - 2b_1 & 2a_2 - 2b_2 \\ 2a_3 - 2b_3 & 2a_4 - 2b_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(a_1 - b_1) & 2(a_2 - b_2) \\ 2(a_3 - b_3) & 2(a_4 - b_4) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

yakni $A - B$ matriks 2×2 dengan entri-entri bilangan genap, jadi $A - B \in I$.

$$\begin{aligned}
CA &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ 2a_3 & 2a_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1(2a_1) + c_2(2a_3) & c_1(2a_2) + c_2(2a_4) \\ c_3(2a_1) + c_4(2a_3) & c_3(2a_2) + c_4(2a_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (c_1 2)a_1 + (c_2 2)a_3 & (c_1 2)a_2 + (c_2 2)a_4 \\ (c_3 2)a_1 + (c_4 2)a_3 & (c_3 2)a_2 + (c_4 2)a_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2c_1)a_1 + (2c_2)a_3 & (2c_1)a_2 + (2c_2)a_4 \\ (2c_3)a_1 + (2c_4)a_3 & (2c_3)a_2 + (2c_4)a_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(c_1 a_1) + 2(c_2 a_3) & 2(c_1 a_2) + 2(c_2 a_4) \\ 2(c_3 a_1) + 2(c_4 a_3) & 2(c_3 a_2) + 2(c_4 a_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2[(c_1 a_1) + (c_2 a_3)] & 2[(c_1 a_2) + (c_2 a_4)] \\ 2[(c_3 a_1) + (c_4 a_3)] & 2[(c_3 a_2) + (c_4 a_4)] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diperoleh CA adalah matriks 2×2 dengan entri-entri bilangan genap. Jadi $CA \in I$, dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $AC \in I$. Jadi I tertutup terhadap pengurangan dan perkalian dengan R. Dengan demikian I adalah ideal dari $M_2(\mathbb{Z})$.

Definisi 2.8. Misalkan R adalah gelanggang komutatif. Suatu unsur tak nol $a \in R$ disebut *pembagi nol* jika terdapat $b \in R$ tak nol sehingga $ab = 0$.

Definisi 2.9. *Daerah integral* adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang tidak memiliki pembagi nol.

Jadi di daerah integral berlaku $a, b \neq 0$ maka $ab \neq 0$. Dengan kata lain jika $ab = 0$ berakibat $a = 0$ atau $b = 0$. Dengan demikian untuk menunjukkan apakah suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan R merupakan daerah integral dapat dilakukan dengan mengambil $0 \neq a, b \in R$ kemudian ditunjukkan $ab \neq 0$ atau mengambil $a, b \in R$ dengan $ab = 0$ kemudian ditunjukkan $a = 0$ atau $b = 0$.

Contoh 2.10.

1. Perhatikan gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a, b \neq 0$ maka $ab \neq 0$. Jadi $\mathbb{Z}$ adalah daerah integral.

2. Misalkan p adalah bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_p$ adalah daerah integral. Untuk melihatnya, ambil $a, b \in \mathbb{Z}_p$ dengan $ab = 0$. Maka p membagi ab. Karena p prima, akibatnya p membagi a atau p membagi b. Artinya $a = 0$ atau $b = 0$.

3. Gelanggang
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$
bukan daerah integral. Perhatikan $(1, 0), (0, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dengan $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$. Artinya $(1, 0)$ adalah pembagi nol di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Definisi 2.11. *Lapangan (Field)* adalah suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan yang setiap unsur tak nolnya adalah unit.

Jadi $(F, +, \times)$ adalah lapangan jika dan hanya jika $(F, +)$ dan $(F - \{0\}, \times)$ keduanya adalah grup. Setiap lapangan F merupakan daerah integral. Untuk melihatnya, misalkan $a, b \in F$ dengan $ab = 0$ dan $a \neq 0$ maka $a^{-1}(ab) = a^{-1}0$. Akibatnya $b = 0$.

Contoh 2.12.

1. Gelanggang bilangan kompleks $\mathbb{C}$ adalah lapangan.

2. Gelanggang bilangan real $\mathbb{R}$ adalah lapangan.

3. Gelanggang bilangan rasional $\mathbb{Q}$ adalah lapangan.

4. Gelanggang bilangan bulat Gaussian modulo 3

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3[i] &= \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}_3\} \\ &= \{0,1,2,i,1+i,2+i,2i,1+2i,2+2i\} \end{aligned}$$

adalah lapangan. Operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{Z}_3[i]$ adalah penjumlahan dan perkalian di gelanggang bilangan kompleks dengan reduksi modulo 3 pada koefisien-koefisiennya sebagai berikut

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c) \bmod 3 + ((b+d) \bmod 3)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) \bmod 3 + ((ad+bc) \bmod 3)i$$

2.3 Modul

Modul merupakan perumuman ruang vektor. Skalar pada ruang vektor yang berasal dari lapangan diperumum dari sebarang gelanggang.

Definisi 2.13. Misalkan R adalah gelanggang. Suatu grup Abelian terhadap penjumlahan M bersama perkalian skalar

$$\begin{aligned} \cdot \quad : \quad R \times M &\to M \\ (r,u) &\mapsto ru \end{aligned}$$

disebut *modul kiri atas* R (R-modul kiri) jika untuk setiap $r,s \in R$ dan $u,v \in M$ berlaku

1. $(rs)u = r(su)$

2. $r(u+v) = ru+rv$

3. $(r+s)u = ru+su$

4. jika R memuat 1, $1u = u$

Selanjutnya dalam tulisan ini, modul kiri cukup disebut dengan modul. Dari definisi, setiap gelanggang adalah modul atas dirinya sendiri dengan mendefinisikan perkalian skalarnya sebagai perkalian di gelanggang. Secara umum, jika tidak diberikan penjelasan, gelanggang yang dimaksud dalam tulisan ini adalah gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan.

Contoh 2.14. Himpunan $\mathbb{Z}^n$ adalah modul atas $\mathbb{Z}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar komponen demi komponen.

$$\begin{aligned} (u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) &= (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n) \\ r(u_1, \cdots, u_n) &= (ru_1, \cdots, ru_n) \end{aligned}$$

Bukti. Misalkan $u, v, w \in \mathbb{Z}^n$ dan $r, s \in \mathbb{Z}$. Tulis
$u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$ dengan $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{Z}$ for $i = 1, \cdots, n$
Pertama akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}^n$ adalah grup Abelian terhadap penjumlahan.

1. Keasosiatifan

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= \big((u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n)\big) + (w_1, \cdots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n) + (w_1, \cdots, w_n) \\ &= \big((u_1 + v_1) + w_1, \cdots, (u_n + v_n) + w_n\big) \\ &= \big(u_1 + (v_1 + w_1), \cdots, u_n + (v_n + w_n)\big) \\ &= (u_1, \cdots, u_n) + (v_1 + w_1, \cdots, v_n + w_n) \\ &= (u_1, \cdots, u_n) + \big((v_1, \cdots, v_n) + (w_1, \cdots, w_n)\big) \\ &= u + (v + w) \end{aligned}$$

2. Kekomutatifaan terhadap penjumlahan

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, \cdots, u_n) + (v_1, \cdots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, \cdots, v_n + u_n) \\ &= v + u \end{aligned}$$

3. Eksistensi unsur nol Definisikan $0_{\mathbb{Z}^n} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{Z}^n} + u &= (0, \cdots, 0) + (u_1, \cdots, u_n) \\ &= (0 + u_1, \cdots, 0 + u_n) \\ &= (u_1, \cdots, u_n) \\ &= u \end{aligned}$$

   Karena penjumlahan di $\mathbb{Z}^n$ komutatif, diperoleh

$$u + 0_{\mathbb{Z}^n} = 0_{\mathbb{Z}^n} + u = u$$

   Dengan demikian $0_{\mathbb{Z}^n}$ adalah unsur nol dari $\mathbb{Z}^n$ terhadap penjumlahan.

4. Eksistensi invers terhadap penjumlahan

   Definisikan $-u = (-u_1, \cdots, -u_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned} -u + u &= (-u_1, \cdots, -u_n) + (u_1, \cdots, u_n) \\ &= (-u_1 + u_1, \cdots, -u_n + u_n) \\ &= (0, \cdots, 0) \\ &= 0_{\mathbb{Z}^n} \end{aligned}$$

   Karena penjumlahan pada $\mathbb{Z}^n$ komutatif, diperoleh

$$u + (-u) = -u + u = 0_{\mathbb{Z}^n}$$

Dengan demikian $-u$ adalah invers penjumlahan dari u in $\mathbb{Z}^n$. Jadi diperoleh $\mathbb{Z}^n$ adalah grup Abelian terhadap penjumlahan. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathbb{Z}^n$ atas $\mathbb{Z}$ memenuhi aksioma perkalian skalar pada modul.

1.

$$\begin{aligned}
r(u+v) &= r\big((u_1,\cdots,u_n)+(v_1,\cdots,v_n)\big)\\
&= r(u_1+v_1,\cdots,u_n+v_n)\\
&= (r(u_1+v_1),\cdots,r(u_n+v_n))\\
&= (ru_1+rv_1,\cdots,ru_n+rv_n)\\
&= (ru_1,\cdots,ru_n)+(rv_1,\cdots,rv_n)\\
&= r(u_1,\cdots,u_n)+r(v_1,\cdots,v_n)\\
&= ru+rv
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(r+s)u &= (r+s)(u_1,\cdots,u_n)\\
&= ((r+s)u_1,\cdots,(r+s)u_n)\\
&= (ru_1+su_1,\cdots,ru_n+su_n)\\
&= (ru_1,\cdots,ru_n)+(su_1,\cdots,su_n)\\
&= r(u_1,\cdots,u_n)+s(u_1,\cdots,u_n)\\
&= ru+su
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(rs)u &= (rs)(u_1,\cdots,u_n)\\
&= ((rs)u_1,\cdots,(rs)u_n)\\
&= (r(su_1),\cdots,r(su_n))\\
&= r(su_1,\cdots,su_n)\\
&= r(s(u_1,\cdots,u_n))\\
&= r(su)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 1u &= 1(u_1, \cdots, u_n) \\ &= (1u_1, \cdots, 1u_n) \\ &= (u_1, \cdots, u_n) \\ &= u \end{aligned}$$

Jadi $\mathbb{Z}^n$ adalah $\mathbb{Z}$-modul.

$\square$

Definisi 2.15. Misalkan M adalah R-modul. Himpunan bagian S dari M disebut *submodul* dari M jika S adalah R-modul terhadap penjumlahan dan perkalian skalar yang sama seperti di M.

Terdapat suatu hubungan yang penting antara ideal dan submodul. Perhatikan pada gelanggang R. Sebagai modul atas dirinya sendiri, setiap ideal dari R adalah submodul dari R. Sebaliknya setiap submodul dari R adalah ideal dari R.

Misalkan $S_1, \cdots, S_n$ adalah submodul dari R-modul M.

$$S_1 + \cdots + S_n = \{a_1 + \cdots + a_n | a_i \in S_i\}$$

juga merupakan submodul M. Selain itu $\bigcap_{i=1}^{n} S_i$ juga merupakan submodul dari M.

Misalkan S adalah submodul dari R-modul M. Himpunan koset-koset

$$M/S = \{v + S | v \in M\}$$

bersama operasi penjumlahan

$$(u + S) + (v + S) = (u + v) + S$$

dan perkalian skalar

$$r(u + S) = ru + S$$

untuk setiap $r \in R$ dan $u + S, v + S \in M/S$, membentuk suatu R-modul yang disebut *Modul hasil bagi* dari M oleh S.

Misalkan M adalah R-modul. Misalkan pula X adalah subhimpunan dari M. *Submodul yang dibangun* oleh X yang dinotasikan dengan $\langle X \rangle$ adalah himpunan kombinasi linier hingga unsur-unsur di X dengan koefisien di R

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \;\middle|\; r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

Sedangkan submodul yang dibangun oleh $x_1, \cdots, x_n \in M$ yang dinotasikan dengan $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ adalah submodul yang dibangun oleh $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Jika X adala himpunan hingga, maka M dikatakan *dibangun secara hingga*. Dalam konteks gelanggang, notasi tersebut digunakan untuk $M = R$, yakni $\langle X \rangle$ adalah ideal dari R yang dibangun oleh X. Himpunan $X \subseteq M$ dikatakan *bebas linier* jika kombinasi linier

$$r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n = 0$$

dengan $r_i \in R$ dan $x_i \in X$ hanya dipenuhi oleh $r_1 = \cdots = r_n = 0$.

Himpunan bagian $B \subseteq M$ disebut *basis* bagi M jika B bebas linier dan membangun M. Setiap ruang vektor selalu memiliki basis, namun tidak setiap modul memiliki basis. Modul yang memiliki basis disebut dengan *modul bebas*.

Contoh 2.16.

1. Himpunan $\mathbb{Z}^3$ adalah $\mathbb{Z}$-modul bebas dengan basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

2. Himpunan bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ adalah $\mathbb{Z}$-modul tidak bebas.

Misalkan M adalah R-modul. Unsur taknol $m \in M$ dikatakan *unsur torsi* dari M jika terdapat unsur taknol $r \in R$ sehingga $rm = 0$. Himpunan seluruh unsur torsi dari M bersama unsur nol membentuk submodul dari M yang disebut dengan *submodul torsi* dari M dan dinotasikan dengan M_{tor}. Modul M dikatakan *modul torsi* jika $M = M_{\text{tor}}$. Modul M dikatakan *modul bebas* *torsi* jika M tidak memiliki unsur torsi, yakni jika $M_{\text{tor}} = \{0\}$.

Contoh 2.17. Pandang $\mathbb{Z}_5$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, $\bar{1}$ adalah unsur torsi karena terdapat $5 \in \mathbb{Z}$ sehingga $5\bar{1} = \bar{0}$.

Misalkan M adalah R-modul dan $v \in M$. *Annihilator dari* v dinotasikan dengan $\text{Ann}_R(v)$ adalah himpunan

$$\text{Ann}_R(v) = \{r \in R \mid rv = 0\}.$$

Namun jika gelanggang tumpuan R dalam konteks yang jelas maka pembuat nol dari v cukup dituliskan dengan $\text{Ann}(v)$. Misalkan N adalah submodul dari M. *Annihilator dari* N dinotasikan dengan $\text{Ann}_R(N)$ adalah himpunan

$$\text{Ann}_R(N) = \{r \in R \mid rv = 0 \text{ untuk semua } v \in N\}.$$

Sama halnya dengan annihilator dari unsur, annihilator dari N cukup dituliskan dengan $\text{Ann}(N)$ jika gelanggang tumpuan R dalam konteks yang jelas. Annihilator dari unsur dan submodul merupakan ideal dari R.

Pada grup dan gelanggang dikenal pemetaan yang mengawetkan operasi yakni homomorfisma grup dan homomorfisma gelanggang. Pada modul juga dikenal pemetaan yang mengawetkan operasi yakni homomorfisma modul.

Definisi 2.18. Misalkan M, N adalah R-modul. Pemetaan φ dari M ke N disebut *R-modul homomorfisma* (R-homomorfisma) jika untuk setiap $u, v \in M$ dan $r \in R$ berlaku

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \quad \text{dan} \quad \varphi(ru) = r\varphi(u).$$

Beberapa macam R-homomorfisma antara lain.

1. R-monomorfisma adalah R-homomorfisma satu-satu (injektif).

2. R-epimorfisma adalah R-homomorfisma pada (surjektif).

3. R-isomorfisma adalah R-homomorfisma bijektif.

Misalkan $\varphi : M \to N$ adalah R-homomorfisma. Unsur nol dari M selalu dipetakan ke unsur nol dari N, tetapi unsur dari M yang dipetakan ke nol tidak harus nol. Himpunan unsur-unsur dari M yang dipetakan ke nol

$$\text{inti}(\varphi) = \{v \in M | \varphi(v) = 0\}$$

merupakan submodul M, sedangkan himpunan peta unsur-unsur dari M

$$\text{peta}(\varphi) = \varphi(M) = \{\varphi(v) | v \in M\}$$

merupakan submodul dari N.

2.4 Jumlah Langsung Modul

Definisi 2.19. Misalkan $\mathcal{F} = \{S_i | i \in I\}$ adalah koleksi submodul-submodul dari R-modul M. Modul M dikatakan *jumlah langsung* dari submodul-submodul di $\mathcal{F}$

$$M = \bigoplus_{i \in I} S_i \qquad \text{atau } M = \bigoplus \mathcal{F}$$

jika

1. $M = \sum_{i \in I} S_i$
2. Untuk setiap $i \in I$,
$$S_i \bigcap \Big(\sum_{j \neq i} S_j \Big) = \{0\}$$

Dalam hal ini, S_i disebut *suku langsung* dari M. Jika $\mathcal{F}$ hingga dituliskan

$$M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n.$$

Jika $M = S \oplus T$, S dikatakan *terkomplemen* dan T disebut *komplemen* dari S di M, begitu juga sebaliknya T dikatakan terkomplemen dan S disebut komplemen dari T di M.

Teorema 2.20. *Misalkan $\mathcal{F} = \{S_i | i \in I\}$ adalah koleksi submodul-submodul yang berbeda dari R-modul M. Pernyataan berikut ekivalen*

1. *Untuk setiap $i \in I$,*

$$S_i \bigcap \Big(\sum_{j \neq i} S_j \Big) = \{0\}$$

2. *Unsur 0 tidak dapat dituliskan sebagai penjumlahan unsur taknol dari submodul-submodul yang berbeda di $\mathcal{F}$.*

3. *Setiap unsur taknol v di M hanya dapat dituliskan secara tunggal sebagai penjumlahan unsur-unsur di submodul-submodul yang berbeda di $\mathcal{F}$, yakni*

$$v = s_1 + \cdots + s_n$$

dengan $s_i \in S_i$ dan jika

$$v = t_1 + \cdots + t_m$$

dengan $t_i \in S_i$ maka $m = n$ dan $s_i = t_{\alpha(i)}$ untuk suatu permutasi α.

Contoh 2.21. Pandang

$$\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}, 1 \leq i.j \leq 3 \right\}$$

sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Misalkan

$$\S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dapat ditunjukkan bahwa S adan T adalah submodul dari $\mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}) = S \oplus T$. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Pilih

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$$

dan

$$C = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in T$$

maka diperoleh $A = B + C \in S + T$. Jadi $\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}) \subseteq S + T$, jelas bahwa $S + T \subseteq \mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$, dengan demikian $\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}) = S + T$. Selanjutnya akan ditunjukkan $S \cap T = \{0\}$. Ambil $X \in S \cap T$, maka

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan

$$X = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & r & s \\ 0 & t & u \end{bmatrix}$$

dengan $p, q, r, s, t, u \in \mathbb{Z}$. Diperoleh $a, b, c = 0$, jadi

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian $S \cap T = \{0\}$. Jadi

$$\mathrm{M}_3(\mathbb{Z}) = S \oplus T$$

Jika suatu submodul memiliki komplemen maka komplemennya tidak tunggal, namun kesemua komplemen tersebut saling isomorf. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.22. *Misalkan S adalah submodul terkomplemen dari M, maka semua komplemen dari S di M isomorf dengan M/S, khususnya semua komplemen dari S saling isomorf.*

2.5 Daerah Dedekind

Dalam tuisan ini daerah Dedekind didefinisikan melalui ideal fraksional. Sebelum mendefinisikan ideal fraksional, terlebih dahulu akan diperkenalkan lapangan hasil bagi pada daerah integral. Konsep lapangan hasil bagi pada daerah integral merupakan perumuman pembentukan lapangan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dari gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Misalkan R adalah daerah integral dan $D = R - \{0\}$. Didefinisikan relasi $\sim$ pada $R \times D$ sebagai berikut

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

untuk setiap $a, c \in R$ dan $b, d \in D$. Dapat ditunjukkan bahwa relasi $\sim$ merupakan relasi ekivalen. Kelas ekivalen dari (a, b) dinotasikan dengan a/b. Sedangkan himpunan kelas-kelas ekivalen dari $R \times D$ dinotasikan dengan RD^{-1}. Didefinisikan operasi tambah dan kali pada RD^{-1} berturut-turut sebagai berikut

$$\begin{aligned}(a/b) + (c/d) &= (ad + bc)/bd \\ (a/b)(c/d) &= ac/bd.\end{aligned}$$

Bersama kedua operasi tersebut, RD^{-1} membentuk gelanggang khususnya lapangan dan disebut *lapangan hasil bagi* dari R. Dari pengkonstruksian ini jelas bahwa sebarang daerah integral selalu memiliki lapangan hasil bagi. Lapangan hasil bagi $K = RD^{-1}$ merupakan modul atas R.

Definisi 2.23. Misalkan R adalah daerah integral dengan lapangan hasil bagi K. Suatu R-submodul taknol $A \subseteq K$ dikatakan *ideal fraksional* dari R jika terdapat $d \in R$ taknol sehingga $dA \subseteq R$.

Misalkan R adalah daerah integral. Dari definisi ideal fraksional jelas bahwa setiap ideal taknol dari R adalah ideal fraksional dari R. Sebaliknya setiap ideal fraksional dari R yang termuat di R adalah ideal taknol dari R.

Misalkan A adalah ideal fraksional dari R maka terdapat $0 \neq d \in R$ sehingga $dA \subseteq R$, yakni dA merupakan ideal dari R. Artinya $dA = I$ untuk suatu ideal taknol I dari R. Dengan kata lain $A = d^{-1}I$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa suatu R-submodul taknol A dari K adalah ideal fraksional dari R jika dan hanya jika $A = d^{-1}I$ untuk suatu $0 \neq d \in R$ dan I ideal taknol dari R.

Contoh 2.24.

- Submodul $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ dari $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Q}$ adalah ideal fraksional dari $\mathbb{Z}$ karena terdapat $4 \in \mathbb{Z}$ sehingga $4(\frac{1}{2}\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$.
- Misalkan R adalah daerah integral dengan lapangan hasil bagi K. Setiap R-submodul S dari K yang dibangun secara hingga merupakan ideal fraksional dari R karena dapat dipilih $a \neq 0$ adalah penyebut sekutu dari unsur-unsur pembangun S sehingga diperoleh $aS \subseteq R$.

Tidak setiap R-submodul dari lapangan hasil bagi K dari R merupakan ideal fraksional. Pandang $\mathbb{Z}$ dengan lapangan hasil bagi $\mathbb{Q}$. Misalkan p adalah unsur prima di $\mathbb{Z}$. Himpunan

$$A = \left\{ \frac{a}{p^k} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

merupakan $\mathbb{Z}$-submodul dari $\mathbb{Q}$ namun bukan ideal fraksional dari $\mathbb{Z}$.

Misalkan R adalah daerah integral dengan lapangan hasil bagi K. Serupa dengan perkalian dua ideal dari R, dapat didefinisikan pula perkalian dari dua ideal fraksional. Misalkan I dan J adalah ideal fraksional dari R. Didefinisikan hasil kali dari I dan J adalah himpunan semua jumlah hingga perkalian unsur-unsur di I dan J

$$IJ = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \;\middle|\; a_k \in I, b_k \in J, n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa IJ adalah R-submodul dari K. Khususnya submodul taknol. Karena I dan J adalah ideal fraksional maka terdapat $0 \neq a, b \in R$ sehingga $aI \subseteq R$ dan $bJ \subseteq R$. Diperoleh $abIJ = aIbJ \subseteq R$ dengan $0 \neq ab \in R$. Dengan demikian IJ juga merupakan ideal fraksional dari R. Jadi hasil kali dari dua ideal fraksional merupakan ideal fraksional.

Misalkan I adalah ideal fraksional dari R, didefinisikan himpunan

$$I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa I^{-1} adalah R-submodul taknol dari K. Karena I adalah ideal fraksional maka tedapat $0 \neq r \in I$. Diperoleh $rI^{-1} = I^{-1}r \subseteq R$. Oleh karena itu I^{-1} juga merupakan ideal fraksional dari R. Dari definisi I^{-1}, jelas bahwa $II^{-1} \subseteq R$. Namun tidak selalu berlaku sebaliknya. Jika berlaku $II^{-1} = R$, maka I dikatakan *dapat dibalik*.

Jika ideal fraksional I dari R dapat dibalik maka $II^{-1} = R$. Di lain pihak misalkan terdapat ideal fraksional J dari R sehingga $IJ = R$, dapat ditunjukkan bahwa $J = I^{-1}$. Dengan demikian ideal fraksional I dapat dibalik jika dan hanya jika terdapat ideal fraksional J sehingga $IJ = R$.

Misalkan A adalah ideal taknol dari R. Balikan dari ideal A adalah balikan dari A sebagai ideal fraksional dari R. Ideal A dikatakan dapat dibalik jika sebagai ideal fraksional A dapat dibalik. Dengan demikian balikan dari suatu ideal adalah suatu ideal fraksional yang berada pada lapangan hasil bagi K dari R.

Pandang daerah integral $\mathbb{Z}$ dengan lapangan hasil bagi $\mathbb{Q}$. Ideal fraksional dari $\mathbb{Z}$ berbentuk

$$I = \frac{a}{d}\mathbb{Z}$$

untuk suatu $0 \neq a, d \in \mathbb{Z}$ dengan

$$I^{-1} = \frac{d}{a}\mathbb{Z}$$

dan berlaku

$$II^{-1} = \left(\frac{a}{d}\mathbb{Z}\right)\left(\frac{d}{a}\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}.$$

Dengan demikian $\mathbb{Z}$ adalah daerah integral yang setiap ideal fraksionalnya dapat dibalik.

Tidak setiap daerah integral ideal fraksionalnya selalu dapat dibalik. Misalkan F adalah lapangan. Gelanggang polinom atas F dengan dua variabel $R = F[x, y]$ adalah daerah integral. Perhatikan ideal $\langle x, y \rangle$ dari R merupakan ideal fraksional dari R yang tidak dapat dibalik. Daerah integral yang setiap ideal fraksionalnya dapat dibalik diberi nama tersendiri sebagai berikut.

Definisi 2.25. Daerah integral R dikatakan *daerah Dedekind* jika setiap ideal fraksional dari R dapat dibalik.

Untuk mengenali apakah suatu daerah integral merupakan daerah Dedekind tidak harus melihat keterbalikan dari semua ideal fraksionalnya. Daerah Dedekind dapat pula dikenali melalui keterbalikan ideal taknolnya saja. Hal ini memberikan suatu karakteristik untuk daerah Dedekind yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.26. *Daerah integral R dikatakan daerah Dedekind jika dan hanya jika setiap ideal taknol dari R dapat dibalik.*

Bukti. Jika R adalah daerah Dedekind maka setiap ideal fraksional dari R dapat dibalik. Oleh karena itu setiap ideal taknol dari R dapat dibalik. Sebaliknya misalkan setiap ideal taknol dari R dapat dibalik. Misalkan I adalah sebarang ideal fraksional dari R. Misalkan pula $0 \neq a \in R$ sehingga $aI \subseteq R$, maka aI adalah ideal taknol dari R. Karena setiap ideal taknol dari R dapat dibalik maka $(aI)(aI)^{-1} = R$. Oleh karena itu untuk setiap $r \in R$ dapat dituliskan sebagai

$$r = \sum_{i=1}^{n} a y_i x_i$$

dengan $y_i \in I$ dan $x_i \in (aI)^{-1}$. Perhatikan karena $x_i \in (aI)^{-1}$ maka $a x_i I = x_i(aI) \subseteq R$. Oleh karena itu $a x_i \in I^{-1}$. Diperoleh

$$r = \sum_{i=1}^{n} y_i (a x_i) \in I I^{-1}.$$

Jadi $R \subseteq II^{-1}$. Dengan demikian $II^{-1} = R$. Artinya setiap ideal fraksional dari R dapat dibalik. Jadi R adalah daerah Dedekind. $\square$

Proposisi 2.27. *Daerah ideal utama adalah daerah Dedekind.*

Bukti. Misalkan R adalah daerah ideal utama. Misalkan $I = aR$ adalah ideal taknol dari R. Jelas bahwa $a^{-1}R \subseteq I^{-1}$. Misalkan $x \in I^{-1}$ maka $xa \in R$. Oleh karena itu $x \in a^{-1}R$. Jadi $I^{-1} = a^{-1}R$. Perhatikan $1 = aa^{-1} \in II^{-1}$. Akibatnya $R \subseteq II^{-1}$ dan diperoleh $II^{-1} = R$. Jadi setiap ideal taknol dari R dapat dibalik. Dengan demikian daerah ideal utama adalah daerah Dedekind. $\square$

Telah ditunjukkan bahwa daerah ideal utama merupakan daerah Dedekind. Oleh karena itu daerah Dedekind dapat dipandang sebagai perumuman dari daerah ideal utama. Namun daerah Dedekind tidak selalu daerah ideal utama. Berikut diberikan contoh daerah Dedekind yang bukan daerah ideal utama.

Contoh 2.28. Daerah integral $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ adalah daerah Dedekind dengan $2, 3, 1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ adalah unsur tak tereduksi di $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dan berlaku

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

Jadi $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bukan daerah faktorisasi tunggal. Oleh karena itu $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bukan daerah ideal utama.

BAB 3

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan studi literatur. Langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan sebagai berikut.

1. Mempelajari modul tidak terdekomposisi.
2. Mempelajari struktur modul atas daerah ideal utama.
3. Mempelajari dekomposisi modul atas daerah ideal utama.
4. Mempelajari karakterisasi modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama.
5. Menelaah struktur modul atas daerah Dedekind.
6. Mengkaji dekomposisi pada modul atas daerah Dedekind.
7. Mengkarakterisasi modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Modul Tidak Terdekomposisi

Modul tidak terdekomposisi merupakan kondisi yang lebih lemah dari modul sederhana. Merujuk Passman (2004:23), berikut adalah definisi modul sederhana.

Definisi 4.1. Misalkan R adalah suatu gelanggang dan V adalah suatu R-modul. Modul V dikatakan *tidak tereduksi* atau *sederhana* jika V taknol dan tidak memiliki submodul sejati taknol.

Contoh 4.2. Perhatikan $A = \{0, 2, 4\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}$-modul. Submodul dari A hanya $\{0\}$ dan A sendiri. Jadi A adalah $\mathbb{Z}$-modul sederhana.

Definisi 4.3. Misalkan R adalah suatu gelanggang dan V adalah suatu R-modul. Modul V dikatakan *tereduksi secara lengkap (semi sederhana)* jika setiap submodul dari V adalah suku langsung. Hal ini berarti bahwa jika $W \subseteq V$ adalah submodul V maka terdapat $U \subseteq V$ submodul V sehingga $V = W \oplus U$.

Jelas bahwa modul sederhana adalah modul semi sederhana, namun sebaliknya modul semi sederhana belum tentu sederhana.

Modul semi sederhana dapat juga dikatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul sederhana. Hal ini dinyatakan dalam Passman (2004:24) dalam suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 4.4. *Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen untuk R-modul V.*

1. *V adalah jumlah submodul-submodul sederhana.*
2. *V adalah jumlah langsung submodul-submodul sederhana.*
3. *V semi sederhana.*

Bukti teorema tidak diberikan disini dan dapat dilihat dalam Passman (2004:24).

Selanjutnya akan diberikan pengertian modul tidak terdekomposisi. Dalam Roman (2008:158) disebutkan pengertian modul tidak terdekomposisi sebagai berikut.

Definisi 4.5. Suatu modul M dikatakan *tidak terdekomposisi* jika tidak dapat dituliskan sebagai jumlah langsung submodul-submodul sejatinya.

Dengan kata lain, modul M dikatakan modul tidak terdekomposisi jika M tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul sejati taknol. Perhatikan bahwa setiap submodul sederhana adalah modul tidak terdekomposisi, namun sebaliknya modul tidak terdekomposisi belum tentu modul sederhana. Berikut diberikan contoh modul tidak terdekomposisi yang tidak sederhana.

Contoh 4.6. Pandang $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul, maka $\mathbb{Z}$ adalah modul tidak terdekomposisi. Hal ini karena irisan sebarang dua submodul taknol dari $\mathbb{Z}$ bukan modul nol.
Misalkan S dan T adalah submodul taknol dari $\mathbb{Z}$, maka S dan T adalah ideal dari gelanggang $\mathbb{Z}$, oleh karena itu $S = \langle s \rangle$ dan $T = \langle t \rangle$ untuk suatu $0 \neq s, t \in \mathbb{Z}$. Misalkan k adalah kelipatan persekutuan terkecil dari s dan t, akan ditunjukkan $S \cap T = \langle k \rangle$. Pertama ambil $x \in S \cap T$, maka $x = \alpha s$ dan $x = \beta t$ untuk suatu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Jadi $s|x$ dan $t|x$, oleh karena itu $k = \mathrm{lcm}(s,t)|x$. Jadi $x \in \langle k \rangle$. Sebaliknya misalkan $x \in \langle k \rangle$ maka jelas $x \in S \cap T$. Jadi $S \cap T = \langle k \rangle$. Perhatikan karena $s, t \neq 0$ maka $k \neq 0$. Dengan demikian $S \cap T = \langle k \rangle \neq \{0\}$. Oleh karena itu $\mathbb{Z}$ tidak mungkin dapat dinyatakan dalam jumlah langsung submodul-submodul sejati taknol. Jadi $\mathbb{Z}$ adalah modul tidak terdekomposisi. Namun $\mathbb{Z}$ bukan modul sederhana karena $\mathbb{Z}$ memiliki submodul sejati taknol antara lain $2\mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa modul tidak terdekomposisi merupakan perumuman dari modul sederhana, sehingga sebagai perumuman modul semi sederhana muncul konsep jumlah langsung submodul-submodul tidak terdekomposisi. Rowen (1991:237) memberikan definisi sebagai berikut.

Definisi 4.7. Suatu R-modul M disebut *terdekomposisi secara lengkap* jika M dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung

$$M = \oplus_{i \in I} M_i$$

dengan M_i adalah modul tidak terdekomposisi.

Contoh 4.8. Misalkan $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$. Akan ditunjukkan bahwa

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4$$

dengan

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Misalkan $x \in M$ maka

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tulis

$$x = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in M_1 + M_2 + M_3 + M_4.$$

Jadi $M \subseteq M_1 + M_2 + M_3 + M_4$, jelas bahwa $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \subseteq M$, dengan demikian $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $i = 1, \cdots, 4$, $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$. Misalkan $x \in M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j$ maka

$$x = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

dengan $a_j = 0$ untuk setiap $j = 1, \cdots, 4, j \neq i$ dan

$$x = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

dengan $a_i = 0$. Dengan demikian $a_i = 0$ untuk setiap $i = 1, \cdots, 4$. Diperoleh

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi $M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$. Dengan demikian

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M_1 adalah modul tidak terdekomposisi. Misalkan S adalah submodul M_1 maka

$$S \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \quad a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Misalkan

$$I = \left\{ r \in \mathbb{Z} \middle| \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S \right\}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa I adalah ideal dari $\mathbb{Z}$, sehingga $I = \langle s \rangle$ untuk suatu $s \in \mathbb{Z}$ dan diperoleh

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Demikian juga jika T adalah submodul dari M_1 maka terdapat $t \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$T = \left\langle \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Akibatnya untuk sebarang dua submodul sejati taknol S dan T diperoleh

$$S \cap T = \left\langle \begin{bmatrix} \operatorname{lcm}(s,t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Oleh karena itu M_1 tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung dua submodul sejati taknol. Jadi M_1 adalah modul tidak terdekomposisi. Dengan cara yang sama dapat pula dtunjukkan bahwa M_2, M_3, M_4 juga merupakan modul tidak terdekomposisi. Dengan demikian M dapat dinyatakan sebagai jumlah langsung submodul-submodul tidak terdekomposisi. Jadi M adalah modul terdekomposisi secara lengkap.

Pada konsep modul terdekomposisi secara lengkap, penting untuk mengenali apakah suatu modul merupakan modul tidak terdekomposisi. Oleh karena itu tulisan ini akan membahas karakterisasi modul tidak terdekomposisi. Modul yang akan kita perhatikan adalah modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind. Dalam tulisan ini, karakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind diperumum dari karakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama. Sebelum beranjak pada karakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind, akan dibahas terlebih dahulu karakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama.

4.2 Karakterisasi Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Ideal Utama

Pada bagian ini akan dibahas karakterisasi modul tidak terdekomposisi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Karakterisasi ini telah dipaparkan pada Roman (2008). Pertama akan ditinjau terlebih dahulu mengenai dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama.

Setiap modul bebas atas daerah integral senantiasa bebas torsi. Sebaliknya tidak selalu berlaku. Namun jika gelanggang tumpuan dari suatu modul yang dibangun secara hingga adalah daerah ideal utama maka berlaku modul bebas jika dan hanya jika bebas torsi. Hal tersebut dinyatakan dalam teorema berikut. Bukti dari teorema dapat dilihat pada Roman (2008), Teorema 6.8.

Teorema 4.9. *Modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah bebas jika dan hanya jika bebas torsi.*

Tahap pertama dalam dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah menguraikan modul menjadi jumlah langsung submodul bebas dan submodul torsi berikut.

Teorema 4.10. *Modul yang dibangun secara hingga M atas daerah ideal utama R adalah jumlah langsung dari submodul bebas yang dibangun secara hingga F dan submodul torsi yang dibangun secara hingga*

$$M = F \oplus M_{tor}.$$

Submodul torsi M_{tor} pada Teorema 4.10 tungga. Sedangkan submodul bebas F tunggal terhadap isomorfisma. Submodul bebas dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung dari submodul-submodul siklis melalui unsur-unsur di basis. Oleh karena itu langkah selanjutnya adalah mendekomposisikan submodul torsi.

Pendekomposisian modul torsi diawali dengan menguraikan modul torsi menjadi jumlah langsung dari submodul-submodul primer. Dekomposisi ini dinamakan dengan dekomposisi primer. Sebelum mendefinisikan modul primer, berikut diberikan konsep orde pada modul atas daerah ideal utama.

Definisi 4.11. Misalkan R adalah daerah ideal utama dan M adalah suatu R-modul.

1. Jika N adalah submodul dari M maka sebarang pembangun dari $\mathrm{Ann}(N)$ disebut *orde* dari N.

2. *Orde* dari suatu unsur $v \in M$ adalah orde dari submodul $\langle v \rangle$.

Selanjutnya orde dari N dinotasikan dengan $\mathrm{o}(N)$ dan orde dari v dinotasikan dengan $\mathrm{o}(v)$.

Definisi 4.12. Misalkan R adalah daerah ideal utama dan p adalah unsur prima di R. Suatu R-modul dikatakan *p-primer* jika ordenya adalah p^e untuk suatu $e \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Berikut adalah teorema dekomposisi modul torsi menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer. Bukti teorema dapat dilihat pada Roman (2008), Teorema 6.10.

Teorema 4.13. *Misalkan M adalah suatu modul torsi atas daerah ideal utama R berorde*

$$\mu = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$$

dengan p_i adalah unsur prima di R yang tidak saling sekawan dan $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Maka

$$M = M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_n}$$

dengan

$$M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}} M = \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0\}$$

adalah submodul primer berorde $p_i^{e_i}$. Dekomposisi ini bersifat tunggal terhadap urutan suku langsung.

Langkah selanjutnya dalam dekomposisi adalah menguraikan submodul primer menjadi jumlah langsung dari submodul-submodul primer siklis. Dekomposisi ini terangkum dalam teorema berikut. Bukti teorema dapat dilihat pada Roman (2008), Teorema 6.12.

Teorema 4.14. *Misalkan M adalah modul torsi primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R berorde p^e untuk suatu p unsur prima di R dan $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ maka*

1. *M adalah jumlah langsung dari submodul-submodul siklis*

$$M = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

dengan $Ann(\langle v_i \rangle) = \langle p^{e_i} \rangle$, $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ sehingga

$$Ann(\langle v_1 \rangle) \subseteq \cdots \subseteq Ann(\langle v_n \rangle)$$

ekivalen dengan

$$e = e_1 \geq \cdots \geq e_n.$$

2. *Misalkan M adalah jumlah langsung*

$$M = \langle u_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle u_m \rangle$$

dengan $Ann(\langle u_i \rangle) = \langle q^{f_i} \rangle$ untuk suatu q unsur prima di R dan $f_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ sehingga

$$Ann(\langle u_1 \rangle) \subseteq \cdots \subseteq Ann(\langle u_m \rangle)$$

maka $m = n$ dan $Ann(\langle u_i \rangle) = Ann(\langle v_i \rangle)$ untuk setiap $i = 1, \cdots, m$.

Dengan menggabungkan kedua dekomposisi modul torsi menjadi jumlah langung submodul-submodul primer dan modul primer menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis maka modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 4.15. *Misalkan M adalah modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R. Jika M berorde*

$$\mu = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$$

dengan p_i adalah unsur-unsur prima berbeda di R yang tidak saling sekawan, maka M dapat didekomposisikan secara tunggal menjadi jumlah langsung

$$M = M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_n}$$

dengan

$$M_{p_i} = \frac{\mu}{p_i^{e_i}} M = \{v \in M \mid p_i^{e_i} v = 0\}$$

adalah submodul primer berorde $\langle p_i^{e_i} \rangle$. *Selanjutnya masing-masing submodul primer* M_{p_i} *dapat dituliskan sebagai jumlah langsung submodul-submodul siklis, sehingga*

$$M = [\underbrace{\langle v_{1,1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{1,k_1} \rangle}_{M_{P_1}}] \oplus \cdots \oplus [\underbrace{\langle v_{n,1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{n,k_n} \rangle}_{M_{P_n}}]$$

dengan $ann(\langle v_{i,j} \rangle) = \langle p_i^{e_{i,j}} \rangle$.

Peratikan dalam pendekomposisian modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama tersebut diperoleh rantai annihilator

$$\operatorname{ann}(\langle v_{i,j} \rangle) = \langle p_i^{e_{i,j}} \rangle$$

tunggal kecuali dalam urutannya. Himpunan $\{p_i^{e_{i,j}}\}$ tunggal secara kesekawanan unsur-unsurnya. Unsur-unsur $p_i^{e_{i,j}}$ disebut *pembagi elementer* dari M.

Tinjau kembali dekomposisi yang telah dilakukan pada modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama menghasilkan jumlah langsung submodul-submodul siklis. Namun lebih jauh submodul-submodul siklis tersebut tidak dapat didekomposisikan lagi. Hal ini memberikan karakteristik bagi modul tidak terdekomposisi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Dalam Roman (2008:159) dipaparkan karakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama sebagai berikut.

Teorema 4.16. *Misalkan* M *adalah modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, maka pernyataan berikut ekivalen*

1. M *tidak terdekomposisi*
2. M *siklis primer*
3. M *hanya memiliki satu pembagi elementer*

4.3 Karakterisasi Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Dedekind

Dalam penelitian ini penulis melakukan perumuman atau membuat padanan karakterisasi modul tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama pada Teorema 4.16 untuk modul atas daerah Dedekind. Seperti pada kasus modul atas daerah ideal utama, pertama akan kita tinjau dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind. Dalam dekomposisi ini akan melibatkan modul projektif. Berikut pengertian modul projektif.

Definisi 4.17. Suatu R-modul P dikatakan *modul projektif* jika untuk setiap R-epimorfisma $\beta : V \to W$ dan setiap R-homomorfisma $\alpha : P \to W$, terdapat R-homomorfisma $\gamma : P \to V$ sehingga $\alpha = \beta\gamma$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ V \arrow[r, "\beta"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Contoh 4.18.

1. $\mathbb{Z}^3$ adalah $\mathbb{Z}$-modul projektif.
2. $\mathbb{Z}_2$ merupakan $\mathbb{Z}_6$-modul projektif yang tidak bebas.

Modul bebas torsi yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama adalah moodul bebas, namun modul bebas torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind merupakan modul projektif.

Teorema 4.19. *Modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind adalah bebas torsi jika dan hanya jika projektif.*

Bukti Teorema 4.19 dapat dilihat di Ismiarti (2014). Selanjutnya padanan dekomposisi modul atas daerah ideal utama menjadi jumlah langsung submodul bebas dan submodul torsi pada modul atas daerah Dedekind adalah jumlah langsung submodul projektif dan submodul torsi seperti dinyatakan dalam Ismiarti (2014) berikut.

Teorema 4.20. *Misalkan M adalah modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind R. Maka*

$$M = P \oplus M_{tor}$$

dengan P adalah suatu submodul projektif, P dan M_{tor} dibangun secara hingga. Lebih lanjut suku langsung P tunggal terhadap isomorfisma.

Selanjutnya suku langsung projektif yang diperoleh pada Teorema 4.20 dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis atau submodul-submodul siklis dan submodul projektif yang dapat dibangun dua unsur. Bukti Teorema berikut dapat dilihat pada Ismiarti (2014).

Teorema 4.21. *Misalkan R adalah daerah Dedekind dan M adalah R-modul projektif yang dibangun secara hingga. Maka*

$$M = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k \rangle \oplus \langle v, w \rangle$$

dengan $\langle v, w \rangle = \{0\}$ atau $\langle v, w \rangle$ projektif.

Pada modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, modul torsi diuraikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer, yakni modul torsi yang annihilatornya dibangun oleh perpangkatan unsur prima. Pada daerah Dedekind karena idealnya tidak selalu dapat dibangun satu unsur maka annihilator modul atas daerah Dedekind tidak selalu dapat dibangun satu unsur. Oleh karena itu perlu dibuat padanan definisi modul primer untuk modul atas daerah Dedekind. Ismiarti (2014) membuat padanan definisi untuk modul primer atas daerah Dedekind sebagai berikut.

Definisi 4.22. Misalkan P adalah ideal prima taknol di daerah Dedekind R. Suatu R-modul dikatakan *P-primer* jika annihilatornya adalah P^e untuk suatu $e \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Dekomposisi dilanjutkan pada bagian torsi. Dengan definisi modul primer atas daerah Dedekind tersebut, modul torsi atas daerah Dedekind dapat diuraikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul primer sebagai berikut.

Teorema 4.23. *Misalkan M adalah suatu modul torsi atas daerah Dedekind R dengan pembuat nol*

$$Ann(M) = P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n}$$

dengan P_i adalah ideal prima taknol berbeda di R dan $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Maka

$$M = M_{P_1} \oplus \cdots \oplus M_{P_n}$$

dengan

$$M_{P_i} = \{v \in M \mid P_i^{e_i} v = \{0\}\}$$

adalah submodul primer dengan $Ann(M_{P_i}) = P_i^{e_i}$.

Seperti pada modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama, selanjutnya dilakukan dekomposisi pada modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis.

Teorema 4.24. *Misalkan M adalah modul torsi primer yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind R dengan $Ann(M) = P^e$ untuk suatu P ideal prima taknol di R dan $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ maka*

$$M = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

dengan $Ann(\langle v_i \rangle) = P^{e_i}$, $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ sehingga

$$Ann(\langle v_1 \rangle) \subseteq \cdots \subseteq Ann(\langle v_n \rangle)$$

ekivalen dengan

$$e = e_1 \geq \cdots \geq e_n.$$

Lebih lanjut banyaknya suku langsung dalam dekomposisi ini tunggal.

Bukti Teorema 4.23 dan Teorema 4.24 dapat ditemukan dalam Ismiarti (2014). Berdasarkan Teorema 4.23 dan Teorema 4.24 didapatkan bahwa modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind dapat didekomposisikan menjadi jumlah langsung submodul-submodul siklis sebagai berikut.

Teorema 4.25. *Misalkan M adalah modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind R. Jika M memiliki annihilator*

$$Ann(M) = P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n}$$

dengan P_i adalah ideal-ideal prima berbeda di R yang tidak saling sekawan, maka M dapat didekomposisikan secara tunggal menjadi jumlah langsung

$$M = M_{P_1} \oplus \cdots \oplus M_{P_n}$$

dengan

$$M_{P_i} = \{v \in M \mid P_i^{e_i} v = \{0\}\}$$

adalah submodul primer dengan $Ann(M_{P_i}) = P_i^{e_i}$. Selanjutnya masing-masing submodul primer M_{P_i} dapat dituliskan sebagai jumlah langsung submodul-submodul siklis, sehingga

$$M = [\underbrace{\langle v_{1,1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{1,k_1}\rangle}_{M_{P_1}}] \oplus \cdots \oplus [\underbrace{\langle v_{n,1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{n,k_n}\rangle}_{M_{P_n}}]$$

dengan $Ann(\langle v_{i,j}\rangle) = P_i^{e_{i,j}}$.

Untuk melihat bagaimana modul tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind perhatikan kembali Teorema 4.20 menyatakan bahwa modul yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind senantiasa dapat diuraikan menjadi jumlah langsung submodul projektif dan submodul torsi. Dengan demikian modul tidak terdekomposisi haruslah modul torsi atau modul projektif.

Selanjutnya akan dipaparkan karakterisasi modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind sebagai padanan karakterisasi modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama pada Teorema 4.16. Pada karakterisasi modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah ideal utama terdapat karakteristik melalui pembagi elementer. Oleh karena itu akan dibuat padanan konsep pembagi elementer pada modul atas daerah ideal utama untuk modul atas daerah Dedekind. Perhatikan bahwa rantai annihilator

$$Ann(\langle v_{i,j} \rangle) = P_i^{e_{i,j}}$$

dari modul torsi yang dibangun secara hingga M pada Teorema 4.25 bersifat tunggal. Selanjutnya didefinisikan *pembagi elementer* dari M adalah ideal-ideal $P_i^{e_{i,j}}$ tersebut.

Sebelum memberikan karakterisasi untuk modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind, berikut lema-lema yang akan diperlukan dalam pembuktian selanjutnya.

Lema 4.26. *Misalkan P adalah ideal prima taknol di daerah Dedekind R maka*

$$R_P = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in R, b \in R - P \right\}$$

adalah daerah ideal utama.

Lema 4.27. *Misalkan P adalah ideal prima taknol dari daerah Dedekind R dan $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ maka gelanggang $R/P^e \cong R_P/P^e R_P$.*

Bukti. Definisikan pemetaan

$$\begin{aligned} \varphi : R &\longrightarrow R_P/P^e R_P \\ r &\longmapsto \frac{r}{1} + P^e R_P. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan bahwa φ adalah homomorfisma gelanggang. Akan ditunjukkan φ pada. Misalkan $\overline{y} \in R_P/P^e R_P$. Tulis $y = a/b$ dengan $a \in R$ dan $b \in R \setminus P$. Akan dicari $x \in R$ sehingga $xb \equiv a \bmod P^e$. Perhatikan bahwa $b \notin P$. Oleh karena itu $Rb \nsubseteq P$. Akibatnya P^e relatif prima dengan Rb, yakni $P^e + Rb = R$. Jadi $a \in P^e + Rb$. Tulis $a = c + rb$ dengan $c \in P^e$ dan $r \in R$. Diperoleh $rb - a = -c \in P^e$. Oleh karena itu $rb \equiv a \bmod P^e$. Dengan memilih

$x = r$ diperoleh

$$\begin{aligned} & rb \equiv a \bmod P^e \\ \Rightarrow \quad & rb - a \in P^e \\ \Rightarrow \quad & \frac{rb-a}{b} \in P^e R_P \\ \Rightarrow \quad & \frac{r}{1} - \frac{a}{b} \in P^e R_P \\ \Rightarrow \quad & \frac{r}{1} + P^e R_P = \frac{a}{b} + P^e R_P = \overline{y} \\ \Rightarrow \quad & \varphi(x) = \varphi(r) = \overline{y}. \end{aligned}$$

Jadi φ pada. Selanjutnya akan ditunjukkan $\text{inti}(\varphi) = P^e$. Jelas bahwa $P^e \subseteq \text{inti}(\varphi)$. Misalkan $x \in \text{inti}(\varphi)$ maka

$$x + P^e R_P = \frac{x}{1} + P^e R_P = \varphi(x) = P^e R_P.$$

Oleh karena itu $x \in P^e R_P \cap R = P^e$. Jadi $\text{inti}(\varphi) = P^e$. Dengan demikian gelanggang

$$R/P^e \cong R_P/P^e R_P.$$

□

Dengan pembagi elementer yang didefinisikan pada modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind dapat dibuat padanan Teorema 4.16 sehingga diperoleh karakterisasi modul torsi tidak terdekomposisi atas daerah Dedekind sebagai berikut.

Teorema 4.28. *Misalkan M adalah modul torsi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind, maka pernyataan berikut ekivalen*

1. *M tidak terdekomposisi*
2. *M siklis primer*
3. *M hanya memiliki satu pembagi elementer*

Bukti. Pernyataan 2 dan 3 ekivalen berdasarkan Teorema 4.25 dan definisi pembagi elementer. Selanjutnya tinggal dibuktikan bahwa pernyataan 1 dan 2 ekivalen.

(1 ⇒ 2) Misalkan M adalah modul torsi dengan

$$Ann(M) = P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n}$$

Berdasarkan Teorema 4.25 diperoleh M sebagai jumlah langsung submodul-submodul siklis

$$M = [\underbrace{\langle v_{1,1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{1,k_1}\rangle}_{M_{P_1}}] \oplus \cdots \oplus [\underbrace{\langle v_{n,1}\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_{n,k_n}\rangle}_{M_{P_n}}]$$

dengan $\text{Ann}(\langle v_{i,j}\rangle) = P_i^{e_{i,j}}$. Namun karena M tidak tedekomposisi haruslah $M = \langle v_{i',j'}\rangle$ untuk satu $i' \in \{1, \cdots, n\}$ dan satu $j' \in \{1, \cdots, max\{k_1, \cdots, k_n\}\}$ dan $\langle v_{i,j}\rangle = \{0\}$ untuk semua i, j dengan $(i, j) \neq (i', j')$. Dengan demikian M adalah modul siklis primer.

(2 ⇒ 1) Misalkan M siklis primer dengan $M = \langle v\rangle$ dan annihilator M adalah $\text{Ann}_R(M) = P^e$ untuk suatu P ideal prima taknol dari R dan e bilangan bulat positif.

Perhatikan karena M adalah modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind maka berdasarkan Teorema 4.24 diperoleh

$$M = \langle v_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n\rangle$$

dengan $\text{Ann}(\langle v_i\rangle) = P^{e_i}$, $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Andaikan M adalah R-modul yang dapat didekomposisikan maka $\langle v_i\rangle \neq M$ dan $\langle v_i\rangle \neq \{0\}$ untuk semua $i = 1, \cdots, n$.

Definisikan perkalian skalar

$$R/P^e \times M \to M$$

dengan $(r + P^e)m = rm$ untuk setiap $r + P^e \in R/P^e$ dan $m \in M$. Diperoleh M adalah R/P^e-modul yang dibangun secara hingga dengan $\text{Ann}_{R/P^e}(M) = \{P^e\}$. Perhatikan bahwa $R_P/P^eR_P \cong R/P^e$ sebagai gelanggang. Misalkan φ adalah isomorfisma dari R_P/P^eR_P ke R/P^e. Dengan mendefinisikan perkalian skalar

$$R_P/P^eR_P \times M \to M$$

sebagai

$$\left(\frac{r}{s} + P^eR_P\right)m = \left(\varphi\left(\frac{r}{s} + P^eR_P\right)\right)m$$

untuk setiap $\frac{r}{s} + P^e R_P \in R_P/P^e R_P$ dan $m \in M$ diperoleh M adalah $R_P/P^e R_P$-modul yang dibangun secara hingga dengan

$$\mathrm{Ann}_{R_P/P^e R_P}(M) = \{P^e R_P\}.$$

Selanjutnya perhatikan homomorfisma natural gelanggang

$$\pi : R_P \to R_P/P^e R_P.$$

Dengan mendefinisikan perkalian skalar

$$R_P \times M \to M$$

sebagai

$$\frac{r}{s}m = \left(\pi\left(\frac{r}{s}\right)\right)m = \left(\frac{r}{s} + P^e R_P\right)m$$

untuk setiap $r/s \in R_P$ dan $m \in M$ diperoleh M adalah R_P-modul yang dibangun secara hingga dengan

$$\mathrm{Ann}_{R_P}(M) = P^e R_P = (PR_P)^e.$$

Perhatikan karena R adalah daerah Dedekind maka R_P adalah daerah ideal utama. Perhatikan juga bahwa PR_P adalah ideal prima taknol dari R_P. Karena R_P adalah daerah ideal utama maka $PR_P = \langle p \rangle$ untuk suatu unsur prima p dari R_P. Dengan demikian M adalah modul primer yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dengan $\mathrm{Ann}_{R_P}(M) = (PR_P)^e = \langle p \rangle^e = \langle p^e \rangle$.
Klaim

$$M = R_P v_1 \oplus \cdots \oplus R_P v_n.$$

Akan ditunjukkan bahwa $Rx = R_P x$ untuk setiap $x \in M$. Jelas bahwa $Rx \subseteq R_P x$. Misalkan $a \in R$ dan $b \in R \backslash P$. Berdasarkan perkalian skalar yang telah didefinisikan diperoleh

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b}x &= \left(\frac{a}{b} + P^e R_P\right)x \\
&= \left(\varphi\left(\frac{a}{b} + P^e R_P\right)\right)x \\
&= (c + P^e)x && \text{(untuk suatu } c \in R) \\
&= cx \in Rx
\end{aligned}
$$

Jadi $Rx = R_P x$. Akibatnya

$$M = R_P v_1 + \cdots + R_P v_n.$$

Selanjutnya karena

$$Rv_i \cap \sum_{j \neq i} Rv_j = \{0\}$$

maka

$$R_P v_i \cap \sum_{j \neq i} R_P v_j = \{0\}.$$

Diperoleh

$$M = R_P v_1 \oplus \cdots \oplus R_P v_n$$

dengan $R_P v_i \neq M$ dan $R_P v_i \neq \{0\}$ untuk setiap $i = 1, \cdots, n$ yang artinya M adalah R_P-modul terdekomposisi.

Padahal di lain pihak, karena $R_P v = Rv$ maka M adalah modul primer siklis yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama R_P, berdasarkan Teorema 4.16 diperoleh M adalah R_P-modul yang tidak terdekomposisi. Jadi pengandaian M sebagai R-modul terdekomposisi salah. Dengan demikian haruslah M adalah R-modul tidak terdekomposisi.

$\square$

BAB 5

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini diperoleh kesimpulan-kesimpulan sebagai berikut

1. Modul tidak terdekomposisi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind adalah modul projektif atau modul torsi.

2. Karakteristik modul torsi tidak terdekomposisi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind adalah modul siklis primer dan memiliki satu pembagi elementer

5.2 Saran

Pada penelitian ini telah diperoleh karakteristik modul torsi tidak terdekomposisi yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind. Selanjutnya perlu diteliti karakteristik dari modul projektif yang dibangun secara hingga atas daerah Dedekind.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atani, S.E. 2008. Indecomposable Weak Multiplication Modules over Dedekind Domains *Demonstratio Math.*, 41(1) : 33-43.

[2] Adkins, W.A dan Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

[3] Bland, P. E. 2011. *Rings and Their Modules*. Berlin: De Gruyter.

[4] Chabert, J.-L. 2012. Does Int(Z) have the stacked bases property? *Arabian Journal of Mathematics*, 1 (1): 47-52.

[5] Chun, Jia. 2011. Indecomposable Torsion Modules over Dedekind Domains *Journal of Mathematical Research & Exposition*, 31(1) : 73-78.

[6] Dummit, D.S., and Foote, R.M. 2004. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall.

[7] Gallian, Joseph. 2012. *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: Brooks/Cole.

[8] Ismiarti, Dewi. 2014. *Dekomposisi Modul yang Dibangun Secara Hingga atas Daerah Dedekind*. Tesis tidak diterbitkan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

[9] Narkiewicz, Wladyslaw. 2004. *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[10] Passman, D. S. 1991. *A Course in Ring Theory*. Pacific Grove, Calif.: Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books.

[11] Roman, Steven. 2008. *Advanced Linier Algebra*, Third Edition. New York: Springer Science + Business Media.

[12] Spindler, Karlheinz. 1994. *Abstract Algebra with Applications*, Volume II. New York:Marcell Dekker, Inc.

Jadwal Seminar Progres Report Penelitian

KARAKTERISASI MODUL TIDAK TERDEKOMPOSISI ATAS DAERAH DEDEKIND

Seminar Tahap I : Kajian Ulang Struktur Modul dan Modul Tidak Terdekomposisi
Hari/Tanggal : Selasa/9 Mei 2017

Waktu	Kegiatan	Narasumber
08.00-11.00	Kajian Ulang Struktur Modul	Dewi Ismiarti
11.00-12.00	ISHOMA	
12.00-15.00	Modul Tidak Terdekomposisi	Dewi Ismiarti

Seminar Tahap II : Kajian Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Ideal Utama
Hari/Tanggal : Rabu/24 Mei 2017

Waktu	Kegiatan	Narasumber
08.00-11.00	Pemaparan Dekomposisi Modul atas Daerah Ideal Utama	Dewi Ismiarti
11.00-12.00	ISHOMA	
12.00-15.00	Kajian Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Ideal Utama	Dewi Ismiarti

Ketua Peneliti

Dewi Ismiarti, M.Si

Daftar Hadir Seminar Penelitian

KARAKTERISASI MODUL TIDAK TERDEKOMPOSISI ATAS DAERAH DEDEKIND

Acara : Kajian Ulang Struktur Modul dan Modul Tidak Terdekomposisi

Hari/Tanggal : Selasa/9 Mei 2017

No	Nama	Tanda Tangan
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Ketua Peneliti

Dewi Ismiarti, M.Si

Daftar Hadir Seminar Penelitian

KARAKTERISASI MODUL TIDAK TERDEKOMPOSISI ATAS DAERAH DEDEKIND

Acara : Kajian Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Ideal Utama

Hari/Tanggal : Rabu/24 Mei 2017

No	Nama	Tanda Tangan
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Ketua Peneliti

Dewi Ismiarti, M.Si

CATATAN PRESENTASI

Hari/Tanggal	:	Selasa/9 Mei 2017
Tempat	:	Ruang Meeting Jurusan Matematika
Acara	:	Kegiatan Progres Report Penelitian Karakterisasi Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Dedekind
Ketua Peneliti Dewi Ismiarti, M.Si		

CATATAN PRESENTASI

Hari/Tanggal	:	Rabu/24 Mei 2017
Tempat	:	Ruang Meeting Jurusan Matematika
Acara	:	Kegiatan Progres Report Penelitian Karakterisasi Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Dedekind
Ketua Peneliti Dewi Ismiarti, M.Si		

DAFTAR HADIR NARASUMBER

PROGRES REPORT PENELITIAN

Hari	:	Selasa
Tanggal	:	9 Mei 2017
Jam	:	08.00-15.00
Tempat	:	Ruang Meeting Jurusan Matematika

No	Nama	Judul Presentasi	Tanda Tangan
1	Dewi Ismiarti, M.Si	Kajian Ulang Struktur Modul dan Modul Tidak Terdekomposisi	

Malang,

Ketua Tim Peneliti,

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.

NIP. 19600910 198903 2 001

DAFTAR HADIR NARASUMBER

PROGRES REPORT PENELITIAN

Hari	:	Rabu
Tanggal	:	24 Mei 2017
Jam	:	08.00-15.00
Tempat	:	Ruang Meeting Jurusan Matematika

No	Nama	Judul Presentasi	Tanda Tangan
1	Dewi Ismiarti, M.Si	Kajian Modul Tidak Terdekomposisi atas Daerah Ideal Utama	

Malang,

Ketua Tim Peneliti,

Dr. Hj. Mufidah Ch., M.Ag.

NIP. 19600910 198903 2 001