MATEMATIKA-ALJABAR

**LAPORAN HASIL**

**PENELITIAN PENGUATAN PROGRAM STUDI**

# SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN STRUKTUR MODUL PRIMER SEBAGAI PERUMUMAN DARI GRUP

**Subjudul: Spektrum Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral**

**Oleh**

**Dr. Abdussakir, M.Pd**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**
**2017**

**LEMBAR PENGESAHAN LAPORAN HASIL PENELITIAN**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Judul Penelitian | : | **SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL** | |
| 2 | Ketua Peneliti | : | Dr. Abdussakir, M.Pd | |
| 3 | Peneliti & Judul Penelitian | : | Ketua | Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ dari dari Grup Dihedral |
| | | | Mahasiswa 1 | Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ dari Grup Dihedral |
| | | | Mahasiswa 2 | Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ dari Grup Dihedral |
| | | | Mahasiswa 3 | Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ dari Grup Dihedral |
| 4 | Bidang Ilmu | : | Aljabar | |
| 5 | Mahasiswa | : | 1. Dinda Akromatul Akhadiyah (NIM. 14610071)<br>2. Alinul Layali (NIM. 14610042)<br>3. Afaf Trian Putra (NIM. 14610073) | |
| 6 | Lama Kegiatan | : | 6 (Enam) Bulan | |
| 7 | Biaya yang diusulkan | : | Rp. 10.000.000,- | |

Malang, 31 Oktober 2017

Disahkan oleh,
Dekan,

Peneliti,

Dr. Sri Harini, M.Si
NIP 19731014 200112 2 002

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP 19751006 200312 1 001

Ketua LP2M
Universitas Islam Negeri
Maulana Malik Ibrahim Malang,

Dr. Hj. Tutik Hamidah, M.Ag.
NIP. 19590423 198603 2 003

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt., sehingga dengan rahmat dan hidayah-Nya laporan penelitian dengan judul "Spektrum Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral" dapat diselesaikan. Shalawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia menuju jalan yang lurus, yaitu agama Islam.

Selama penyusunan laporan ini, peneliti telah dibantu oleh banyak pihak. Pada kesempatan ini, peneliti menyampaikan terima kasih kepada.

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh Pembantu Dekan di Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, beserta rekan-rekan dosen Jurusan Matematika.
4. Dosen dan staf di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Semua anggota tim penelitian.

Peneliti mendo'akan semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah Swt.

Malang, Oktober 2017
Peneliti

## ABSTRAK

Misalkan $G$ grup dan $H$ subgrup normal dari $G$. Graf subgrup $\Gamma_H(G)$ adalah graf dengan himpunan titik semua unsur di $G$ dan dua titik berbeda $x$ dan $y$ terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \in H$. Pada penelitian ini ditentukan beberapa spektrum dari graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral untuk beberapa subgroup normal di grup dihedral. Untuk graf subgrup ditentukan spektrum *adjacency*, spektrum Laplace, dan spektrum *signless* Laplace. Untuk komplemen graf subgrup ditentukan spektrum *adjacency*, spektrum Laplace, spektrum *signless* Laplace, dan spektrum detour. Hal ini karena graf subrup bukan graf terhubung sedangkan komplemen graf subrup adalah graf terhubung.



**Kata kunci**: Graf subgrup, Spektrum, Graf komplemen, Grup dihedral.

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# DAFTAR GAMBAR

# BAB I
# PENDAHULUAN

## A. Latar Belakang

Misalkan $G$ graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (*Adjacency matrix*) dari graf $G$, dinotasikan dengan $A(G) = [a_{ij}]$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan $a_{ij} = 1$ jika titik $v_i$ terhubung langsung dengan titik $v_j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya (Harary, 1969; Bondy & Murthy, 1976; Chartrand & Lesniak, 1986; Chartrand & Oellermann, 1993; Bondy & Murthy, 2008). Dengan demikian, maka matriks keterhubungan titik graf $G$ adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan bernilai 0 untuk semua entri pada diagonal utamanya.

Matriks derajat dari matriks $G$, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-$i$ dan kolom ke-$i$ adalah derajat dari $v_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks Laplace (Mohar, 1992) dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless* Laplace dari graf G (Brouwer & Haemers, 2011).

Pada graf $G$, lintasan-$v_1v_n$ adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di $G$. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order $p$. Matriks detour dari $G$, dinotasikan dengan $DD(G)$ adalah matriks $(p\times p)$ sedemikian hingga unsur pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari $v_i$ ke $v_j$ di $G$ (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda suatu matriks, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing $\lambda_i$. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spectrum graf $G$, dan dinotasikan dengan Spec($G$) (Bigg, 1974; Yin, 2008). Spektrum yang diperoleh dari matriks $A(G)$ disebut spektrum adjacency, dari matriks $L(G)$ disebut spektrum Laplace, dari matriks $L^+(G)$ disebut spektrum *signless* Laplace, dan dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum detour.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf sudah pernah dilakukan. Shuhua Yin (2006) meneliti spektrum keterhubungan titik dan spektrum Laplace pada graf $G_l$ yang diperoleh dari graf komplit $K_l$ dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di $K_l$. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum keterhubungan titik pada graf komplit ($K_n$), graf star ($S_n$), graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$), dan graf lintasan ($P_n$). Ayyaswamy & Balachandran (2010) meneliti spektrum detour pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n, n)$, graf korona $G$ dan $K_1$, graf perkalian Kartesius $G$ dengan $K_2$, graf perkalian leksikografik $G$ dengan $K_2$, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan. Abdussakir, dkk (2012) meneliti spektrum keterhubungan titik, Laplace, *singless* Laplace, dan detour graf multipartisi komplit.

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup, misalnya graf komuting, graf non komuting, graf koset, graf perpangkatan, dan graf konjugasi. Beberapa penelitian terkait spektrum graf yang diperoleh dari grup sudah dilakukan. Abdussakir, dkk (2013) meneliti spektrum keterhubungan titik, Laplace, *singless* Laplace, dan detour graf commuting dari grup dihedral. Rivatul Ridho Elvierayani (2014) meneliti spektrum keterhubungan titik, Laplace, *singless* Laplace graf *non commuting* dari grup dihedral, sedangkan Nafisah (2014) meneliti spektrum Detour graf non commuting dari grup dihedral. Abdussakir dkk (2016) meneliti spektrum graf konjugasi dari grup dihedral.

Anderson dkk (2012) mengenalkan konsep baru terkait graf yang diperoleh dari grup yaitu graf subgrup. Misalkan $G$ grup dan $H$ subgrup $G$. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah (*digraph*) dengan himpunan titik memuat semua unsur di $G$ dan titik $x$ terhubung langsung ke $y$ (atau ada busur dari $x$ ke $y$) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka $x$ dan $y$ dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari $G$.

Kakeri dan Erfanian (2015) menjelaskan bahwa graf subgrup $\Gamma_H(G)$ jelas eksistensinya ketika $H$ adalah subgrup normal dari $G$. Jika $xy \in H$ maka belum tentu $yx \in H$. Jika $H$ subgrup normal di $G$, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in$

*H*. Dengan demikian, ketika *H* subgrup normal maka komplemen dari graf subgrup $\Gamma_H(G)$ juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*).

Penelitian mengenai graf subgrup baru ada 2 yaitu penelitian Anderson dkk (2012) dan penelitian Kakeri & Erfanian (2015). Anderson dkk (2012) meneliti struktur komponen-kompenen yang terhubung pada graf subgrup $\Gamma_H(G)$ sedangkan Kakeri & Erfanian (2015) meneliti sifat-sifat komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_H(G)}$. Sifat-sifat yang diteliti meliputi diameter, *girth*, himpunan bebas dan himpunan dominasi, serta keteraturannya.

Berdasarkan uraian di atas, maka belum ada penelitian sifat-sifat matriks dari graf subgrup dan komplmen graf subgrup grup dihedral. Sifat-sifat matriks ini meliputi nilai eigen terbesar, nilai eigen kedua, nilai eigen terkecil, serta spektrumnya. Dengan demikian maka perlu dilakukan penelitian terkait sifat-sifat matriks graf subgrup dan komplmen graf subgrup grup dihedral.

## B. Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut, yaitu bagaimana pola umum spektrum graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral?

## C. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan pola umum spektrum graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral ($D_{2n}$), $n \geq 3$ dan $n \in N$.

## D. Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, spektrum yang akan dibahas dibatasi pada spektrum *adjacency*, spektrum Laplace, spektrum signless Laplace, dan spektrum detour.

## E. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai *spektrum* graf yang diperolah dari grup.
2. Memberikan informasi saling keterkaitan antara beberapa topik dalam matematika, khususnya teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak.

# BAB II
# STUDI PUSTAKA

## A. Graf

Graf $G$ adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari $G$ dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari $G$ dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf $G$, maka order dan ukuran dari $G$ masing-masing cukup ditulis $p$ dan $q$ (Chartrand & Lesniak, 1986; Chartrand & Oellermann, 1993).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik $u$ dan $v$. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf $G$, maka $u$ dan $v$ disebut terhubung langsung *(adjacent)*, $v$ dan $e$ serta $u$ dan $e$ disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik $u$ dan $v$ disebut ujung dari $e$. Dua sisi berbeda $e_1$ dan $e_2$ disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Bondy & Murthy, 2008).

## B. Derajat Titik

Jika $v$ adalah titik pada graf $G$, maka himpunan semua titik di $G$ yang terhubung langsung dengan $v$ disebut lingkungan dari $v$ dan ditulis $N_G(v)$. Derajat titik $v$ di graf $G$, ditulis $deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di $G$ yang terkait langsung dengan $v$. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf $G$, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$ (Chartrand & Lesniak, 1986). Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik $v$ di graf $G$ adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi, $\deg(v) = |N(v)|$ (Harary, 1969; Bondy & Murthy, 1976). Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di $G$ dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di $G$ dilambangkan dengan $\delta(G)$ (Bondy & Murthy, 1976).

Graf $G$ dikatakan beraturan-$r$ atau beraturan dengan derajat $r$ jika masing-masing titik $v$ di $G$, maka $deg(v) = r$, untuk bilangan bulat taknegatif $r$. Suatu graf disebut beraturan jika graf tersebut beraturan-$r$ untuk suatu bilangan bulat taknegatif $r$. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan graf kubik (Bondy & Murthy, 1976; Chartrand & Lesniak, 1986).

Graf $G$ dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order $n$ dinyatakan dengan $K_n$. Dengan demikian, maka graf $K_n$ merupakan graf beraturan-$(n - 1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Bondy & Murthy, 1976)

## C. Graf Terhubung

Misalkan $G$ graf. Misalkan $u$ dan $v$ adalah titik di $G$ (yang tidak harus berbeda). Jalan $u$-$v$ pada graf $G$ adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u=v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

adalah sisi di $G$. $v_0$ disebut titik awal, $v_n$ disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan $n$ menyatakan panjang dari $W$. Jika $v_0 \neq v_n$, maka $W$ disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka $W$ disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Chartrand & Lesniak, 1986).

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u$-$v$

$$W: u=v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n=v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n=v.$$

Jalan $W$ yang semua sisinya berbeda disebut trail. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Bondy & Murthy, 1976; Chartrand & Lesniak, 1986).

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak $n$ dinamakan graf lintasan order $n$ dan ditulis $P_n$. Jalan tertutup $W$ tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan taktrivial pada graf *G* disebut sirkuit di G. Sirkuit

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1 \ (n \geq 3)$$

dengan dengan $v_i$, i = 1, 2, 3, …, *n* berbeda disebut sikel. Sikel dengan panjang *k* disebut sikel-*k*. Sikel-*k* disebut genap atau ganjil bergantung pada *k* genap atau ganjil (Bondy & Murthy, 1976; Chartrand & Lesniak, 1986).

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak *n*, $n \geq 3$, disebut graf sikel dan ditulis $C_n$. Graf sikel sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya graf sikel digambar dalam bentuk suatu lingkaran (Bondy & Murthy, 1976; Chartrand & Lesniak, 1986).

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Titik *u* dan *v* dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u*-*v* di *G*. Suatu graf *G* dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* yang berbeda di *G* terhubung. Dengan kata lain, suatu graf *G* dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terdapat lintasan *u*-*v* di *G*. Sebaliknya, jika ada dua titik *u* dan *v* di *G*, tetapi tidak ada lintasan *u*-*v* di *G*, maka *G* dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Harary, 1969; Bondy & Murthy, 1976; Chartrand & Lesniak, 1986; Chartrand & Oellermann, 1993; Bondy & Murthy, 2008).

## D. Graf Komplemen

Graf komplemen $\bar{G}$ dari graf G adalah graf dengan himpunan titik V($\bar{G}$) = V(G) dan dua titik akan terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di *G*. Artinya jika $xy \in E(G)$ maka $xy \notin E(\bar{G})$ dan sebaliknya. Dengan demikian maka gabungan antara $\bar{G}$ dan G akan menghasilkan graf komplit, atau q + $\bar{q}$ = $\binom{n}{2}$ (Bondy & Murthy, 2008).

## E. Graf dan Matriks

Misalkan $G$ graf dengan order $p$ ($p \geq 1$) dan ukuran $q$ serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks keterhubungan*) dari graf $G$, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks ($p \times p$) dengan unsur pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ bernilai 1 jika titik $v_i$ terhubung langsung dengan titik $v_j$ serta bernilai 0 jika titik $v_i$ tidak terhubung langsung dengan titik $v_j$. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf $G$ adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat lup dan tidak memuat sisi paralel (Chartrand & Lesniak, 1986).

## F. Spektrum Graf

Misalkan $G$ graf berorder $p$ dan $A$ adalah matriks keterhubungan dari graf $G$. Suatu vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen *(eigen vector)* dari $A$ jika $A\boldsymbol{x}$ adalah suatu kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; yakni, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, untuk sebarang scalar $\lambda$. Skalar $\lambda$ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari $A$, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari $A$ yang bersesuaian dengan $\lambda$. Untuk menentukan nilai eigen dari matriks $A$, persamaan $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ditulis kembali dalam bentuk $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$, dengan $I$ adalah matriks identitas berordo ($1 \times p$). Persamaan ini akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika $det(A - \lambda I) = 0$. Persamaan $det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variable $\lambda$ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks $A$. Skalar-skalar $\lambda$ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai–nilai eigen dari matriks $A$ (Anton & Rorres, 2004).

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari $A$, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing $\lambda_i$, maka matriks berordo ($2 \times n$) yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf $G$, dan dinotasikan dengan Spec($G$) (Bigg, 1974). Jadi, spectrum graf $G$ dapat ditulis dengan

$$Spec(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix} \text{ (Yin, 2008)}$$

Selain konsep matriks *adjacency*, masih terdapat konsep matriks lainnya yang dapat diperoleh dari suatu graf. Matriks derajat dari matriks $G$, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-$i$ dan kolom ke-$i$ adalah derajat dari $v_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$. Jadi, matriks derajat dari graf $G$ dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ disebut matriks Laplace (Mohar, 1992) dan matriks $L^+(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks signless Laplace dari graf G (Brouwer & Haemers, 2011).

Pada graf $G$, lintasan $v_1$-$v_n$ adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga titik yang berurutan terhubung langsung. Suatu graf kemudian disebut terhubung jika terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di $G$. Misalkankan $G$ adalah graf terhubung dengan order $p$. Matriks Detour dari $G$ adalah matriks $DD(G)$ sedemikian hingga elemen pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari $v_i$ ke $v_j$ di $G$ (Ayyaswamy & Balachandran, 2010).

## G. Grup Dihedral

Grup *dihedral* adalah grup dari himpunan simetri-simetri pada segi-$n$ beraturan dan dinotasikan dengan $D_{2n}$, untuk setiap $n$ bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dihedral* dengan $D_n$ (Dummit dan Foote, 1991:24-25). Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati $D_{2n}$ sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ semuanya berbeda dan $|r^n| = 1$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua $i$.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, ..., r^{n-1}, s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$$

yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k$ = 0 atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991:26).

Sebagai contoh $D_6$ adalah grup dihedral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

## H. Subrup dan Subgrup Normal

Misalkan $G$ grup dan $H$ himpunan bagian di $G$. Jika $H$ dengan operasi biner yang sama dengan di $G$ membentuk grup, maka $H$ disebut subgrup dari $G$ dan dinotasikan dengan $H \leq G$ (Dummit dan Foote, 1991:26). Unsur identitas di subgrup $H$ adalah unsur identitas di grup $G$. Dengan demikian, maka $H$ subgrup $G$ jika dan hanya jika $H \subseteq G$, $H \neq \phi$, dan $xy^{-1} \in H$ untuk semua $x, y \in H$.

Jika $H \leq G$ dan berlaku $ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$, maka $H$ disebut subgrup normal dari $G$ dan dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$. Jika $G$ grup abelian maka semua subgrup di $G$ adalah subgrup normal karena $h = eh = gg^{-1}h = ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$. Dengan notasi lain, $H$ subgrup normal di $G$ jika dan hanya jika $gHg^{-1} = H$ atau $gH = Hg$, untuk semua $g \in G$.

## I. Graf Subgrup

Misalkan $G$ grup dan $H$ subgrup $G$. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah (*digraph*) dengan himpunan titik memuat semua unsur di $G$ dan titik $x$ terhubung langsung ke $y$ (atau ada busur dari $x$ ke $y$) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka $x$ dan $y$ dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari $G$ (Anderson, dkk., 2012)

Kakeri dan Erfanian (2015) menjelaskan bahwa graf subgrup $\Gamma_H(G)$ jelas eksistensinya ketika $H$ adalah subgrup normal dari $G$. Jika $xy \in H$ maka belum tentu $yx \in H$. Jika $H$ subgrup normal di $G$, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$. Dengan demikian, ketika $H$ subgrup normal maka komplemen dari graf subgrup $\Gamma_H(G)$ akan berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*).

# BAB III
# METODE PENELITIAN

## A. Jenis Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhusukan pada kajian mengenai graf dan spectrum suatu graf. Kajian pada buku-buku aljabar linear berkaitan dengan topik matriks, khususnya tentang penentuan nilai eigen dan vector eigen suatu matriks. Kajian pada buku aljabar abstrak berkaitan dengan topik grup dan subgrup normal.

## B. Tahap Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Menentukan semua subgrup normal pada suatu grup $D_{2n}$ untuk beberapa kasus $n$, missal untuk $n = 3, 4, 5, 6$.
2. Menggambar graf subgrup dan komplemennya kemudian menyatakan ke dalam bentuk matriks (*Adjacency*, Laplace, *Signless* Laplace, atau Detour).
3. Menentukan nilai eigen dan vector eigen matriks graf subgrup dan komplemennya untuk memperoleh nilai eigen serta spektrumnya.
4. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
5. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
6. Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.
7. Menulis laporan penelitian.

# BAB IV
# HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

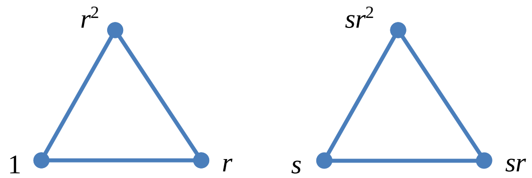
## A. Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ dari Grup Dihedral

Grup dihedral $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ dengan operasi fungsi komposisi dapat dinyatakan dalam tabel Cayley berikut.

Tabel 4.1. Tabel Cayley Grup Dihedral $D_6$

| $\circ$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ |
| $r$ | $r$ | $r^2$ | $1$ | $sr^2$ | $s$ | $sr$ |
| $r^2$ | $r^2$ | $1$ | $r$ | $sr$ | $sr^2$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $1$ | $r$ | $r^2$ |
| $sr$ | $sr$ | $sr^2$ | $s$ | $r^2$ | $1$ | $r$ |
| $sr^2$ | $sr^2$ | $s$ | $sr$ | $r$ | $r^2$ | $1$ |

Dengan mengambil subgrup normal $\langle r\rangle = \{1, r, r^2\}$, maka sesuai definisi graf subgrup diperolah graf subgrup $\langle r\rangle$ pada grup dihedral $D_6$ sebagai berikut




Gambar 4.1 Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$

Maka diperoleh matriks adjacency dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$ sebagai berikut

$$A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$ sebagai berikut

$$D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$ sebagai berikut

$$L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) - A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dan matriks signless Lapclace dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$ sebagai berikut

$$L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) + A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Menggunakan bantuan program Matlab untuk melakukan eliminasi Gauss pada matriks $A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right)$, $L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right)$, dan $L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right)$ maka diperoleh spektrum ketiga matriks tersebut sebagai berikut.

$$Spec(A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right)) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Spec(L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right)) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Spec(L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right)) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$ pada Gambar 4.1 maka diperoleh komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah graf bipartisi komplit dengan himpunan partisi $V_1 = \{1, r, r^2\}$ dan $V_2 = \{s, sr, sr^2\}$. Maka diperoleh matriks *adjacency* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ sebagai berikut

$$D\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ sebagai berikut

$$L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = D\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) - A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dan matriks signless Lapclace dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)$ sebagai berikut

$$L^{+}\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) + A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karena $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah matriks Hamilton, maka jarak terjauh antara dua titik berbeda di $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah 5. Sehingga diperoleh matriks detour dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah

$$DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Menggunakan bantuan program Matlab untuk melakukan eliminasi Gauss pada matriks $A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$, $L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$, $L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$, dan $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ maka diperoleh spektrum keempat matriks tersebut sebagai berikut.

$$Spec(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Spec(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Spec(L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Spec(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)) = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Uraian di atas adalah contoh spektrum pada graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ dan komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$. Adapun secara umum, spektrum graf subgroup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ dan komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ dinyatakan dalam teorema-teorema berikut.

**Teorema 1**

Spektrum *adjacency* graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Untuk grup dihedral $D_{2n}$ dengan $n$ bilangan asli dan $n > 2$, maka graf subgroup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah graf tidak terhubung dengan dua komponen yang masing-masing berbentuk graf komplit $K_n$. Salah satu komponen memuat himpunan titik $\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ dan komponen lainnya memuat himpunan titik $\{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Sehingga diperoleh

$$A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{bmatrix} Q & O \\ O & Q \end{bmatrix}$$

Dengan $Q = [q_{ij}]$ adalah matriks berordo $(n\times n)$ yang $q_{ij} = 1$ untuk $i \neq j$ dan $q_{ij} = 0$ untuk lainnya. Sedangkan $O$ adalah matriks berordo $(n\times n)$ yang semua unsurnya 0.

Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda)=\left(\lambda-(n-1)\right)^2(\lambda+1)^{2n-2}$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum *adjacency* graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

**Teorema 2**

Spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Untuk grup dihedral $D_{2n}$ dengan $n$ bilangan asli dan $n > 2$, maka graf subgroup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah graf tidak terhubung dengan dua komponen yang masing-masing berbentuk graf komplit $K_n$. Dengan demikian, maka derajat semua titik di $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah $(n - 1)$. Jadi, matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah $D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)=(n-1)I$, dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $(2n\times 2n)$. Maka diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)=D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)-A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)=\begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix}$$

Dengan $R = [r_{ij}]$ adalah matriks berordo $(n \times n)$ yang $r_{ij} = -1$ untuk $i \neq j$ dan $r_{ij} = n - 1$ untuk lainnya. Sedangkan $O$ adalah matriks berordo $(n \times n)$ yang semua unsurnya 0.

Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - n)^2 \lambda^{2n-2}$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

**Teorema 3**

Spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Dari bukti Teorema 2, diperoleh matriks signless Laplace dari $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right) = D\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right) + A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} S & O \\ O & S \end{bmatrix} =$$

Dengan $S = [s_{ij}]$ adalah matriks berordo $(n \times n)$ yang $s_{ij} = 1$ untuk $i \neq j$ dan $s_{ij} = n - 1$ untuk lainnya. Sedangkan $O$ adalah matriks berordo $(n \times n)$ yang semua unsurnya 0.

Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - (2n-2))^2 (\lambda - (n-2))^{2n-2}$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum signless Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(L^+\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

Karena graf subgroup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah graf tak terhubung, maka spektrum detour $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ tidak dapat ditentukan. Berikut ini adalah spektrum-spektru pada komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$.

**Teorema 4**

Spektrum *adjacency* komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Sesuai bukti Teorema 1, maka komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah graf bipartisi komplit dengan himpunan partisi $V_1 = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ dan $V_2 = \{s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Sehingga diperoleh

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} O & T \\ T & O \end{bmatrix}$$

Dengan $T = [t_{ij}]$ adalah matriks berordo $(n\times n)$ yang yang semua unsurnya 1. Sedangkan $O$ adalah matriks berordo $(n\times n)$ yang semua unsurnya 0. Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - n)\lambda^{2n-2}(\lambda + n)$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum *adjacency* komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 5**

Spektrum Laplace komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Mengacu pada bukti Teorema 4, maka derajat semua titik di $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah $n$. Jadi, matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah $D\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = nI$, dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $(2n\times 2n)$. Maka diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = D\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} S & -T \\ -T & S \end{bmatrix}$$

Dengan $S = [s_{ij}]$ adalah matriks berordo $(n\times n)$ yang $s_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $s_{ij} = n$ untuk lainnya. Sedangkan $T$ adalah matriks berordo $(n\times n)$ yang semua unsurnya -1.

Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2n-2}\lambda$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum Laplace komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 6**

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Karena komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah graf bipartisi komplit, maka spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ sama dengan spektrum Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$. Jadi diperoleh

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 7**

Spektrum detour komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

**Bukti**

Karena komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah graf bipartisi komplit dengan *n* titik pada masing-masing partisi, maka $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah graf Hamilton. Dengan demikian maka lintasan terpanjang antara dua titik berbeda mempunyai panjang $2n - 1$. Maka matriks detour komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = [DD_{ij}]$$

Dengan $DD_{ij} = 2n - 1$ untuk $i \neq j$ dan $DD_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - (2n-1)^2)(\lambda + (2n-1))^{2n-1}.$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum detour komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

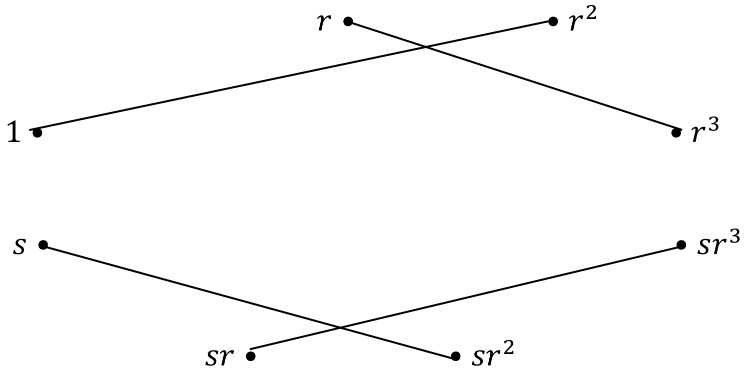
## B. Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ dari Grup Dihedral

Grup dihedral $D_8$ dapat disajikan dengan tabel Cayley berikut menggunakan operasi komposisi.

Tabel 4.2 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_8}$

| $\circ$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ |
| $r$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ |
| $r^2$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ | $r$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ |
| $r^3$ | $r^3$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ |
| $sr$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ | $r^3$ | $1$ | $r$ | $r^2$ |
| $sr^2$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ | $r$ |
| $sr^3$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ |

Dengan mengambil subgrup normal $\langle r^2\rangle = \{1, r, r^2\}$, maka sesuai definisi graf subgrup diperolah graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ pada grup dihedral $D_8$ sebagai berikut




Gambar 4.2 Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$

Dari Gambar 4.2 dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sebagai berikut.

$$A(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya menentukan persamaan karakteristik dari matriks $A(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8))$ dengan cara berikut

$$det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda I\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right) - \lambda I\right)$ merupakan hasil perkalian diagonal utama matriks segitiga dan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)-\lambda I\right)=(-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^4$$

Karena $det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)-\lambda I\right)=0$ maka,

$$(-\lambda)^4\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^4=0$$

Disederhanakan menjadi

$$(\lambda+1)^4(\lambda-1)^4=0.$$

Jadi, persamaan karakteristik matriks adjacency graf subgroup $\Gamma_{H_1}(D_8)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda+1)^4(\lambda-1)^4=0.$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum *adjacency* graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 4\end{bmatrix}.$$

Dari Gambar 4.2 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sebagai berikut.

$$D\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$L\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)=D\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)-A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0\\-1&0&1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

dan matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$L^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)=D\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)+A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Menggunakan eliminasi Gauss, maka diperoleh persamaan karakteristik untuk $L\left(\Gamma_{H_1}(D_8)\right)$ dan $L^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)$ masing-masing sebagai berikut

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^4\lambda^4 = 0$$

dan

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^4\lambda^4 = 0$$

Maka diperoleh spektrum Laplace dan *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ masing-masing sebagai berikut

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

dan

$$spec\left(L^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)\right)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Spektrum Laplace dan *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ sama karena $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ adalah graf bipartisi.

Secara umum, spektrum untuk graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)$ adalah sebagai berikut.

**Teorema 8**

Spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Diketahui grup dihedral $(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk $n$ bilangan genap dan $n \geq 4$ diperoleh bahwa subgrup $\langle r^2\rangle$ dari grup dihedral $D_{2n}$ adalah $\langle r^2\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}\}$

Sehingga diperoleh $A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)$ sebagai berikut

$$A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks $A\left(\Gamma_H(D_{2n})\right) - \lambda I$ dieliminasi Gauss menjadi matriks segitiga atas dan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda - \left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^4 (\lambda + 1)^{2(n-2)}.$$

Maka diperoleh spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n-2}{2}\right) & -1 \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

**Teorema 9**

Spektrum Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$$

**Bukti:**

Pada $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$, semua titik berderajat $\frac{n-2}{2}$. Diperoleh matriks derajat pada $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$D\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \frac{n-2}{2} I$$

dengan I adalah matriks identitas berordo $2n \times 2n$. Maka matriks Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))=\begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{2} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} \end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))-\lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda-\frac{n}{2}\right)^{2(n-2)}\lambda^4$$

Jadi, spektrum Laplace subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(L(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))\right)=\begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 10**

Spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(L^+(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))\right)=\begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$$

**Bukti:**

Karena matriks signless Laplace graf

$$L^+(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))=D(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))+A(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n}))$$

maka sesuai bukti Teorema 9, diperoleh

$$L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} \frac{n-2}{2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{2} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \frac{n-2}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{n-2}{2} \end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = (-1)^{\frac{n}{2}}\left(\lambda - (n-2)\right)^{4}\left(\lambda - \left(\frac{n-4}{2}\right)\right)^{2(n-2)}$$

Jadi, spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 11**

Spektrum *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{2n+n}{2}\right) & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Pada $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$, titik yang tidak terhubung terhubung langsung di $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ dan sebaliknya. Maka diperoleh matriks adjacency komplemen graf subgroup $\left(\overline{\Gamma_{H}(D_{2n})}\right)$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&1&1&1&1&\dots&1\\1&0&1&\dots&0&1&1&1&\dots&1\\0&1&0&\dots&1&1&1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&1&\dots&0&1&1&1&\dots&1\\1&1&1&\dots&1&0&1&0&\dots&1\\1&1&1&\dots&1&1&0&1&\dots&0\\1&1&1&\dots&1&0&0&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\dots&1&0&1&0&\dots&0\end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L^+\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda)=\left(\lambda-\left(\frac{2n+n}{2}\right)\right)\lambda^{2(n-2)}\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)^3$$

Maka diperoleh spektrum *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}\left(\frac{2n+n}{2}\right)&0&\frac{n}{2}\\1&2(n-2)&3\end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 12**

Spektrum Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}2n&\left(\frac{2n+n}{2}\right)&0\\3&2(n-2)&1\end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Karena pada $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ semua titik berderajat $\frac{n-1}{2}$ maka pada $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ semua titik berderajat $\frac{3n}{2}$. Maka diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$D\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\frac{3n}{2}I,$$

dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $2n\times 2n$. Maka diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}\frac{3n}{2} & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & \frac{3n}{2} & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ 0 & -1 & \frac{3n}{2} & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & -1 & \dots & \frac{3n}{2} & -1 & -1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \frac{3n}{2} & -1 & 0 & \dots & -1\\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \frac{3n}{2} & -1 & \dots & 0\\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \frac{3n}{2} & \dots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & \frac{3n}{2}\end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})} - \lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik berikut

$$p(\lambda)=(\lambda-2n)^3\left(\lambda-\left(\frac{2n+n}{2}\right)\right)^{2(n-2)}\lambda.$$

Spektrum Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}2n & \left(\frac{2n+n}{2}\right) & 0\\ 3 & 2(n-2) & 1\end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 13**

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}3n & \frac{2n-n}{2} & n\\ 1 & 2(n-2) & 3\end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Dari bukti Teorema 12 diperoleh matriks signless Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}\frac{3n}{2} & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \frac{3n}{2} & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \frac{3n}{2} & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{3n}{2} & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{3n}{2} & 1 & 0 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{3n}{2} & 1 & \dots & 0\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \frac{3n}{2} & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{3n}{2}\end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L^{+}\overline{(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})} - \lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik berikut

$$p(\lambda)=(\lambda-3n)\left(\lambda-\tfrac{2n-n}{2}\right)^{2(n-2)}(\lambda-n)^{3}.$$

Maka spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}3n & \frac{2n-n}{2} & n\\ 1 & 2(n-2) & 3\end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

**Teorema 14**

Spektrum detour komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}(2n-1)^2 & -(2n-1)\\ 1 & 2n-1\end{bmatrix}.$$

**Bukti**

Lintasan terpanjang antara dua titik berbeda pada $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah $2n - 1$.

Maka matriks detour komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=[DD_{ij}]$$

dengan $DD_{ij} = 2n - 1$ untuk $i \neq j$ dan $DD_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Menggunakan eliminasi Gauss pada matriks $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I$ diperoleh persamaan karakteristik

$$p(\lambda)=(\lambda-(2n-1)^2)(\lambda+(2n-1))^{2n-1}.$$

Dengan demikian maka diperoleh spektrum detour komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

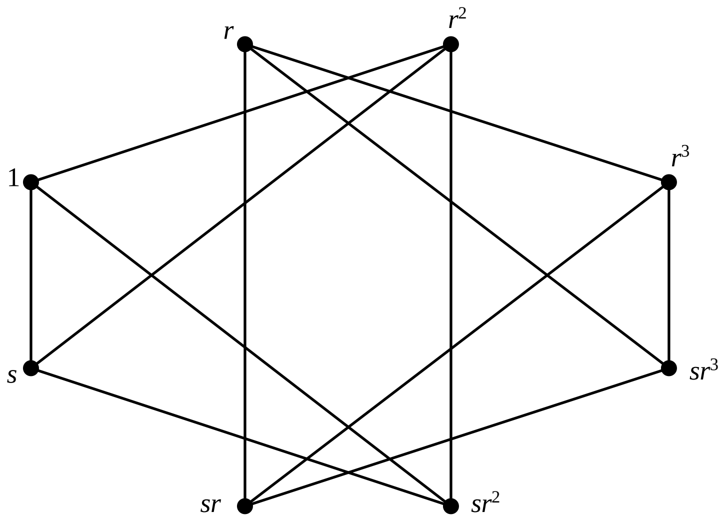
**C. Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2, s \rangle}(D_{2n})$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2, s \rangle}(D_{2n})}$ dari Grup Dihedral**

Subgrup dari grup dihedral $D_8$ yang dibangun oleh $\langle r^2, s \rangle$ adalah $\langle r^2, s \rangle = \{1, r^2, s, sr^2\}$ dan himpunan titik graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2, s \rangle}(D_8)$ dari grup dihedral $(D_8)$ adalah $V\left(\Gamma_{H_1}(D_8)\right) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Jika dua unsur di grup dihedral $D_8$ dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ maka diperoleh Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3 Tabel Cayley Grup Dihedral $D_8$

| $\circ$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ |
| $r$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ |
| $r^2$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ | $r$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ |
| $r^3$ | $r^3$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $1$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ |
| $sr$ | $sr$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ | $r^3$ | $1$ | $r$ | $r^2$ |
| $sr^2$ | $sr^2$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ | $r$ |
| $sr^3$ | $sr^3$ | $s$ | $sr$ | $sr^2$ | $r$ | $r^2$ | $r^3$ | $1$ |

Berdasarkan Tabel 4.3 diperoleh graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2, s \rangle}(D_8)$ pada Gambar 4.3.




Gambar 4.3 Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$

Dari Gambar 4.3 dapat diperoleh matriks *adjacency* dari $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut.

$$A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan persamaan karakteristik matriks $A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ dilalukan perhitungan berikut.

$$det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)-\lambda I\right)=\ det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi menggunakan metode eliminasi Gaus yang terdapat pada *software* Maple 18, dan diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik matriks $A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ diperoleh dari perkalian unsur diagonal uatama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right)^2 \\ &= (\lambda-3)^2(\lambda+1)^6. \end{aligned}$$

Dengan demikian spektrum *adjacency* dari graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ adalah sebagai berikut

$$spec(A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dari Gambar 4.3 dapat diperoleh matriks derajat dari graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$D\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$L\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = D\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya melakukan eliminasi Gauss pada matriks $det\left(L\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) - \lambda I\right)$ untuk menentukan persamaan karakteristik $L\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ dan diperoleh

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-5\lambda+4}{\lambda-2}\right)^2\left(-\frac{(-4+\lambda)\lambda}{\lambda-1}\right)^2$$
$$= (\lambda-4)^6\lambda^2.$$

Maka diperoleh spektrum Laplace dari graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ sebagai berikut

$$spec = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kemudian matriks *signless* Laplace dari graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$L^+\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) = D\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right) + A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara sepertinya sebelumnya, diperoleh polinomial karakteristik dari $L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)$ berikut

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{-3+\lambda}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{\lambda-4}\right)^2\left(-\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-5}\right)^2$$
$$= (\lambda-6)^2(\lambda-2)^6$$

sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ berikut

$$spec(L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)\right)) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Secara umum spektrum pada graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ inanyatakan dalam beberapa teorema berikut.

**Teorema 15**

Spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh matriks *adjacency* dari graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & .. & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)$ diperoleh dari persamaan $det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada

$A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \big(\lambda - (n-1)\big)^2(\lambda+1)^{2n-2} = \big(\lambda - (n-1)\big)^2(\lambda+1)^{2(n-1)}$$

Maka, Spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big)\right) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 16**

Spektrum Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2(n-1) & 2 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Pada $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$, semua titik berderajat $n-1$. Diperoleh matriks derajat pada $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$D\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big) = (n-1)I$$

dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $2n$×$2n$. Maka matriks Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & n-1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & \dots & n-1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big) - \lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - n)^{2(n-1)}\lambda^2$$

Jadi, spektrum Laplace subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2(n-1) & 2 \end{bmatrix} \blacklozenge$$

**Teorema 17**

Spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & n-2 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Karena matriks signless Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) = D\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) + A\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right)$$

maka sesuai bukti Teorema 16, diperoleh

$$L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & n-1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (2n-2)\right)^2 \left(\lambda - (n-2)\right)^{2n-2}$$

Jadi, spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & n-2 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 18**

Spektrum *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & 0 & -n \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Sesuai definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh matriks *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&1&0&\dots&1\\1&0&1&0&1&0&1&\dots&0\\0&1&0&1&0&1&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&0&1&0&1&0&\dots&1\\1&0&1&0&1&0&1&\dots&0\\0&1&0&1&0&1&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&1&0&1&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $A\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)$ diperoleh dari persamaan $det\big(A\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)-\lambda I\big)$. Dengan eliminasi Gauss pada $A\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)-\lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $det\big(A\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)-\lambda I\big)$ tidak lain adalah perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas. Maka polinomial karakteristik dari $A\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-2n)\lambda^{2(n-1)}(\lambda+n)$$

Maka spektrum *adjacency* dari komplemen graf subrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec(A(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}))\;=\begin{bmatrix}2n&0&-n\\1&2(n-1)&1\end{bmatrix}.\ \blacklozenge$$

**Teorema 19**

Spektrum Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(L\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)\right)\;=\begin{bmatrix}2n&n&0\\1&2(n-1)&1\end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Karena pada $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ semua titik berderajat $(n-1)$ maka pada $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ semua titik berderajat $n$. Maka diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$D\big(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\big)=nI,$$

dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $2n\times 2n$. Maka diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix} n & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & n & \dots & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & \dots & n & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & n & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-2n)(\lambda-n)^{2(n-1)}\lambda$$

Dengan demikian, maka spektrum Laplace dari $L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 20**

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Sesuai bukti Teorema 19, maka diperoleh matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix} n & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & n & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & n & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-2n)(\lambda-n)^{2(n-1)}\lambda$$

Dengan demikian, maka spektrum *signless* Laplace dari $L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$spec\left(L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix} \blacklozenge$$

**Teorema 21**

Spektrum detour komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Matriks detour komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ 2n-1 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 0 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 0 & 2n-2 & \dots & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 & 0 & \dots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari persamaan $det\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $det\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (4n^2 - 5n + 2)\right)\left(\lambda + (2n-2)\right)^{2(n-1)}\left(\lambda + (3n-2)\right)$$

Maka spektrum *Detour* dari $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} (4n^2-5n+2) & -(2n-2) & -(3n-2) \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

## D. Spektrum Graf Subgrup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_8)$ dan Komplemen Graf Subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_8)}$ dari Grup Dihedral

Secara umum spektrum pada graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_8)$ dinyatakan dalam beberapa teorema berikut.

**Teorema 22**

Spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Pada $D_{2n}$, maka $\langle r^2, rs\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh matriks *adjacency* dari graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right)$ diperoleh dari persamaan $det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $det\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right) - \lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda - (n-1)\right)^2(\lambda+1)^{2n-2} = \left(\lambda - (n-1)\right)^2(\lambda+1)^{2(n-1)}$$

Maka, Spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} (n-1) & -1 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 23**

Spektrum Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2(n-1) & 2 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Pada $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$, semua titik berderajat $n-1$. Diperoleh matriks derajat pada $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut

$$D\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big) = (n-1)I$$

dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $2n\times 2n$. Maka matriks Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & n-1 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & n-1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L\big(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\big) - \lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda - n)^{2(n-1)}\lambda^2$$

Jadi, spektrum Laplace subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\Big(L\big(\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})\big)\Big) = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 2(n-1) & 2 \end{bmatrix} \blacklozenge$$

**Teorema 24**

Spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\Big(L^{+}\big(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\big)\Big) = \begin{bmatrix} 2(n-1) & n-2 \\ 2 & 2(n-1) \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Karena matriks signless Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$L^{+}\big(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\big) = D\big(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\big) + A\big(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\big)$$

maka sesuai bukti Teorema 23, diperoleh

$$L^{+}\big(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\big) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & n-1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & n-1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

Menggunakan eliminasi Gauss pada $L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right)-\lambda I$ diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda)=\left(\lambda-(2n-2)\right)^2\left(\lambda-(n-2)\right)^{2n-2}$$

Jadi, spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix}2(n-1) & n-2\\ 2 & 2(n-1)\end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 25**

Spektrum *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n\geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}2n & 0 & -n\\ 1 & 2(n-1) & 1\end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Sesuai definisi komplemen graf subgrup, maka diperoleh matriks *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&1&1&0&1&\dots&0\\1&0&1&\dots&0&0&1&0&\dots&1\\0&1&0&\dots&1&1&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&1&\dots&0&0&1&0&\dots&1\\1&0&1&\dots&0&0&1&0&\dots&1\\0&1&0&\dots&1&1&0&1&\dots&0\\1&0&1&\dots&0&0&1&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&0&\dots&1&1&0&1&\dots&0\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari persamaan $det\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $det\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas. Maka polinomial karakteristik dari $A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-n)\lambda^{2n-2}(\lambda+n)=(\lambda-n)\lambda^{2(n-1)}(\lambda+n)$$

Maka spektrum *adjacency* dari komplemen graf subrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right))=\begin{bmatrix}n & 0 & -n\\ 1 & 2(n-1) & 1\end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Teorema 26**

Spektrum Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Karena pada $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ semua titik berderajat $(n-1)$ maka pada $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ semua titik berderajat $n$. Maka diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$D\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right) = nI,$$

dengan $I$ adalah matriks identitas berordo $2n \times 2n$. Maka diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = \begin{bmatrix} n & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & n & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & n & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & -1 & \dots & n & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & n & -1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & n & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 2n)(\lambda - n)^{2(n-1)}\lambda$$

Dengan demikian, maka spektrum Laplace dari $L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}. \ \blacklozenge$$

**Teorema 27**

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Sesuai bukti Teorema 26, maka diperoleh matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix} n & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & n & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & n & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & n & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & n & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & s1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-2n)(\lambda-n)^{2(n-1)}\lambda$$

Dengan demikian, maka spektrum *signless* Laplace dari $L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}\blacklozenge$$

**Teorema 28**

Spektrum detour komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

**Bukti:**

Matriks detour komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-2 \\ 2n-1 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ 2n-2 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 0 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \dots & 2n-2 & 0 & 2n-1 & \dots & 2n-1 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 0 & \dots & 2n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari persamaan $det\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $det\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)-\lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian semua unsur diagonal utama matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = \big(\lambda - (4n^2 - 5n + 2)\big)\big(\lambda + (2n - 2)\big)^{2(n-1)}\big(\lambda + (3n - 2)\big)$$

Maka spektrum *Detour* dari $DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, rs\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, rs\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} (4n^2 - 5n + 2) & -2(n-1) & -(3n-2) \\ 1 & 2(n-1) & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

# BAB V
# PENUTUP

## A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa pola umum spektrum adjacency, Laplace, *signless* Laplace, dan detour dari graf subgroup dan komplemen graf subgroup dari grup dihedral. Berikut ini merupakan beberapa temua terkait spektrum graf subgroup dan komplemen graf subgroup dari grup dihedral $D_{2n}$.

1. Spektrum adjacency, Laplace, dan *signless* Laplace dapat ditentukan pada graf subgroup dari grup dihedral untuk subgroup normal $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$, $\langle r^2, s\rangle$, dan $\langle r^2, rs\rangle$. Spektrum detour tidak dapat ditentukan karena graf yang diperoleh adalah graf tidak terhubung.
2. Beberapa spektrum pada graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ dan $\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})$ serta komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ dan $\overline{\Gamma_{\langle r^2,rs\rangle}(D_{2n})}$ mempunyai nilai yang sama. Hal ini berarti bahwa kedua graf yang mempunyai spektrum yang sama tersebut adalah graf yang ko-spektral.
3. Ketika graf subgroup atau komplemen graf subgroup berbentuk graf bipartisi maka spektrum Laplace dan spektrum signless Laplace bernilai sama.

## B. Saran

Pada penelitian ini hanya diteliti graf subgroup dan komplemen graf subgroup dari grup dihedral untuk subgroup normal $\langle r\rangle$, $\langle r^2\rangle$, $\langle r^2, s\rangle$, dan $\langle r^2, rs\rangle$ dari grup dihedral $D_{2n}$. Pada graf subgroup untuk subgroup normal $\langle r^2\rangle$, $\langle r^2, s\rangle$, dan $\langle r^2, rs\rangle$ hanya diteliti untuk *n* bilangan asli genap dan *n* ≥ 4. Dengan demikian maka pada penelitian lanjutan dapat meneliti spektrum untuk graf subgroup dan komplemen graf subgroup pada subgroup normal $\langle r^2\rangle$, $\langle r^2, s\rangle$, dan $\langle r^2, rs\rangle$ untuk *n* bilangan asli ganjil dan *n* ≥ 3. Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan pada graf lainnya yang diperoleh dari suatu grup.

## DAFTAR PUSTAKA


Abdussakir, Fahruddin, I. & Rahmawati, N.D. 2009. *Menentukan Spectrum Suatu Graf Berbantuan Matlab*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Sari, FNK., & Shandya, D. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Abdussakir, Muzakir, dan Hasanah, R. 2016. *Spektrum Graf Konjugasi dan Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral*. Laporan Penelitian Dosen Bersama Mahasiswa. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Anderson, D.F., Fasteen, J. dan LaGrange, J.D. 2012. The Subgroup Graphs of a Group. *Arab J Math.*1:17–27. DOI 10.1007/s40065-012-0018-1

Anton, H. dan Rorres, Ch. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition.* New York: John Willey & Sons, Inc.

Agnarsson, G. dan Greenlaw, R. 2007. *Graph Theory: Modeling, Application, and Algorithms*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 4(7): 1038-1040.

Biggs, N. 1974. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Brouwer, A.E & Haemers, W. H. 2011. *Spectra of graphs: Monograph*. New York: Springer.

Chartrand, G. & Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chartrand, G. dan Oellermann O.R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Singapore. McGraw-Hill, Inc.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company.

Kakeri, F & Erfanian, A. 2015. The Complement of Subgroup Graph of a Group. *Journal of Prime Research in Mathematics*. 11: 55-60

Mohar, B. 1992. Laplace Eigenvalues of Graphs: A Survey. *Discrete Math.* 109(1–3): 171–183.

Vahidi, J. & Talebi, A.A. 2010. The Commuting Graphs on Groups $D_{2n}$ and $Q_n$. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 1(2): 123-127.

Yin, Sh. 2008. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph $G_l$. *WSEAS Transaction on Systems*. 7(4): 362-372.

# FOTO KEGIATAN

# SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DAN KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

Abdussakir[1], Dinda A.A[1], Alinul L[1], Afaf T.P[1]

[1]Department of Mathematics, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

## Anderson dkk (2012)

Misalkan $G$ grup dan $H$ subgrup $G$. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah (*digraph*) dengan himpunan titik semua unsur di $G$ dan titik $x$ terhubung langsung ke $y$ (atau ada busur dari $x$ ke $y$) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$.

Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka $x$ dan $y$ dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf $\Gamma_H(G)$ yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari $G$.

## Kakeri dan Erfanian (2015)

Graf subgrup $\Gamma_H(G)$ jelas eksistensinya ketika $H$ adalah subgrup normal dari $G$. Jika $xy \in H$ maka belum tentu $yx \in H$. Jika $H$ subgrup normal di $G$, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$.

Dengan demikian, ketika $H$ subgrup normal maka komplemen dari graf subgrup $\Gamma_H(G)$ juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*).

## Bondy & Murthy (2008)

Misalkan $G$ graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (*Adjacency matrix*) dari graf $G$, dinotasikan dengan $A(G) = [a_{ij}]$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan $a_{ij} = 1$ jika titik $v_i$ terhubung langsung dengan titik $v_j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya.

## Matriks Laplace dan Signless Laplace

Matriks derajat dari matriks $G$, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-$i$ dan kolom ke-$i$ adalah derajat dari $v_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, p$.

Matriks $\boldsymbol{L(G) = D(G) - A(G)}$ disebut matriks Laplace (Mohar, 1992) dan matriks $\boldsymbol{L^{+}(G) = D(G) + A(G)}$ disebut matriks *signless* Laplace dari graf $G$ (Brouwer & Haemers, 2011).

# Ayyaswamy & Balachandran (2010)

Matriks detour dari $G$, dinotasikan dengan $DD(G)$ adalah matriks ($p \times p$) sedemikian hingga unsur pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ adalah bilangan yang menyatakan panjang lintasan terpanjang dari $v_i$ ke $v_j$ di $G$.

## Bigg (1974) dan Yin (2008)

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda suatu matriks, dan misalkan $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing $\lambda_i$.

Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf $G$, dan dinotasikan dengan $Spec(G)$

# Fokus Penelitian

Pada penelitian ini akan ditentukan

1. Spektrum Adjacency
2. Spektrum Laplace
3. Spektrum Signless Laplace
4. Spektrum Detour

dari graf subgrup dan komplemen graf subgroup dari grup dihedral

## Hasil Penelitian

**Teorema 1**

Spektrum *adjacency* graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n-1 & -1 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 2**

Spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}.$$

# Hasil Penelitian

## Teorema 3

Spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ adalah

$$spec\left(L^{+}\left(\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 \\ 2 & 2n-2 \end{bmatrix}.$$

## Teorema 4

Spektrum *adjacency* komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} n & 0 & -n \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Hasil Penelitian

**Teorema 5**

Spektrum Laplace komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 6**

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & n & 0 \\ 1 & 2n-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Hasil Penelitian

**Teorema 7**

Spektrum detour komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)\right)=\begin{bmatrix}(2n-1)^2 & -(2n-1)\\ 1 & 2n-1\end{bmatrix}$$

**Teorema 8**

Spektrum *adjacency* graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})\right)\right)=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{n-2}{2}\right) & -1\\ 4 & 2(n-2)\end{bmatrix}.$$

# Hasil Penelitian

**Teorema 9**

Spektrum Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli genap

dan $n \geq 4$ adalah $spec\left(L\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 2(n-2) & 4 \end{bmatrix}$

**Teorema 10**

Spektrum *signless* Laplace graf subgroup $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})$ untuk $n$ bilangan asli

genap dan $n \geq 4$ adalah $spec\left(L^{+}\left(\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})\right)\right) = \begin{bmatrix} (n-2) & \left(\frac{n-4}{2}\right) \\ 4 & 2(n-2) \end{bmatrix}$

# Hasil Penelitian

**Teorema 11**

Spektrum *adjacency* komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(A\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{2n+n}{2}\right) & 0 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 12**

Spektrum Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 2n & \left(\frac{2n+n}{2}\right) & 0 \\ 3 & 2(n-2) & 1 \end{bmatrix}$$

# Hasil Penelitian

**Teorema 13**

Spektrum *signless* Laplace komplemen graf subgroup $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ untuk $n$ bilangan asli genap dan $n \geq 4$ adalah

$$spec\left(L^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} 3n & \dfrac{2n-n}{2} & n \\ 1 & 2(n-2) & 3 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 14**

Spektrum detour komplemen graf subgrup $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ adalah

$$spec\left(DD\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)\right) = \begin{bmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{bmatrix}$$

TERIMA KASIH

# BIODATA

## IDENTITAS DIRI

| | |
|---|---|
| Nama | : Dr. ABDUSSAKIR, M.Pd |
| NIP/NIK | : 19751006 200312 1 001 |
| Jenis Kelamin | : Laki-laki |
| Tempat dan Tanggal Lahir | : PAMEKASAN, 6 OKTOBER 1975 |
| Status Perkawinan | : Kawin |
| Agama | : ISLAM |
| Golongan / Pangkat | : IIID / PENATA TK I |
| Jabatan Fungsional Akademik | : LEKTOR |
| Perguruan Tinggi | : UIN MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG |
| Alamat | : JL. GAJAYANA 50 MALANG |
| Telp./Faks. | : (0341) 558933 |
| Alamat Rumah | : PERUM OMA VIEW BLOK EF-01 MALANG |
| Telp./Faks. | : 08179605672/081233233715 |
| Alamat E-mail | : sakir@mat.uin-malang.ac.id |

## RIWAYAT PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI

| Tahun Lulus | Jenjang | Perguruan Tinggi | Jurusan/ Bidang Studi |
|---|---|---|---|
| 2000 | SARJANA | UNIVERSITAS NEGERI MALANG | PEND MATEMATIKA |
| 2003 | MAGISTER | UNIVERSITAS NEGERI MALANG | PEND MATEMATIKA |
| 2014 | DOKTOR | UNIVERSITAS NEGERI MALANG | PEND MATEMATIKA |

## PELATIHAN PROFESIONAL

| Tahun | Pelatihan | Penyelenggara |
|---|---|---|
| 2004 | Pelatihan Penerapan Model Realistics Mathematics Education bagi Guru Madrasah Ibtidaiyah se-Kota Malang | UIN Malang |
| 2005 | Pelatihan Standar Mutu Dosen | UIN Malang |
| 2006 | Pelatihan Pembuatan Media Pembelajaran Berbasis Teknologi Komputer | UIN MALANG dan MAN 1 PAMEKASAN |
| 2008 | Pelatihan Pembuatan WEB-BLOG di F Saintek UIN Malang | UIN MALANG |
| 2009 | Pelatihan Peningkatan Validasi dan Kualitas Soal | UIN Malang |

## PRODUK BAHAN AJAR

| Mata Kuliah | Program Pendidikan | Jenis Bahan Ajar (Cetak dan Noncetak) | Semester / Tahun Akademik |
|---|---|---|---|
| Analisis Real I | S1 Matematika | Cetak | Genap/ 2005/2006 |
| Matematika I | S1 PGMI | Cetak | Genap/2007/2008 |
| Teori Graf | S1 Matematika | Cetak | Genap/2009/2010 |

## PENGALAMAN PENELITIAN

| Tahun | Judul Penelitian | Ketua / | Sumber Dana |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Anggota Tim | |
| 2005 | Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $K_{1,n}$ dan $C_n$. | Ketua | Mandiri |
| 2005 | Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graph $P_n$ dan mP2. | Ketua | Mandiri |
| 2005 | Bilangan dalam Al Qur'an. | Ketua | Mandiri |
| 2005 | Rahasia Bilangan 19 dalam Al Qur'an | Ketua | Mandiri |
| 2005 | Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat Model "⊥" dengan Panjang n | Ketua | Mandiri |
| 2005 | Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat Model "H" dengan Panjang n | Ketua | Mandiri |
| 2005 | Rahasia Penyebutan Bilangan dalam Al-Qur'an | Anggota | DIPA 2005 |
| 2006 | Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat dengan Himpunan Derajat {1, 4} dan n Titik Berderajat 4, n Bilangan Asli | Ketua | Mandiri |
| 2006 | Penerapan Model Pembelajaran Matematika Berorientasi PAKEM untuk Meningkatkan" | Anggota | Depag Pusat |
| 2006 | Pola Matematika pada Surat Al-Ashr, Al-Kautsar, dan An-Nashr | Ketua | DIPA 2006 |
| 2009 | Menentukan Spectrum suatu Graf Berbantuan Matlab | Ketua | DIPA 2009 |
| 2010 | Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Graf Multi Star | Ketua | Mandiri |
| 2011 | Analisis Matematik terhadap Azimat Numerik dan Alfabetik | Ketua | DIPA 2011 |
| 2012 | Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Multipartisi Komplit | Ketua | DIPA 2012 |
| 2013 | Spektrum Adjacency, Spektrum Laplace, Spektrum Signless Laplace, dan Spektrum Detour Graf Komuting dari Grup Dehidral | Ketua | DIPA 2013 |
| 2014 | Dimensi Metrik, Multiplisitas Sikel, serta Radius dan Diameter Graf Komuting dan Nonkomuting Grup Dihedral | Ketua | DIPA 2014 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2015 | Automorfime pada graf komuting dan graf non komuting dari grup Dehidral, Simetri, dan Quaternion | Ketua | DIPA 2015 |
| 2016 | Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral | Ketua | DIPA 2016 |

## KARYA ILMIAH

**A. Buku/Bab Buku/Jurnal**

| Tahun | Judul | Penerbit/Jurnal |
|---|---|---|
| 2006 | Ada Matematika dalam Al Qur’an | UIN-Malang Press |
| 2006 | Analisis Shalat melalui Logika Matematika dalam buku Islam, Sains dan Teknologi | UIN-Malang Press |
| 2006 | Analisis Matematis terhadap Filsafat Al Qur’an | UIN-Malang Press |
| 2007 | Ketika Kyai Mengajar Matematika | UIN-Malang Press |
| 2009 | Matematika I: Kajian Integratif Matematika dan Al-Qur’an | UIN-Malang Press |
| 2010 | Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi | UIN-Malang Press |
| 2004 | Pembelajaran Geometri Berdasar Teori van Hiele Berbantuan Komputer | Jurnal Matematika UM |
| 2004 | Menjawab Teka Teki Langkah Kuda pada Beberapa Ukuran Papan Catur dengan Teori Graph | Jurnal Saintika UIN Malang |
| 2005 | Edge Magic Total Labeling pada Graph $mP_2$ (m bilangan asli ganjil) | Jurnal Saintika UIN Malang |
| 2008 | Pembelajaran Matematika Berparadigma Al-Qur’an untuk Mengatasi Kesulitan Siswa Madrasah dalam Mempelajari Matematika | Jurnal Madrasah UIN Malang |
| 2009 | Super Edge Magic Labeling pada Graph Ulat dengan Himpunan Derajat {1, 4} dan n Titik Berderajat 4, n Bilangan Asli | Jurnal Cauchy UIN Malang |
| 2009 | Pembelajaran Keliling Dan Luas Lingkaran Dengan Strategi React Pada Siswa Kelas Viii Smp Negeri 6 Kota Mojokerto | Prosiding Seminar Nasional UNY |
| 2010 | Pelabelan Super Sisi Ajaib pada Beberapa Bentuk Graf Ulat | Prosiding Seminar Nasional UI |
| 2012 | Pembelajaran Geometri Sesuai Teori van Hiele | Jurnal Madrasah |
| 2012 | Pembelajaran Berparadigma Al-Qur’an untuk Mengatasi Kesulitan Siswa Madrasah dalam Mempelajari Matematika | Jurnal Madrasah (*republish online*) |
| 2012 | Analisis Matematik Terhadap Azimat Numerik | Jurnal Cauchy |

| | | |
|---|---|---|
| 2013 | Penggunaan Komputer untuk Pembelajaran Matematika | Jurnal Madrasah |
| 2013 | Spectrum of the Laplacian Matrix of Non-Commuting Graph of Dihedral Group D2n | Prosiding The 4$^{th}$ International Conference on Green Technology |
| 2013 | Bilangan Clique Graf Commuting dari Grup Dihedral | Prosiding SNMPM UNS |
| 2013 | Spektrum Adjacency Graf Non-Commuting dari Grup Dihedral (D2n) | Prosiding SNMPM UNS |
| 2014 | Spektrum Laplace Graf Komuting dan Graf Nonkomuting dari Grup Dihedral | Prosiding Seminar Nasional dan Workshop Aljabar dan Pembelajarannya HPA Unhas |
| 2014 | Keterkaitan Antara Modul Bebas Dengan Modul Dilihat Dari Sifat-Sifat Homomorfisme Modul | Jurnal Cauchy |
| 2015 | Proses Berpikir Mahasiswa dalam Menyusun Bukti Matematis dengan Strategi Semantik | Jurnal Pendidikan Sains |
| 2015 | Penggunaan Gestur Representasional oleh Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematis secara Kelompok | Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi UIN Bandung |
| 2015 | Bilangan Kromatik Graf Commuting dan Non Commuting Grup Dihedral | Jurnal Cauchy |
| 2017 | Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral | Jurnal Mantik UIN SA Sby |
| 2017 | On The Spectra of Commuting and Non Commuting Graph on Dihedral Group | Jurnal Cauchy |
| 2017 | Internalisasi nilai-nilai Islami dalam pembelajaran matematika dengan strategi analogi | Prosiding Si MaNIS 2017 UIN Malang |
| 2017 | Spektrum Graf Konjugasi dan Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral | Prosiding SNTIKI 9 UIN Riau |

**B. Makalah/Poster**

| Tahun | Judul | Penyelenggara |
|---|---|---|
| 2004 | Realistics Mathematics Education (RME) dan Penerapannya di Sekolah Dasar | Fakultas Tarbiyah UIN MALANG |
| 2005 | Matematika dan Al-Qur’an | TOPDAM V / Brawijaya Malang |
| 2005 | Sains dan Teknologi dalam Al-Qur’an | UIN Malang |
| 2006 | Kajian Matematis terhadap Fenomena Penyebutan *”Ulul Albab”* dalam Al-Qur’an | Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang |

| | | |
|---|---|---|
| 2006 | Pengembangan Evaluasi Pembelajaran Berbasis Kompetensi | Pemkab Magetan |
| 2006 | Pembelajaran Matematika Berbantuan Komputer | UIN Malang dan MAN 1 Pamekasan |
| 2008 | Pentingnya Matematika dalam Pemikiran Islam | UIN Malang |
| 2009 | Umat Islam Perlu Menguasai Matematika | Jurusan Tadris Matematika IAIN Mataram |
| 2009 | Pembelajaran Keliling dan Luas Lingkaran dengan Strategi REACT pada Siswa Kelas VIII SMP Negeri 6 Kota Mojokerto | Jurusan Pendidikan Matematika Universits Negeri Yogyakarta |
| 2010 | Super Edge Magic Labeling pada Beberapa Bentuk Graf Ulat | Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia |
| 2010 | Transisi Berpikir dari Sekolah Menengah ke Perguruan Tinggi | FMIPA UM Malang |
| 2010 | Jalur Menujur Berpikir Formal dalam Matematika | FMIPA UM Malang |
| 2010 | Jalur Menuju Berpikir Formal pada Materi Fungsi Komposisi | PPS UM Malang |
| 2012 | Belajar Matematika dengan Hati: Mewujudkan Pendidik Profesional | FKIP UNISDA Lamongan |

Malang, 19 April 2017

Dosen Ybs

Dr. ABDUSSAKIR, M.Pd

## *CURRICULUM VITAE*

### IDENTITAS DIRI

| | |
|---|---|
| Nama | : Afaf Trian Putra |
| NIM | : 14610073 |
| Jenis Kelamin | : Laki-laki |
| Tempat danTanggal Lahir | : Lamongan, 27 oktober 1996 |
| Angkatan tahun/Semester | : 2014/6 (genap) |
| Agama | : Islam |
| Jurusan | : Matematika |
| Alamat Rumah | : Jalan KH Zein RT 06 RW 06 Paciran Lamongan |
| Telp./Faks. | : 085843839799/085852910906(wa) |
| Alamat E-mail | : afaftrian7@gmail.com |

### RIWAYAT PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI

| Tahun Lulus | Jenjang Pendidikan |
|---|---|
| 2008 | MI Muhammadiyah 01 Paciran Lamongan |
| 2011 | SMP Muhammadiyah 25 Paciran Lamongan |
| 2014 | MA Muhammadiyah 02 Paciran Lamongan |

Saya menyatakan bahwa semua keterangan dalam *Curriculum Vitae* ini adalah benar dan apabila terdapat kesalahan, saya bersedia mempertanggungjawabkannya.

Malang, 27 Maret 2017

Yang Menyatakan,

Afaf Trian Putra

## *CURRICULUM VITAE*

**IDENTITAS DIRI**

| | |
|---|---|
| Nama | : Dinda Akromatul Akhadiyah |
| NIM | : 14610071 |
| Jenis Kelamin | : Perempuan |
| Tempat danTanggal Lahir | : Malang, 28 Agustus 1995 |
| Angkatan tahun/Semester | : 2014/6 (genap) |
| Agama | : Islam |
| Jurusan | : Matematika |
| Alamat Rumah | : Jalan kolonel sugiono gg 2 No. 50 Rt. 03 Rw. 03 Malang |
| Telp./Faks. | : 085815491525 |
| Alamat E-mail | : dindaakromatulakhadiyah@gmail.com |

**RIWAYAT PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI**

| **Tahun Lulus** | **Jenjang Pendidikan** |
|---|---|
| 2007 | SD Negeri Ciptomulyo 2 Malang |
| 2010 | SMP Negeri 2 Malang |
| 2013 | SMA Negeri 2 Malang |

Saya menyatakan bahwa semua keterangan dalam *Curriculum Vitae* ini adalah benar dan apabila terdapat kesalahan, saya bersedia mempertanggungjawabkannya.

Malang, 28 Maret 2017

Yang Menyatakan,

Dinda Akromatul A.

## *CURRICULUM VITAE*

**IDENTITAS DIRI**

| | |
|---|---|
| Nama | : Alinul Layali |
| NIM | : 14610042 |
| Jenis Kelamin | : Perempuan |
| Tempat danTanggal Lahir | : Gresik, 04 Mei 1996 |
| Angkatan tahun/Semester | : 2014/6 (genap) |
| Agama | : Islam |
| Jurusan | : Matematika |
| Alamat Rumah | : Purwodadi RT 02 RW 01 Sidayu Gresik |
| Telp./Faks. | : 085746226260 |
| Alamat E-mail | : layalialin@gmail.com |

**RIWAYAT PENDIDIKAN PERGURUAN TINGGI**

| Tahun Lulus | Jenjang Pendidikan |
|---|---|
| 2008 | SD Muhammadiyah 01 Sidayu Gresik |
| 2011 | MTs Muhammadiyah 04 Sidayu Gresik |
| 2014 | MA YKUI Maskumambang Dukun Gresik |

Saya menyatakan bahwa semua keterangan dalam *Curriculum Vitae* ini adalah benar dan apabila terdapat kesalahan, saya bersedia mempertanggungjawabkannya.

Malang, 22 Maret 2017
Yang Menyatakan,

Alinul Layali

# Detour Spectrum and Energy of Conjugate Graph Complement of Dihedral Group

Abdussakir[1], Muzakir[1], Corry Corazon Marzuki[2]
[1]Department of Mathematics, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia
[2]Department of Mathematics, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Indonesia

Study of graph from a group has become an interesting topic until now. One of the topics is spectra of a graph from finite group. Spectrum of a finite graph is defined as collection of all distinct eigenvalues and their algebraic multiplicity of its matrix. The most related topic in the study of spectrum of finite graph is energy. Energy of a finite graph is defined as sum of absolute value of all its eigenvalues. In this paper, we study the spectrum and energy of detour matrix of conjugate graph complement of dihedral group. The main result is presented as theorems with complete proof.

**Keywords:** Spectrum, Energy, Complement Graph, Conjugate Graph, Dihedral Group.

## 1. INTRODUCTION

Several graphs from some group have been studied by researchers, such as Cayley graph[1,2], Schreier coset graph[3], identity graph[4], commuting[5,6] and non-commuting graph[7-9], subgroup graph[10,11], power graph[12], inverse graph[13,14] and conjugate graph[15] of a group. For non-abelian finite group $G$, two elements $x$ and $y$ in $G$ are said to be conjugate to each other if there exists an element $z$ in $G$ that satisfies $x = zyz^{-1}$. Let $[e], [x_1], [x_2], \dots, [x_p]$ are all conjugacy classes of $G$. The conjugate graph of group $G$ contains all elements of $G$ as its vertex set and two distinct vertices will be adjacent if they are representatives of the same conjugacy class[15]. So, the vertex $y$ will be adjacent to $x_i$ if $y \in [x_i]$. In this paper, conjugate graph of a group $G$ will be denoted by $C(G)$ and the complement of $C(G)$ will be denoted by $\overline{C(G)}$. Two distinct vertices of $\overline{C(G)}$ are adjacent if and only if they are not adjacent in $C(G)$. The cardinality of the vertex set of $\overline{C(G)}$ and the edge set of $\overline{C(G)}$ will be denoted by $p(\overline{C(G)})$ and $q(\overline{C(G)})$, respectively. For a graph $G$, $p(G)$ is called the order of $G$ and $q(G)$ is called the size of $G$[16].

*Email Address: sakir@mat.uin-malang.ac.id

Detour matrix of graph $G$ of order $p$ that denoted by $DD(G)$ is a $(p \times p)$-matrix $DD(G) = (D_{ij})$ where $D_{ij}$ is the length of the longest path $v_i - v_j$ in $G$[17]. Since $DD(G)$ is a symmetric matrix, all of its eigenvalues $\lambda_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $p$) are real and can be labeled as $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_p$. Let $\lambda_{i_1} > \lambda_{i_2} > \lambda_{i_3} > \cdots > \lambda_{i_n}$ are the distinct eigenvalues of $DD(G)$, then the spectrum of $DD(G)$ can be written as

$$spec_{DD}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & \lambda_{i_2} & \dots & \lambda_{i_n} \\ m(\lambda_{i_1}) & m(\lambda_{i_2}) & \dots & m(\lambda_{i_n}) \end{pmatrix},$$

where $m\left(\lambda_{i_j}\right)$ is the algebraic multiplicity of the eigenvalue $\lambda_{i_j}$. The energy of $DD(G)$ will be denoted by $E_{DD}(G)$ and be defined as $E_{DD}(G) = \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i|$[17,18].

The concept of spectrum was introduced by Bigg[19], the concept of detour matrix was introduced by Harary[20] and the concept of energy was introduced by Gutman[21]. The researches about detour spectrum of graphs have been conducted, such as detour spectrum of several graphs[17] and of commuting and non-commuting graphs of dihedral group[22]. Several kinds of energy of graph has been studied, for instance in[18,23-33]. Finally, the survey about kinds of energy of graph can be seen in Meenakshi and Lavanya[34]. Since the study of detour spectrum and energy of conjugate graph complement of dihedral group has not been done yet, we do this study.

## 2. RESULT

First, we show some properties of conjugate graph complements of dihedral group.

THEOREM 1: Let $C(D_{2n})$ be conjugate graph of dihedral group $D_{2n}$ of order $2n$, where $n \geq 3$ and $n$ is positive integer. The number of edge in complement of conjugate graph of $D_{2n}$ is

(i) $q(\overline{C(D_{2n})}) = \frac{3n^2-2n+1}{2}$ for odd $n$.

(ii) $q(\overline{C(D_{2n})}) = \frac{3n^2-2n+2}{2}$ for even $n$.

PROOF: (i) For odd $n$, all of conjugacy classes of dihedral group $D_{2n}$ are $[1] = \{1\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, ..., $[r^{(n-1)/2}] = \{r^{(n-1)/2}, r^{(n-1)/2+1}\}$ and $[s] = \{s, sr, sr^2, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$. According to definition of conjugate graph, $C(D_{2n})$ will contains a complete graph $K_1$, $(n - 1)/2$ complete graphs $K_2$ and a complete graph $K_n$. Thus,

$$C(D_{2n}) \cong K_1 \cup \frac{n-1}{2} K_2 \cup K_n$$

and

$$q(C(D_{2n})) = \frac{n^2-1}{2}.$$

Then, we have

$$q(\overline{C(D_{2n})}) = \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{n^2-1}{2} = \frac{3n^2-2n+1}{2}.$$

(ii) For even $n$, all of conjugacy classes of dihedral group $D_{2n}$ are $[1] = \{1\}$, $[r^{n/2}] = \{r^{n/2}\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, ..., $[r^{n/2-1}] = \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$, $[s] = \{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$ and $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$. According to definition of conjugate graph, $C(D_{2n})$ will contains two complete graphs $K_1$, $(n - 2)/2$ complete graphs $K_2$ and two complete graphs $K_{n/2}$. Thus,

$$C(D2n) \cong 2K_1 \cup \frac{n-2}{2} K_2 \cup 2K_{\frac{n}{2}}$$

and

$$q(C(D_{2n})) = \frac{n^2-4}{4}.$$

Then, we have

$$q(\overline{C(D_{2n})}) = \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{n^2-4}{4} = \frac{7n^2-4n+4}{4}. \blacksquare$$

THEOREM 2: Detour matrix of complement of conjugate graph of dihedral group $D_{2n}$ for odd $n$ is $(2n \times 2n)$-matrix

$$DD(\overline{C(D_{2n})}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

where

$A = (a_{ij})$ is an $(n \times n)$-matrix with $a_{ij} = 2n - 2$ if $i \neq j$ and $a_{ij} = 0$ elsewhere,

$B = (b_{ij})$ is an $(n \times n)$-matrix with $b_{ij} = 2n - 1$ for all $i$ and $j$, and

$C = (c_{ij})$ is an $(n \times n)$-matrix with $c_{ij} = 2n - 1$ if $i \neq j$ and $c_{ij} = 0$ elsewhere.

PROOF: According to the proof (i) of Theorem 1, the conjugacy classes of dihedral group are $[1] = \{1\}, [r] = \{r, r^{n-1}\}, [r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}, \dots, [r^{(n-1)/2}] = \{r^{(n-1)/2}, r^{(n-1)/2+1}\}$ and $[s] = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. They will be a complete graph in $C(D2n)$, respectively. Therefore, in $\overline{C(D_{2n})}$, vertex 1 is adjacent to $r^i$ and $sr^i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, vertex $r^i$ is adjacent to $sr^j$ $(i = 1, 2, \dots, n-1$ and $j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ and vertex $sr^i$ is not adjacent to $sr^j$ $(i, j = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. Then we can establish the longest path between two distinct vertices in $\overline{C(D_{2n})}$ as follow.

(i) For $r^i$ and $r^j$, $1 \leq i < j \leq n$, we can construct a path $P$: $r^i, sr^i, r^{i+1}, sr^{i+1}, \dots, r^{j-1}, sr^{j-1}, r^{j+1}, sr^{j+1}, r^{j+2}, sr^{j+2}, \dots, r^n, sr^n, r^{i-1}, sr^{i-1}, r^{i-2}, sr^{i-2} \dots, r^2, sr^2, r, sr, r^j$. This path $P$ contains all element of $D_{2n}$ except $sr^j$. Hence, the length of $P$ is $2n - 2$.

(ii) For $r^i$ and $sr^j$, $1 \leq i, j \leq n$, we can construct a path $P$: $r^i, sr^i, r^{i+1}, sr^{i+1}, \dots, r^{j-1}, sr^{j-1}, r^{j+1}, sr^{j+1}, r^{j+2}, sr^{j+2}, \dots, r^n, sr^n, r^{i-1}, sr^{i-1}, r^{i-2}, sr^{i-2} \dots, r^2, sr^2, r, sr, r^j, sr^j$. Thus, path $P$ contains all element of $D_{2n}$. Hence, the length of $P$ is $2n - 1$.

(iii) For $sr^i$ and $sr^j$, $1 \leq i < j \leq n$, we can construct a path $P$: $sr^i, r^i, r^{i+1}, sr^{i+1}, \dots, r^{j-1}, sr^{j-1}, r^{j+1}, sr^{j+1}, r^{j+2}, sr^{j+2}, \dots, r^n, sr^n, r^{i-1}, sr^{i-1}, r^{i-2}, sr^{i-2} \dots, r^2, sr^2, r, sr, r^j, sr^j$. Thus, path $P$ contains all element of $D_{2n}$. Hence, the length of $P$ is $2n - 1$.

From (i)-(iii), by labeling the rows and the columns of $DD(\overline{C(D_{2n})})$ in appropriate way, we will reach the desired proof. $\blacksquare$

For any two distinct vertices in $\overline{C(D_{2n})}$ for even $n$, the longest path has the length $2n - 1$. It is stated as the following theorem.

THEOREM 3: Detour matrix of conjugate graph complement of dihedral group $D_{2n}$ for even $n$ is $(2n \times 2n)$-matrix $DD(\overline{C(D_{2n})}) = (D_{ij})$ where $D_{ij} = 2n - 1$ if $i \neq j$ and $D_{ij} = 0$ elsewhere.

PROOF: All of conjugacy class of dihedral group $D_{2n}$ for even $n$ are $[1] = \{1\}$, $[r^{n/2}] = \{r^{n/2}\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, ..., $[r^{n/2-1}] = \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$, $[s] = \{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$ and $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$. Each conjugacy class will be a complete graph. So, in $\overline{C(D_{2n})}$, it will be a complete 5-partite graph where $V_1 = \{1, r^{n/2}\}$, $V_2 = \{r, r^2, \dots, r^{n/2-1}\}$, $V_3 = \{r^{n-1}, r^{n-2}, \dots, r^{n/2+1}\}$, $V_4 = \{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$

and $V_5 = \{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ are its partition sets with $|V_1| = 2$, $|V_2| = |V_3| = n/2 - 1$ and $|V_4| = |V_5| = n/2$. Cycle $W$: 1, $s$, $r$, $sr^2$, $r^2$, $sr^4$, ..., $r^{n/2-1}$, $sr^{n-2}$, $r^{n/2}$, $sr$, $r^{n-1}$, $sr^3$, $r^{n-2}$, ..., $r^{n/2+1}$, $sr^{n-1}$, 1 is one of the Hamiltonian cycles in $\overline{C(D_{2n})}$. Hence, $\overline{C(D_{2n})}$ is a Hamiltonian graph. And for every two distinct vertices in $\overline{C(D_{2n})}$ for even $n$, we can always find its Hamiltonian path. Consequently, the longest path between two distinct vertices in complement of conjugate graph of dihedral group $D_{2n}$ for even $n$ has the length $2n - 1$. ■

Based on Theorem 2 and Theorem 3, we can determine the characteristics polynomial of detour matrix $DD(\overline{C(D_{2n})})$. The characteristics polynomial of detour matrix $DD(\overline{C(D_{2n})})$ is defined by $\rho(\lambda) = \det(DD(\overline{C(D_{2n})}) - \lambda I)$, where $I$ is identity matrix of order $(2n \times 2n)$ [35]. To compute $\det(DD(\overline{C(D_{2n})}) - \lambda I)$, we can eliminate matrix $DD(\overline{C(D_{2n})}) - \lambda I$ using Gaussian elimination method to get an upper triangular matrix $U$. Then, $\det(DD(\overline{C(D_{2n})}) - \lambda I)$ is equal to the product of all entry in the main diagonal of $U$. We present the following lemma for odd and even $n$. The lemma will be very useful in determining detour spectrum and energy of $\overline{C(D_{2n})}$.

LEMMA 1: Let $\overline{C(D_{2n})}$ be a complement of conjugate graph of dihedral group $D_{2n}$ for positive integer $n$ and $n \geq 3$. The characteristics polynomial $\rho(\lambda)$ of detour matrix $DD(\overline{C(D_{2n})})$ is

(i) $\rho(\lambda) = (\lambda^2 - A\lambda - (A/2)^2 - B)(\lambda + (2n-2))^{n-1}(\lambda + (2n-1))^{n-1}$ where $A = (4n^2 - 7n + 3)$ and $B = (4n^4 - 4n^3 + (5n^2 - 2n + 1)/4)$ for odd $n$, and

(ii) $\rho(\lambda) = (\lambda - (2n-1)^2)(\lambda + (2n-1))^{2n-1}$ for even $n$.

PROOF: (i) If $n$ is odd, we determine the characteristics polynomial $\rho(\lambda)$ of $DD(\overline{C(D_{2n})})$ in Theorem 2 by eliminating $DD(\overline{C(D_{2n})}) - \lambda I$ using Gaussian elimination method to an upper triangular matrix $U$. It follows that $\rho(\lambda)$ is a product along main diagonal of $U$. (ii) If $n$ is even, then $DD(\overline{C(D_{2n})}) = (2n-1)(J - I)$, where $J$ is all one square and $I$ is identity matrix whose order is the same as the order of $DD(\overline{C(D_{2n})})$. Hence, the characteristics polynomial $\rho(\lambda)$ of detour matrix $DD(\overline{C(D_{2n})})$ is

$$\rho(\lambda) = (\lambda - (2n-1)^2)(\lambda + (2n-1))^{2n-1}. \blacksquare$$

THEOREM 4: The detour matrix spectrum of conjugate graph complement of dihedral group $D_{2n}$ for odd positive integer $n$ and $n \geq 3$ is

$$spec_{DD}(\overline{C(D_{2n})}) = \begin{pmatrix} \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2A^2 + 4B} & -(2n-1) & -(2n-2) & \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2A^2 + 4B} \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix},$$

where $A = (4n^2 - 7n + 3)$ and $B = (4n^4 - 4n^3 + (5n^2 - 2n + 1)/4)$.

PROOF: Let $n$ be odd, letting $\rho(\lambda) = 0$ for Lemma 1(i), we have its eigenvalues are $\lambda_1 = (A + \sqrt{2A^2 + 4B})/2$, $\lambda_2 = -(2n-1)$, $\lambda_3 = -(2n-2)$ and $\lambda_4 = (A - \sqrt{2A^2 + 4B})/2$. From Lemma 1(i) we also have $m(\lambda_1) = m(\lambda_4) = 1$ and $m(\lambda_2) = m(\lambda_3) = n - 1$. It completes the proof. ■

THEOREM 5: The detour matrix spectrum of conjugate graph complement of dihedral group $D_{2n}$ for even positive integer $n$ and $n \geq 3$ is

$$spec_{DD}(\overline{C(D_{2n})}) = \begin{pmatrix} (2n-1)^2 & -(2n-1) \\ 1 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

PROOF: From Lemma 1(ii), it is clear that the eigenvalues of $DD(\overline{C(D_{2n})})$ are $\lambda_1 = (2n-1)^2$ and $\lambda_2 = -(2n-1)$ and we have their algebraic multiplicity are $m(\lambda_1) = 1$ and $m(\lambda_2) = 2n - 1$, respectively. ■

COROLLARY 1: The detour matrix energy of conjugate graph complement of dihedral group $D_{2n}$ for odd positive integer $n$ and $n \geq 3$ is $E_{DD}(\overline{C(D_{2n})}) \geq 2(n-1)(4n-3)$

PROOF: Based on Theorem 4, we have

$$\begin{aligned} E_{DD}(\overline{C(D_{2n})}) &= \left|\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2A^2 + 4B}\right| + (n-1)(2n-2) \\ &\quad + (n-1)(2n-1) + \left|\frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2A^2 + 4B}\right| \\ &\geq (n-1)(4n-3) + \left|\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2A^2 + 4B} + \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2A^2 + 4B}\right| \\ &= (n-1)(4n-3) + |A| \\ &= (n-1)(4n-3) + (4n^2 - 7n + 3) \\ &= 2(n-1)(4n-3). \blacksquare \end{aligned}$$

COROLLARY 2: Energy of detour matrix of complement of conjugate graph of dihedral group $D_{2n}$ for even positive integer $n$ and $n \geq 3$ is $E_{DD}(\overline{C(D_{2n})}) = 2(2n-1)^2$.

PROOF: According to definition of energy, it is clear from Theorem 5 that $E_{DD}(\overline{C(D_{2n})}) = 2(2n-1)^2$. ■

## 3. CONCLUSION

In this paper, we have discussed in detail the detour spectra and energy of conjugate graph complement of dihedral group $D_{2n}$. Given that the kinds of energy of a graph are so numerous, further research may be undertaken to determine the other energies of the conjugate graph complement of dihedral group $D_{2n}$.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We sincerely thank the Faculty of Science and Technology Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang for supporting the study.

## REFERENCES

[1] A. Lubotzky, Cayley graphs: eigenvalues, expanders and random walks, London Math. Soc. Lect. Note Ser. (1995) 155–190.

[2] A. V Kelarev, C.E. Praeger, On transitive Cayley graphs of groups and semigroups, Eur. J. Comb. 24 (2003) 59–72.

[3] M. Conder, Schreier coset graphs and their applications (Groups and Combinatorics), (1992).

[4] W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, Groups as graphs, Editura CuArt, Judetul Olt, Romania, 2009.

[5] J. Vahidi, A.A. Talebi, The commuting graphs on groups D2n and Qn, J. Math. Comput. Sci. 1 (2010) 123–127.

[6] T. Woodcock, The commuting graph of the symmetric group Sn, Int. J. Contemp. Math. Sci. 10 (2015) 287–309.

[7] A. Abdollahi, S. Akbari, H.R. Maimani, Non-commuting graph of a group, J. Algebr. 298 (2006) 468–492.

[8] Z. Raza, S. Faizi, Non-commuting graph of a finitely presented group, 25 (2013) 883–885.

[9] A.R. Moghaddamfar, W.J. Shi, W. Zhou, A.R. Zokayi, On the noncommuting graph associated with a finite group, Sib. Math. J. 46 (2005) 325–332.

[10] D.F. Anderson, J. Fasteen, J.D. Lagrange, The subgroup graph of a group, Arab J. Math. 1 (2012) 17–27.

[11] F. Kakeri, A. Erfanian, The complement of subgroup graph of a group, J. Prime Res. Math. 11 (2015) 55–60.

[12] P.J. Cameron, S. Ghosh, The power graph of a finite group, Discrete Math. 311 (2011) 1220–1222.

[13] M.R. Alfuraidan, Y.F. Zakariya, Inverse graphs associated with finite groups, Electron. J. Graph Theory Appl. 5 (2017) 142–154.

[14] A.L.T. Paterson, Graph inverse semigroups, groupoids and their C*-algebras, J. Oper. Theory. (2002) 645–662.

[15] A. Erfanian, B. Tolue, Conjugate graphs of finite groups, Discret. Math. Algorithms Appl. 4 (2012) 1–8.

[16] G. Chartrand, L. Lesniak, P. Zhang, Graphs and digraphs, 6th ed., Chapman and Hall, Florida, 2015.

[17] S.K. Ayyaswamy, S. Balachandran, On detour spectra of some graphs, Int. J. Math. Comput. Phys. Electr. Comput. Eng. 4 (2010) 1038–1040.

[18] I. Gutman, M. Robbiano, E. Andrade, D.M. Cardoso, L. Medina, O. Rojo, Energy of line graphs, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1312–1323.

[19] N. Biggs, Algebraic graph theory, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 1993.

[20] F. Harary, Graph theory, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1969.

[21] I. Gutman, The energy of a graph, Ber. Math-Statist. Sekt. Forschungszentrum Graz. 103 (1978) 1–22.

[22] Abdussakir, R.R. Elvierayani, M. Nafisah, On the spectra of commuting and non commuting graph on dihedral group, Cauchy-Jurnal Mat. Murni dan Apl. 4 (2017) 176–182.

[23] B. Zhou, I. Gutman, On Laplacian energy of graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 57 (2007) 211–220.

[24] M. Lazić, On the Laplacian energy of a graph, Czechoslov. Math. J. 56 (2006) 1207–1213.

[25] C. Adiga, M. Smitha, On maximum degree energy of a graph, Int. J. Contemp. Math. Sci. 4 (2009) 385–396.

[26] I. Gutman, S. Wagner, The matching energy of a graph, Discret. Appl. Math. 160 (2012) 2177–2187.

[27] K.C. Das, A.D. Güngör, A.S. Cevik, On Kirchhoff index and resistance-distance energy of a graph, Match-Communications Math. Comput. Chem. 67 (2012) 541.

[28] I. Gutman, On graphs whose energy exceeds the number of vertices, Linear Algebra Appl. 429 (2008) 2670–2677.

[29] I. Gutman, D. Kiani, M. Mirzakhah, B. Zhou, On incidence energy of a graph, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 1223–1233.

[30] H.S. Ramane, D.S. Revankar, I. Gutman, S.B. Rao, B.D. Acharya, H.B. Walikar, Bounds for the distance energy of a graph, Kragujev. J. Math. 31 (2008) 59–68.

[31] S. Pirzada, H.A. Ganie, On the Laplacian eigenvalues of a graph and Laplacian energy, Linear Algebra Appl. 486 (2015).

[32] S. Akbari, E. Ghorbani, Choice number and energy of graphs, Linear Algebra Appl. 429 (2008) 2687–2690.

[33] A.D. Güngör, A.S. Cevik, On the Harary energy and Harary Estrada index of a graph, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 64 (2010) 281–296.

[34] S. Meenakshi, S. Lavanya, A survey on energy of graphs, Ann. Pure Appl. Math. 8 (2014) 183–191.

[35] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, Spectra of graphs: Monograph, Springer, New York, 2011.