DISKRITISASI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL POLA PEMBENTUKAN SEL

Khusnul Khamidiyah[1], Usman Pagalay[2]

[1]Mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
[2]Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
e-mail : diyah_af@yahoo.co.id, usmanpagalay@yahoo.co.id

ABSTRAK

Persamaan Meinhardt merupakan sebuah model matematika yang menggambarkan pola pembentukan sel pada *hydra*. Hans Meinhardt menggunakan jenis persamaan difusi untuk menggambarkan bagaimana variabel-variabel berkembang biak, mati, bergerak dan berinteraksi. Bentuk model yang dirumuskan oleh Meinhardt tersebut merupakan model kontinu, sehingga salah satu studi yang dapat diterapkan pada model *Meinhardt* adalah dilakukannya diskritrisasi. Diskritisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Salah satu metode yang dapat memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit ialah metode beda hingga. Sehingga dalam penelitian ini akan dilakukan proses diskritisasi pada model pembentukan sel. Metode yang digunakan adalah beda hingga skema *Crank-Nicolson* yang merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Kelebihan dari skema *Crank-Nicolson* adalah nilai *error* yang lebih kecil dari pada skema eksplisit dan implisit. Dalam penelitian ini digunakan beda hingga maju untuk turunan t dan beda hingga pusat untuk turunan x pada persamaan *activator* $a(x,t)$ dan *inhibitor* $b(x,t)$. Langkah-langkah yang dilakukan adalah dimulai dengan menganalisis persamaan *Meinhardt* dan dilanjutkan dengan diskritisasi.

Kata kunci: Metode beda hingga, persamaan Meinhardt, , skema Crank-Nicolson

ABSTRACT

Meinhardt equation is a mathematical model which describes the pattern of cell formation in hydra. Hans Meinhardt uses the diffusion equation type to describe how the variables are breed, die, move, and interact. The model formulated by Meinhardt is a continuous model. Thus, one of the studies which can be applied to Meinhardt equation is discretization. Discretization is a quantization process of continuous properties. One method which can predict continuous differential form into discrete form is by applying finite difference method. Thus, the proses of discretization will be conducted in this research on the pattern formation of cell. The method used in this study is finite difference method implementing Crank-Nicolson scheme which is the result of explicit and implicit scheme development. The advantage of the Crank Nicolson scheme is the smaller error values than the explicit and implicit scheme. This method used finite forward difference for derivatives of t and finite centre difference for derivatives of x at the activator $a(x,t)$ and inhibitor $b(x,t)$. The Steps conducted by analyzing Meinhardt equation and continued with discretization.

Keywords: Crank-Nicolson scheme, finite difference method, Meinhardt equation

PENDAHULUAN

Sel merupakan kumpulan materi paling sederhana yang dapat hidup dan termasuk unit penyusun tubuh (*building block*). Seluruh makhluk hidup tersusun atas sel. Sel adalah unit dasar kehidupan. Dalam kingdom monera dan protista, keseluruhan organisme tersusun atas sel tunggal. Pada kebanyakan fungi dan dalam kingdom hewan dan tumbuhan, organisme adalah susunan yang luar biasa kompleks dari sel-sel yang bisa triliunan banyaknya (Fried & Hademenos, 2005).

Hydra merupakan metazoan atau hewan bersel banyak yang hidup di kolam atau di sungai yang airnya mengalir. Tubuh *hydra* berbentuk polip yang hidup soliter dalam arti tidak berkoloni, dapat berpindah tempat tetapi biasanya melekat pada obyek, misalnya batu-batuan, batang kayu, tanaman air dan lain-lain. Tubuhnya berbentuk silindris yang dapat dijulurkan serta dipendekkan. Kemampuan untuk dapat menjulur dan memendek ini karena memang tubuh *hydra* memiliki fibril-fibril khusus pada beberapa sel. Panjang tubuh *hydra* mulai dari 2 sampai 20 mm, dengan diameter tubuhnya tidak lebih dari 1 mm (Kastawi, 2005).

Pada organisme yang lebih tinggi, pentingnya proses pembentukan pola dasar pada subdivisi dari sebuah organisme hanya terjadi sekali dan dalam waktu yang relatif singkat. Dalam berbagai kasus, embrio lebih sulit dijangkau dalam manipulasi sebuah penelitian. Berbeda dengan potongan-potongan kecil pada hydra yang hidup di air tawar dapat meregenerasi tubuhnya setiap saat. Oleh karena itu, model organisme yang tepat untuk dipelajari dan diajukan sebagai model serta sistem biologi yang nyata (Gierer, 1977).

Hans Meinhardt merumuskan pola pembentukan sel hydra dalam sebuah sistem persamaan diferensial parsial. Model yang dirumuskan oleh Meinhardt merupakan model kontinu, sehingga salah satu studi yang dapat diterapkan pada model tersebut adalah dilakukannya diskritrisasi. Diskritisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskritisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskrit yang lebih mudah dipahami, digunakan, dan dijelaskan. Oleh karena itu, hasil pembelajaran dengan bentuk diskrit dipandang Dougherty (1995) sebagai hasil yang cepat dan akurat dibandingkan hasil dari bentuk kontinu (Liu, Hussain, Tan, & Dash, 2012).

Salah satu metode yang dapat memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit ialah dengan metode beda hingga. Metode beda hingga yang digunakan oleh penulis dalam penelitian ini adalah skema *Crank-Nicolson* yang merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Kelebihan dari skema *Crank-Nicolson* adalah nilai *error* yang lebih kecil. Berdasarkan paparan tersebut di atas, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji model *Meinhardt* dalam tulisan ini dengan judul *Diskritisasi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel.*

KAJIAN PUSTAKA

1. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan itu haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas. Tingkat persamaan diferensial parsial adalah tingkat turunan tertinggi pada persamaan itu (Ayres, 1992).

2. Orde Persamaan Diferensial Parsial

Orde dari persamaan diferensial parsial ditentukan berdasarkan orde dari turunan tertinggi pada persamaan diferensial parsial tersebut. Sebagai contoh, persamaan diferensial parsial pola pembentukan sel yang kemudian disebut sebagai persamaan *Meinhardt* berikut merupakan contoh persamaan orde satu dan dua:

PDE orde satu: $\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a$

PDE orde dua: $\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$

(Sasongko, 2010).

3. Linieritas Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial berikut merupakan bentuk persamaan diferensial orde dua:

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta = 0 \quad (1)$$

Persamaan diferensial parsial juga digolongkan menjadi persamaan linier, kuasilinier dan nonlinier, dengan penjelasan berikut:

a. Apabila koefisien pada persamaan (1) adalah konstan atau fungsi yang hanya terdiri dari variabel bebas saja $[\alpha = \beta = \gamma = \delta = (x, y)]$, maka persamaan itu disebut persamaan linier;
b. Apabila koefisien pada persamaan (1) adalah fungsi dari variabel tak bebas (*dependent variable*) dan/atau merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $\left[\alpha = \beta = \gamma = \delta = \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan kuasilinier;
c. Apabila koefisiennya merupakan fungsi dengan turunan sama dengan pangkatnya, $\left[\alpha = \beta = \gamma = \delta = \left(x, y, u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan nonlinier.

(Sasongko, 2010).

4. Bentuk Kanonik Persamaan Diferensial Parsial

Berikut ini diberikan beberapa bentuk persamaan diferensial parsial:

a. Persamaan Ellips, jika $b^2 - 4ac < 0$
b. Persamaan Parabola, jika $b^2 - 4ac = 0$
c. Persamaan Hiperbola, jika $b^2 - 4ac > 0$

(Triatmodjo, 2002).

5. Deret Taylor

Deret taylor merupakan dasar untuk menyelesaikam masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i (Triatmodjo, 2002).

Andaikan f adalah suatu fungsi dengan turunan ke $(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$, ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka I yang mengandung a. Maka untuk setiap x di I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Dimana sisa (atau kesalahan) $R_n(x)$ diberikan oleh rumus:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Dengan c suatu titik antara x dan a (Purcell & Varberg, 1999).

Persamaan di atas merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*), yang disebut deret. Perhatikanlah bahwa deret taylor ini panjangnya tidak terhingga, untuk memudahkan penulisan suku-suku selanjutnya kita menggunakan tanda ellipsis $(\cdots)$. Jika dimisalkan $x - a = h$, maka $f(x)$ dapat juga ditulis sebagai:

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n(x)$$

Deret pangkat dari $(x-a)$ yang menggambarkan sebuah fungsi dinamakan deret taylor. Apabila $a = 0$, deret yang bersangkutan disebut deret Maclaurin (Purcell & Varberg, 1999).

6. Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasar pada deret taylor.
Persamaan di bawah ini:

$$y'(x_{i+1}) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

dikenal dengan metode numerik sebagai beda terbagi berhingga. Secara umum dapat dinyatakan sebagai:

$$f'(x_{i+1}) = \frac{\Delta f_i}{h} + oh$$

Dengan Δf_i disebut beda ke depan pertama dan h disebut ukuran langkah, yaitu panjang selang hampiran. Istilah ke depan digunakan karena ada hampiran turunan di titik i dipergunakan data pada titik yang bersangkutan dan titik yang di depannya. Suku $\frac{\Delta f_i}{h}$ disebut sebagai beda terbagi berhingga pertama (Djojodihardjo, 2000).

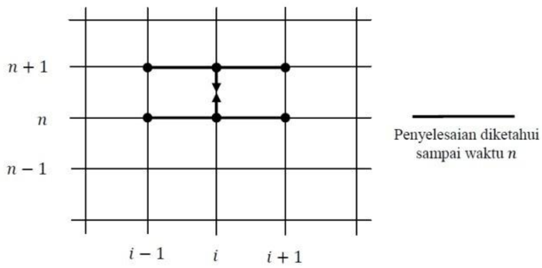
Beda terbagi ke depan ini merupakan salah satu dari beberapa cara yang dapat dikembangkan dari deret taylor guna memperoleh turunan secara numerik.

7. Metode Beda Hingga Skema *Crank-Nicolson*

Skema *Crank-Nicolson* merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Dalam skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu ke n. Dalam skema implisit, ruas kanan ditulis untuk waktu $n+1$. Dalam kedua skema tersebut diferensial terhadap waktu ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\Delta t}$$

yang berarti diferensial terpusat terhadap waktu $n + \frac{1}{2}$. Skema *Crank-Nicolson* menulis ruas kanan pada waktu $n + \frac{1}{2}$ yang merupakan nilai rerata dari skema eksplisit dan implisit. Skema jaringan titik hitungan diberikan oleh gambar 1 berikut.



Gambar 1. Skema *Crank-Nicolson*

Skema ini menggunakan teknik pembobotan untuk diskritisasi waktu sekarang t^n dan diskritisasi waktu yang akan datang t^{n+1} dengan cara yang lebih fleksibel yaitu dengan menggunakan faktor pemberat waktu. Beda hingga terhadap ruang (x):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \theta\left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) + (1-\theta)\left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right) \qquad (2)$$

Dengan $0 \le \theta \le 1$ adalah faktor pemberat waktu (Luknanto, 2003).

Sedangkan untuk beda hingga terhadap waktu:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

Dengan θ adalah koefisien pembobot dengan nilai:

$\theta = 0$, jika skema adalah eksplisit
$\theta = 1$, jika skema adalah implisit
$\theta = \frac{1}{2}$, jika skema adalah *Crank-Nicolson*
(Lapidus & Pinder, 1981).

Sehingga persamaan (2) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right)$$

Crank dan Nicolson (1947) mengajukan dan juga menggunakan sebuah metode yang mereduksi perhitungan pada volume total, dan itu dianggap sah (konvergen dan stabil) untuk semua nilai r. Mereka mempertimbangkan pdp terpenuhi di titik $\left(ih, \left(n + \frac{1}{2}\right)k\right)$ dan mengganti dengan $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ dengan rata-rata perkiraan perbedaan pada saat n dan $n+1$. Dengan kata lain mereka mengganti persamaan

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

dengan persamaan

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{h^2}\right)$$

dan diberikan,

$$-rT_{i-1}^{n+1} + (2+2r)T_i^{n+1} - rT_{i+1}^{n+1} = rT_{i-1}^{n} + (2-2r)T_i^{n} + rT_{i+1}^{n}$$

dimana $r = \frac{k}{h^2}$ (Smith, 1985).

8. Model Meinhardt

(Meinhardt, 2012) menyajikan sebuah model matematika yang menggambarkan pola pembentukan sel pada *hydra*, yang berbentuk sistem persamaan diferensial parsial. Persamaan Meinhardt terdiri dari dua persamaan yang berjenis persamaan difusi. Dengan mendefinisikan $a(x,t)$ sebagai *activator* (pengaktif) dan $b(x,t)$ sebagai *inhibitor* (penghambat) pembentukan sel. Persamaan *Meinhardt* ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

9. Pembentukan Sel *Hydra*

Seluruh makhluk hidup tersusun atas sel. Sel adalah unit dasar kehidupan. Dalam kingdom monera dan protista, keseluruhan organisme tersusun atas sel tunggal. Pada kebanyakan fungi dan dalam kingdom hewan dan tumbuhan, organisme adalah susunan yang luar biasa kompleks dari sel-sel yang bisa triliunan banyaknya (Fried & Hademenos, 2005).

Hydra, satu diantara segelintir Cnidaria yang ditemukan di perairan tawar, merupakan hydrozoa yang tak lazim karena hanya terdapat dalam bentuk polip. Ketika kondisi lingkungan menguntungkan, *hydra* bereproduksi secara aseksual. Ketika kondisi memburuk, *hydra* dapat bereproduksi secara seksual, membentuk zigot resisten yang tetap dorman hingga keadaan membaik (Campbell, et al., 2012).

Pembentukan sel yang dipengaruhi oleh zat pengaktif dan zat penghambat terjadi melalui proses difusi. Dimana difusi sendiri menurut (Villee, 1984) adalah gerakan molekul dari suatu daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah lain dengan konsentrasi lebih rendah yang disebabkan oleh energi kinetik molekul-molekul tersebut. Tiap molekul cenderung bergerak lurus sampai terbentur pada molekul lain kemudian terpental dan bergerak ke arah lain. Setelah tersebar secara merata, molekul tersebut tetap bergerak, tetapi jika ada molekul yang bergerak dengan cepat dari kiri ke kanan, secepat itu pula ada molekul lain yang bergerak dari kanan ke kiri sehingga keseimbangan dapat dipertahankan.

PEMBAHASAN

Variabel-variabel yang digunakan dalam model pengaruh pengaktif dan penghambat terhadap pembentukan sel pada *hydra* diambil dari jurnal yang dirumuskan oleh Hans (Meinhardt, 2012) dalam karya tulisnya yang berjudul *Models of Biological Pattern Formation* sebagai berikut:

Pengaktif (*activator*) $a(x,t)$

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = sb(x,t)a^2(x,t) - r_a a(x,t) + D_a \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2(x,t)}$$

Penghambat (*inhibitor*) $b(x,t)$

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = b_b - sb(x,t)a^2(x,t) - r_b b(x,t) + D_b \frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2(x,t)}$$

Perubahan konsentrasi pengaktif persatuan waktu sebanding dengan kepadatan sel s yang menggambarkan kemampuan sel tersebut untuk melakukan reaksi dan sebanding dengan berkurangnya kerusakan pengaktif melalui pertukaran dengan sel tetangganya akibat difusi. Sedangkan perubahan konsentrasi penghambat persatuan waktu sebanding dengan laju produksi penghambat dan sebanding dengan berkurangnya kerusakan penghambat (Meinhardt, 2012).

Agar pembentukan pola dapat terjadi, penghambat harus berdifusi jauh lebih cepat dari pengaktif ($D_b \geq D_a$). Pola akan stabil jika tingkat kerusakan penghambat lebih tinggi dibandingkan dengan pengaktif ($r_b > r_a$), dan jika keadaan sebaliknya terjadi ($r_a > r_b$) maka osilasi akan terjadi. b_a menggambarkan laju produksi *activator-independen* kecil dari pengaktif yang diperlukan untuk memulai produksi *activator autocatalytic* pada tingkat rendah pada a, misalnya selama regenerasi berlangsung. Dalam kebanyakan simulasi, kepadatan sel s diasumsikan merata kecuali beberapa fluktuasi acak kecil yang memicu pembentukan pola dan yang tetap konstan selama simulasi (Meinhardt, 2012).

1. Diskritisasi Persamaan Meinhardt dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson pada Activator

Berikut merupakan proses diskritisasi model pengaktif, persamaan yang digunakan yaitu persamaan:

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = sb(x,t)a^2(x,t) - r_a a(x,t) + D_a \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2(x,t)} \quad (3)$$

dinotasikan,

$$a(x_i, t_n) = \frac{1}{2}(a_i^n + a_i^{n+1})$$

$$b(x_i, t_n) = \frac{1}{2}(b_i^n + b_i^{n+1})$$

Berdasarkan pernyataan Luknanto sebagaimana tercantum dalam kajian pustaka di atas, maka transformasi beda hingga maju untuk turunan t dan beda hingga pusat untuk turunan x adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{i-1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{a_{i-1}^n - 2a_i^n + a_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right)$$

Bentuk beda hingga disubtitusikan ke persamaan (3), sehingga diperoleh bentuk persamaan diskrit sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}s[b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 + b_i^n(a_i^n)^2] \\ &\quad - \frac{1}{2}r_a[a_i^{n+1} + a_i^n] \\ &\quad + \frac{1}{2}D_a\left(\frac{a_{i-1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{i-1}^n - 2a_i^n + a_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right)\end{aligned} \quad (4)$$

Persamaan (4) juga dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}\frac{a_i^{n+1}}{\Delta t} &= \frac{a_i^n}{\Delta t} + \frac{s}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 + \frac{s}{2}b_i^n(a_i^n)^2 \\ &\quad - \frac{r_a}{2}a_i^{n+1} - \frac{r_a}{2}a_i^n + \frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1} \\ &\quad - \frac{D_a}{\Delta x^2}a_i^{n+1} + \frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1} \\ &\quad + \frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n - \frac{D_a}{\Delta x^2}a_i^n \\ &\quad + \frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n\end{aligned} \quad (5)$$

Persamaan (5) dikalikan dengan Δt pada kedua ruasnya, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}a_i^{n+1} &= a_i^n + \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 + \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2 \\ &\quad - \frac{r_a\Delta t}{2}a_i^{n+1} - \frac{r_a\Delta t}{2}a_i^n \\ &\quad + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1} - \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^{n+1} \\ &\quad + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1} + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n \\ &\quad - \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^n + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n\end{aligned} \quad (6)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana dan untuk mengelompokkan antara diskritisasi waktu sekarang (n) dan diskritisasi waktu yang akan datang $(n+1)$, maka persamaan (6) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1} + a_i^{n+1} + \frac{r_a\Delta t}{2}a_i^{n+1} + \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^{n+1} - \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1} - \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n + a_i^n - \frac{r_a\Delta t}{2}a_i^n - \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^n + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n + \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2 \quad (7)$$

Persamaan (7) disederhanakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}&-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{r_a\Delta t}{2} + \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}\right)a_i^{n+1} \\ &\quad - \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1} - \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 \\ &\quad = \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n \\ &\quad + \left(1 - \frac{r_a\Delta t}{2} - \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}\right)a_i^n \\ &\quad + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n + \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2\end{aligned} \quad (8)$$

Didefinisikan:

$P = \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}$

$Q = \frac{r_a\Delta t}{2}$

$R = \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}$

$S = \frac{s\Delta t}{2}$

Kemudian dengan mensubtitusikan P, Q, R dan S pada persamaan di atas, maka diperoleh:

$$-Pa_{i-1}^{n+1} + (1 + Q + R)a_i^{n+1} - Pa_{i+1}^{n+1} - Sb_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = Pa_{i-1}^n + (1 - Q - R)a_i^n + Pa_{i+1}^n + Sb_i^n(a_i^n)^2 \quad (9)$$

2. Diskritisasi Persamaan Meinhardt dengan Metode Beda Hingga Skema Crank-Nicolson pada Inhibitor

Persamaan penghambat dalam pembentukan sel pada *hydra* sebagaimana persamaan:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \quad (10)$$

Transformasi beda hingga maju untuk turunan t dan beda hingga pusat untuk turunan x adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = \frac{b_i^{n+1} - b_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_{i-1}^{n+1} - 2b_i^{n+1} + b_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{b_{i-1}^{n} - 2b_i^{n} + b_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}\right)$$

Bentuk beda hingga disubtitusikan ke persamaan (10), sehingga diperoleh bentuk persamaan diskrit sebagai berikut:

$$\frac{b_i^{n+1} - b_i^n}{\Delta t} = b_b - \frac{1}{2}s[b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 + b_i^n(a_i^n)^2] - \frac{1}{2}r_b[b_i^{n+1} + b_i^n] + \frac{1}{2}D_b\left(\frac{b_{i-1}^{n+1} - 2b_i^{n+1} + b_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{b_{i-1}^{n} - 2b_i^{n} + b_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}\right) \tag{11}$$

Persamaan (11) dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{b_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{b_i^n}{\Delta t} + b_b - \frac{s}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 - \frac{s}{2}b_i^n(a_i^n)^2 - \frac{r_b}{2}b_i^{n+1} - \frac{r_b}{2}b_i^n + \frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1} - \frac{D_b}{\Delta x^2}b_i^{n+1} + \frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1} + \frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n} - \frac{D_b}{\Delta x^2}b_i^{n} + \frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n} \tag{12}$$

Persamaan (12) dikalikan dengan Δt pada kedua ruasnya, sehingga diperoleh:

$$b_i^{n+1} = b_i^n + b_b\Delta t - \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 - \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2 - \frac{r_b\Delta t}{2}b_i^{n+1} - \frac{r_b\Delta t}{2}b_i^n + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1} - \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^{n+1} + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1} + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n} - \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^{n} + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n} \tag{13}$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana dan untuk mengelompokkan antara diskritisasi waktu sekarang (n) dan diskritisasi waktu yang akan datang $(n+1)$, maka persamaan (13) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1} + b_i^{n+1} + \frac{r_b\Delta t}{2}b_i^{n+1} + \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^{n+1} - \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1} + \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = b_b\Delta t + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n} + b_i^n - \frac{r_b\Delta t}{2}b_i^n - \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^n + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n} - \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2 \tag{14}$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana, persamaan (14) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{r_b\Delta t}{2} + \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}\right)b_i^{n+1} - \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1} + \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = b_b\Delta t + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n} + \left(1 - \frac{r_b\Delta t}{2} - \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}\right)b_i^n + \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n} - \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2 \tag{15}$$

Didefinisikan:

$T = \frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}$

$U = \frac{r_b\Delta t}{2}$

$V = \frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}$

$W = \frac{s\Delta t}{2}$

Kemudian dengan mensubtitusikan T, U, V dan W pada persamaan (15), maka diperoleh:

$$-Tb_{i-1}^{n+1} + (1 + U + V)b_i^{n+1} - Tb_{i+1}^{n+1} + Wb_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = b_b\Delta t + Tb_{i-1}^n + (1 - U - V)b_i^n + Tb_{i+1}^n - Wb_i^n(a_i^n)^2 \tag{16}$$

Dari proses diskritisasi di atas, maka diperoleh sistem persamaan *Meinhardt* diskrit sebagai berikut:

$$-Pa_{i-1}^{n+1} + (1 + Q + R)a_i^{n+1} - Pa_{i+1}^{n+1} - Sb_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = Pa_{i-1}^n + (1 - Q - R)a_i^n + Pa_{i+1}^n + Sb_i^n(a_i^n)^2$$

$$-Tb_{i-1}^{n+1} + (1 + U + V)b_i^{n+1} - Tb_{i+1}^{n+1} + Wb_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = b_b\Delta t + Tb_{i-1}^n + (1 - U - V)b_i^n + Tb_{i+1}^n - Wb_i^n(a_i^n)^2$$

PENUTUP

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk diskrit dari persamaan Meinhardt adalah sebagai berikut:

1. *Activator*

$$-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{r_a\Delta t}{2} + \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}\right)a_i^{n+1} - \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1} - \frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2 = \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n} + \left(1 - \frac{r_a\Delta t}{2} - \frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}\right)a_i^n + \frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n} + \frac{s\Delta t}{2}b_i^n(a_i^n)^2$$

2. *Inhibitor*

$$\begin{aligned}-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1}+\left(1+\frac{r_b\Delta t}{2}+\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}\right)b_i^{n+1}\\ -\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1}+\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}(a_i^{n+1})^2\\ =b_b\Delta t+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n}\\ +\left(1-\frac{r_b\Delta t}{2}-\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}\right)b_i^{n}\\ +\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n}-\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n}(a_i^{n})^2\end{aligned}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Ayres, F. (1992). Persamaan Diferensial. Jakarta: Erlangga.
[2] Campbell, N. A., Jackson, R. B., Minorsky, P. V., Wasserman, S. A., Cain, M. L., Urry, L. A., et al. (2012). Biology. Jakarta: Erlangga.
[3] Djojodihardjo, H. (2000). Metode Numerik. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
[4] Fried, G. H., & Hademenos, G. J. (2005). Schaum's Outlines of Theory and Problems of Biology Second Edition. Jakarta: Erlangga.
[5] Gierer, A. (1977). Biological Features and Physical Concepts of Pattern Formation Exemplified by Hydra. Curr. Top. Dev. Biol , 17.
[6] Kastawi, Y. (2005). Zoology Avertebrata. Malang: UM Press.
[7] Lapidus, L., & Pinder, G. F. (1981). Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering. New York: A Wiley-Interscience Publication.
[8] Liu, H., Hussain, F., Tan, C. L., & Dash, M. (2012). Discretization: An Enabling Technique. 2.
[9] Luknanto, D. (2003). Model Matematika. Yogyakarta: Bahan Kuliah tidak dipublikasikan Jurusan Teknik Sipil FT UGM.
[10] Meinhardt, H. (2012). Models of Biological Pattern Formation. 1-10.
[11] Purcell, E. J., & Varberg, D. (1999). Calculus with Analytic Geometry 5th Edition. Jakarta: Erlangga.
[12] Sasongko, S. B. (2010). Metode Numerik dengan Scilab. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.
[13] Smith, G. D. (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford: Clarendon Press.
[14] Triatmodjo, B. (2002). Metode Numerik dilengkapi dengan Program Komputer. Yogyakarta: Beta Offset.
[15] Villee, C. A. (1984). General Zoologi Sixth Edition. Jakarta: Erlangga.