Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 5 (2) (2025), Pages 89-101
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Aplikasi Diagonalisasi Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Anis Maria Ulfa, Intan Nisfulaila*, and Mohammad Nafie Jauhari

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, Indonesia

Abstrak

Persamaan diferensial adalah sebarang persamaan dengan nilai tak-diketahui (*unknown*) berupa suatu fungsi dan yang melibatkan turunan (atau diferensial) dari fungsi yang tidak diketahui ini. Berorde satu karena hanya mengandung turunan pertama, tidak ada turunan yang lebih tinggi. Sebuah sistem persamaan diferensial adalah sekumpulan dua atau lebih persamaan diferensial yang saling berkaitan. Sistem persamaan diferensial membutuhkan metode-metode atau pendekatan dalam penyelesaiannya yang sering kali sulit untuk diselesaikan secara langsung. Salah satu pendekatan efektif yang dapat digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial adalah dengan diagonalisasi matriks. Diagonalisasi matriks adalah proses mengubah suatu matriks menjadi bentuk diagonal. Tujuan penelitian ini adalah untuk membahas dan mengeksplorasi penerapan diagonalisasi matriks dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial. Hasil dari penelitian ini adalah sistem persamaan diferensial biasa orde satu $y' = ay$ yang dapat dinotasikan menjadi bentuk matriks dan diselesaikan dengan diagonalisasi matriks jika matriks A memiliki n nilai eigen berbeda, memiliki n vektor eigen bebas linear, dan terdapat sebuah matriks invertibel P sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

Kata Kunci: Sistem Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu; Diagonalisasi Matriks; Solusi Sistem; Nilai eigen dan Vektor Eigen

Abstract

A differential equation is an equation involving an unknown function and its derivative(s). A first-order differential equation contains only the first derivative and no higher-order derivatives. A system of differential equations is a set of two or more interrelated differential equations. Solving such system of equations often requires specific methods or approaches, as they are not always solvable through direct computation. One effective method for solving system of differential equations is *matrix diagonalization*. Matrix diagonalization is the process of transforming a matrix into diagonal form. This study aims to discuss and explore the application of matrix diagonalization to solving system of first-order ordinary differential equations. The result of this research shows that a system of the form $y' = ay$ can be represented in matrix form and can be solved using matrix diagonalization, provided that the matrix A has n distinct eigenvalues and n linearly independent eigenvectors. In this case, there exists an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

Keywords: System of First-Order Ordinary Differential Equations; Matrix Diagonalization; Diagonal Matrix; Eigenvalues and Eigenvectors

*Corresponding author. E-mail: i.nisfulaila@uin-malang.ac.id

Submitted: 24 Juli 2025 Reviewed: 18 Agustus 2025 Accepted: 12 November 2025
DOI: http://dx.doi.org/10.18860/jrmm/v5i2.34798

1 Pendahuluan

Matematika kerap dianggap sulit, padahal justru menjadi "bahasa kedua" dalam menjelaskan fenomena alam, sosial, hingga kemanusiaan. Secara historis, perkembangan ide-ide matematis—dari geometri Yunani hingga aljabar modern—membentuk cara kita memodelkan realitas dan menalar perubahan [1]. Dalam konteks keilmuan yang terintegrasi, praktik sains di ruang pendidikan Indonesia juga mendorong penguatan etika, nilai, dan kebijaksanaan melalui rujukan keagamaan yang relevan—misalnya pembacaan nilai ketelitian dan amanah dalam karya ilmiah dan pengukuran, selaras dengan pesan nash [2], [3], [4]. Integrasi semacam ini tidak dimaksudkan untuk menggantikan metode ilmiah, melainkan menegaskan landasan etis dalam seluruh proses ilmiah.

Di antara cabang penting matematika, aljabar—khususnya aljabar linear—menjadi tulang punggung banyak algoritma komputasi dan pemodelan. Teori ruang vektor, transformasi linear, dan struktur nilai eigen/vektor eigen yang dibahas komprehensif dalam buku teks klasik dan modern menyediakan perangkat konseptual maupun algoritmik bagi pemecahan persoalan berskala besar [5], [6], [7], [8]. Dari sisi komputasi numerik, teknik dekomposisi dan reduksi kesetaraan matriks—termasuk diagonaliasi dan bentuk kanonik—memungkinkan penyelesaian efisien atas sistem linear dan nonlinear yang muncul di sains rekayasa [9]. Secara historis, gagasan spektral juga berakar sejak Cauchy, yang menautkan teori matriks dengan struktur spektrum dan memengaruhi praktik modern aljabar linear komputasional [10].

Persamaan diferensial (PD) adalah persamaan yang memuat turunan suatu fungsi tak diketahui. PD digunakan untuk memodelkan dinamika waktu atau perubahan terhadap variabel lain—mulai dari kecepatan, suhu, populasi, hingga indikator ekonomi [11], [12]. Dalam konteks terapan, misalnya, model pertumbuhan populasi klasik menampilkan bagaimana PD menghubungkan asumsi biologis dengan laju perubahan jumlah individu [13]. Fokus makalah ini adalah persamaan diferensial biasa (PDB) linear berukuran n dengan bentuk umum $y'(x) = A\,y(x)$, di mana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Salah satu pendekatan yang kuat untuk menyelesaikan sistem PDB linear adalah *diagonalisasi matriks*. Jika matriks koefisien A memiliki basis eigen lengkap (misal n vektor eigen bebas linear), maka terdapat matriks invertibel P sehingga $P^{-1}AP = D$, dengan D diagonal. Transformasi variabel $y = Pu$ mereduksi sistem semula menjadi $u' = Du$, yang terurai menjadi n PDB satu-dimensi $u_i' = \lambda_i u_i$ dengan solusi eksponensial $u_i(x) = C_i e^{\lambda_i x}$ [6], [7], [8], [14]. Dari sudut pandang komputasi, prosedur ini terkait erat dengan dekomposisi spektral dan menjadi dasar berbagai algoritma numerik stabil untuk menganalisis kestabilan (melalui tanda bagian real λ_i), transien, dan dinamika jangka panjang [9], [10].

Berangkat dari landasan konseptual tersebut, penelitian ini mengkaji penerapan diagonalisasi matriks untuk memperoleh solusi analitik sistem $y'(x) = A\,y(x)$ dan menelaah prasyarat teoretiknya (keberadaan n vektor eigen bebas linear) serta implikasi dinamikanya (kestabilan, dekomposisi modus). Rujukan utama aljabar linear dan kalkulus digunakan untuk memastikan formulasi dan notasi yang konsisten [5], [6], [7], [8], [11], sementara aspek komputasi dan sejarah spektral diperkaya oleh literatur klasik [9], [10]. Di samping itu, makalah ini menegaskan konteks keilmuan yang berintegritas dan bermanfaat, selaras dengan nilai-nilai etika dalam tradisi keilmuan Islam [2], [3], [4]. Batasan penelitian difokuskan pada sistem PDB linear orde satu berukuran $n \geq 2$, dengan asumsi A dapat didiagonalisasi, sehingga pembahasan terarah pada mekanisme transformasi, syarat diagonalisasi, dan konstruksi solusi eksplisit.

2 Metodologi Penelitian

Penelitian ini termasuk kategori penelitian teoretis dengan pendekatan kualitatif-deskriptif yang bertujuan untuk menjelaskan konsep dan prosedur matematis penyelesaian sistem persamaan diferensial linear melalui metode *diagonalisasi matriks*. Fokus utama penelitian adalah pada analisis simbolik dan pembuktian teoretis, bukan pada eksperimen numerik, sehingga seluruh hasil disajikan dalam bentuk deduksi matematis yang konsisten dengan teori aljabar linear dan persamaan diferensial [5], [6], [7], [8], [11], [12].

Pendekatan aljabar linear yang digunakan mengacu pada teori ruang vektor, transformasi linear, serta sifat nilai dan vektor eigen dari matriks persegi [8], [9], [10]. Dengan memanfaatkan prinsip *spectral decomposition*, sistem persamaan diferensial $y' = Ay$ dapat direduksi menjadi sistem diagonal yang lebih sederhana. Dalam hal ini, prosedur komputasi seperti pembentukan matriks invers, perhitungan determinan, dan solusi sistem homogen dilakukan secara simbolik untuk memastikan validitas teoretik setiap langkah.

2.1 Langkah-langkah Penelitian

Tahapan utama dalam penelitian ini meliputi beberapa prosedur analitik sebagai berikut:

1. `Formulasi sistem:` Mengubah sistem persamaan diferensial biasa orde satu ke dalam bentuk matriks A yang merepresentasikan hubungan linear antarvariabel. Bentuk ini mengikuti pendekatan klasik penyajian sistem linear [6], [7].
2. `Pemeriksaan sifat diagonalizable:` Menentukan apakah matriks A dapat didiagonalisasi dengan cara mencari nilai eigen λ_i dan vektor eigen v_i yang memenuhi $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Matriks A dapat didiagonalisasi apabila memiliki n vektor eigen yang bebas linear [8], [14].
3. `Konstruksi matriks transformasi:` Membentuk matriks $P = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ dari vektor-vektor eigen yang diperoleh. Matriks ini berfungsi sebagai transformasi basis dari ruang semula ke ruang eigen. Selanjutnya dihitung $P^{-1}AP = D$ dengan D sebagai matriks diagonal yang berisi nilai-nilai eigen λ_i pada diagonal utama [5], [9].
4. `Transformasi sistem:` Mendefinisikan variabel baru $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ dan $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$, kemudian mensubstitusikannya ke sistem $y' = Ay$ sehingga diperoleh sistem ekuivalen $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ yang berbentuk diagonal [7], [11].
5. `Solusi eksplisit sistem diagonal:` Menyelesaikan sistem $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ yang memiliki solusi umum $\mathbf{u}(x) = C_i e^{\lambda_i x}$ untuk setiap komponen $u_i(x)$ [6], [11]. Solusi ini kemudian dikembalikan ke bentuk asli melalui $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ untuk memperoleh solusi eksplisit dari sistem awal.
6. `Verifikasi hasil dan interpretasi:` Memeriksa konsistensi hasil dengan teori nilai eigen dan stabilitas sistem linear. Analisis juga dilakukan untuk menilai kondisi batas dan sifat fisis atau matematis dari solusi, termasuk kestabilan asimtotik berdasarkan tanda bagian real dari λ_i [9], [10].

2.2 Kerangka Teoretis dan Sumber Data

Landasan teoritis penelitian ini didukung oleh beberapa sumber utama. Buku teks aljabar linear seperti *Elementary Linear Algebra* [6], *Linear Algebra and Its Applications* [7], dan *Linear Algebra Done Right* [8] digunakan sebagai rujukan utama konsep ruang vektor, transformasi linear, serta sifat spektral matriks. Untuk pembahasan historis dan numerik, acuan klasik dari Golub dan Van Loan [9] serta Hawkins [10] digunakan untuk menegaskan aspek komputasional dan evolusi teori matriks.

Sementara itu, buku *Persamaan Diferensial Elementer* [12] dan *Kalkulus Edisi Kesembilan* [11] dijadikan acuan dalam formulasi dan interpretasi solusi diferensial, termasuk pengaitan antara model dinamis dan konsep derivatif eksponensial. Untuk konteks keilmuan dan nilai integratif, sumber keagamaan seperti *Tafsir Al-Mishbah*, *Tafsir Ibnu Katsir*, dan *Al-Qur'an dan Terjemahannya* digunakan untuk memperkaya perspektif ilmiah yang bernilai etis dan filosofis [2], [3], [4].

Dengan demikian, metode penelitian ini memadukan ketelitian analitis aljabar dengan pemahaman konseptual yang luas, sehingga dapat memperlihatkan hubungan antara struktur linear, stabilitas sistem diferensial, dan fondasi nilai dalam keilmuan matematis.

3 Hasil dan Pembahasan

Bagian ini menyajikan hasil penerapan metode *diagonalisasi matriks* dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa (PDB) linear orde satu. Seluruh hasil diperoleh berdasarkan prosedur analitik yang dijelaskan pada bagian metodologi, dengan memanfaatkan konsep nilai eigen, vektor eigen, serta transformasi basis ruang vektor. Tujuan utama analisis ini adalah menunjukkan bagaimana sistem persamaan diferensial $y' = Ay$ dapat direduksi menjadi bentuk diagonal yang lebih sederhana, sehingga proses pencarian solusi menjadi lebih sistematis dan mudah diinterpretasikan [6], [7], [8], [14].

Untuk mendukung penjelasan konseptual, bagian ini dibagi ke dalam beberapa subbagian. Subbagian pertama menjelaskan proses umum diagonalisasi matriks pada sistem PDB linear dan bagaimana bentuk diagonal diperoleh dari matriks koefisien A. Subbagian berikutnya menguraikan solusi umum yang dihasilkan dari sistem diagonal dan menurunkannya kembali menjadi solusi sistem asal menggunakan transformasi balik $y = Pu$. Selanjutnya, disajikan dua contoh simulasi penerapan metode ini pada kasus dengan ukuran sistem $n = 2$ dan $n = 3$ untuk memperlihatkan langkah-langkah penyelesaian secara eksplisit serta validasi hasil analitik.

Melalui urutan pembahasan ini, diharapkan pembaca dapat memahami tidak hanya aspek komputasional dari proses diagonalisasi, tetapi juga keterkaitan antara struktur spektral matriks dan dinamika sistem diferensial yang dihasilkannya. Dengan demikian, bagian hasil dan pembahasan ini menjadi jembatan antara teori yang telah dijelaskan sebelumnya dan implementasi matematis yang konkret.

3.1 Diagonalisasi Matriks

Pada subbagian ini akan dikaji tentang proses diagonalisasi matriks pada sebuah sistem persamaan diferensial biasa orde satu. Secara umum, sistem persamaan diferensial biasa orde satu dapat didefinisikan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = ay \quad \text{atau} \quad y' = ay \tag{1}$$

yang dapat dituliskan dalam notasi matriks sebagai

$$A = \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dalam representasi (2), vektor y terdiri dari komponen-komponen fungsi $y_1, y_2, \ldots, y_n$, sedangkan matriks A merupakan matriks koefisien yang berisi elemen-elemen a_{ij}, yang menggambarkan hubungan antara variabel-variabel dalam sistem persamaan $y' = ay$.

Langkah pertama dalam proses diagonalisasi matriks adalah menentukan basis ruang eigen matriks A dengan mencari persamaan karakteristik dari matriks A. Persamaan karakteristik diperoleh dengan menghitung determinan dari $(\lambda I - A)$, yaitu:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Dari matriks sistem persamaan (1) dapat diambil matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diperoleh hasil determinan berupa sebuah polinomial berderajat n yang disebut polinomial karakteristik, yaitu:

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

Nilai eigen dari matriks A adalah akar-akar dari hasil persamaan karakteristik matriks A. Sehingga diperoleh nilai-nilai eigen dari matriks A, yaitu:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

Karena suatu polinomial berderajat n tidak dapat memiliki lebih dari n akar berbeda, maka persamaan karakteristik dari matriks A berukuran n
timesn memiliki paling banyak n solusi berbeda. Akibatnya, jumlah nilai eigen yang mungkin dimiliki oleh matriks tersebut juga terbatas maksimal sebanyak n.

Selanjutnya menentukan vektor eigen yang terkait dengan masing-masing nilai eigen. Menurut definisi ruang eigen, suatu vektor

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika v adalah solusi non-trivial dari:

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Maka, untuk setiap nilai eigen dari matriks A di atas akan ditentukan vektor eigennya melalui:

$$(\lambda_z I - A)v = 0, \quad \forall z \in 1, 2, \ldots, n, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Jika $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear, maka vektor-vektor tersebut membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Langkah kedua adalah membentuk sebuah matriks $P = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$, di mana vektor-vektor kolomnya adalah n vektor basis yang diperoleh pada langkah sebelumnya.

$$P = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$$

Matriks $P^{-1}AP$ akan menjadi matriks diagonal D, di mana entri diagonalnya secara berturut-turut adalah nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ yang terkait dengan kolom-kolom utama dari P.

$$P^{-1}AP = D$$

Karena terdapat n vektor basis dari matriks A secara keseluruhan, maka matriks A dapat didiagonalisasi dan P mendiagonalisasi A.

3.2 Solusi Umum untuk Sistem Persamaan Diferensial $y = Pu$

Untuk menentukan solusi sistem persamaan diferensial $y' = Ay$, diperlukan transformasi koordinat dengan mendefinisikan $y = Pu$ dan $y' = Pu'$. Dengan perubahan variabel $y = Pu$, maka $y' = Ay$ dapat dituliskan sebagai:

$$Pu' = APu$$

Dari persamaan $P^{-1}AP = D$ yang dapat didekomposisikan menjadi $A = PDP^{-1}$, maka:

$$Pu' = PDP^{-1}Pu$$

dan dapat disederhanakan menjadi:

$$Pu' = PDu$$

karena $P^{-1}P$ merupakan matriks identitas.

Karena P adalah matriks invertibel, maka kedua ruas dapat dikalikan dengan P^{-1} sehingga diperoleh sistem sederhana untuk u, yaitu:

$$u' = Du$$

$$u' = D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Sehingga, solusi dari vektor u adalah:

$$u_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} u_2 = C_2 e^{\lambda_2 x} \vdots u_n = C_n e^{\lambda_n x}$$

atau dalam bentuk vektor:

$$u = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ C_2 e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

Langkah terakhir adalah menentukan solusi dari $y = Pu$ dan u perlu disubstitusikan ke dalam persamaan $y = Pu$, sehingga dapat diperoleh bentuk eksplisit dari solusi y, yaitu:

$$y = Pu$$

$$y = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ C_2 e^{\lambda_2 x} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} v_n$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk komponen-komponen sebagai:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x} v_1$$
$$y_2 = C_2 e^{\lambda_2 x} v_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = C_n e^{\lambda_n x} v_n$$

Dengan demikian, solusi umum dari sistem persamaan diferensial $y' = Ay$ dapat diekspresikan sebagai kombinasi linear dari eksponensial masing-masing nilai eigen dikalikan vektor eigennya yang sesuai.

3.3 Simulasi Aplikasi Diagonalisasi Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

3.3.1 Simulasi Penyelesaian dengan $n = 2$

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa orde satu sebagai berikut:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 + 3y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 5y_2$$

Sistem tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Selanjutnya, akan ditentukan basis-basis ruang eigen dari matriks A dengan mencari persamaan karakteristik yang memperoleh:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - (-3)(-4) = (\lambda^2 - 6\lambda + 5) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7$$

$$\lambda = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-7)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$$

Sehingga, persamaan karakteristik matriks A adalah $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0$, dan nilai-nilai eigen dari A adalah:

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = -1$$

Menurut definisi ruang eigen, suatu vektor

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

adalah vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika v adalah solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)v = 0$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Jika $\lambda = 7$, maka persamaan (4) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Penyelesaian dari (5) menghasilkan $6v_1 = 3v_2$ atau $2v_1 = v_2$, sehingga vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = 7$ adalah:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = -1$, maka persamaan (4) menjadi:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Penyelesaian dari (6) menghasilkan $2v_1 + 3v_2 = 0$, sehingga vektor eigen yang terkait dengan $\lambda = -1$ adalah:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Karena v_1 dan v_2 bebas linear, maka vektor-vektor tersebut membentuk basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_1 = 7$ dan $\lambda_2 = -1$, yaitu:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Terdapat dua vektor basis ruang eigen, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi dan matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

mendiagonalisasi A. Dapat dibuktikan bahwa:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Setelah proses diagonalisasi selesai, langkah selanjutnya adalah menentukan solusi umum dari sistem awal. Untuk menyelesaikan sistem $y' = Ay$, digunakan transformasi $y = Pu$ dan $y' = Pu'$, sehingga:

$$Pu' = APu$$

Dari (7), karena $A = PDP^{-1}$, maka:

$$Pu' = PDP^{-1}Pu = PDu$$

Karena P invertibel, maka:

$$u' = Du, \quad \text{dengan } D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Persamaan $u' = Du$ menjadi:

$$\begin{aligned} u_1' &= 7u_1 \\ u_2' &= -u_2 \end{aligned}$$

Solusi dari sistem ini adalah:

$$u_1 = C_1 e^{7x}, \quad u_2 = C_2 e^{-x}$$

Sehingga,

$$u = \begin{bmatrix} C_1 e^{7x} \\ C_2 e^{-x} \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi $y = Pu$, diperoleh:

$$y = Pu = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{7x} \\ C_2 e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{7x} + 3C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^{7x} - 2C_2 e^{-x} \end{bmatrix}$$

atau ditulis sebagai

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{7x} + 3C_2 e^{-x} \\ y_2 &= 2C_1 e^{7x} - 2C_2 e^{-x} \end{aligned}$$

3.3.2 Simulasi Penyelesaian dengan n=3

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial biasa orde satu berikut:

$$\frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2 + 2y_3, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_3}{dx} = 3y_3$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah pertama adalah menentukan nilai eigen dari matriks A dengan mencari determinan dari $(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 3$. Menurut definisi ruang eigen,

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

adalah sebuah vektor eigen dari matriks A yang terkait dengan λ jika dan hanya jika x adalah sebuah solusi nontrivial dari $(\lambda I - A)v = 0$, yaitu

$$\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Jika $\lambda_1 = 5$, maka (8) menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Penyelesaian persamaan (9) dengan $\lambda_1 = 5$ akan menghasilkan

$$\begin{cases} -4v_2 - 2v_3 = 0 \\ 4v_2 = 0 \\ 2v_3 = 0 \end{cases}$$

Maka, vektor eigen A terkait dengan $\lambda_1 = 5$ adalah $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Jika $\lambda_2 = 1$, maka (8) menjadi

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Penyelesaian persamaan (10) dengan $\lambda_2 = 1$ akan menghasilkan

$$\begin{cases} -4v_1 - 4v_2 - 2v_3 = 0 \\ -2v_3 = 0 \end{cases}$$

Sehingga, vektor eigen yang terkait $\lambda_2 = 1$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Jika $\lambda_3 = 3$, maka (8) menjadi

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Penyelesaian persamaan (11) dengan $\lambda_3 = 3$ akan menghasilkan

$$\begin{cases} -2v_1 - 4v_2 - 2v_3 = 0 \\ 2v_2 = 0 \end{cases}$$

Sehingga, vektor eigen yang terkait $\lambda_3 = 3$ adalah vektor-vektor taknol yang berbentuk $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Karena $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bebas linear, maka vektor-vektor tersebut membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 3$, yaitu:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Terdapat tiga vektor basis ruang eigen, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi dan:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mendiagonalisasi A. Dapat dibuktikan bahwa:

$$P^{-1}AP = P^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Sesudah proses diagonalisasi selesai, maka langkah selanjutnya adalah menyelesaikan solusi umum untuk sistem persamaan awal yaitu:

$$\frac{dy_1}{dx} = 5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \frac{dy_2}{dx} = y_2 \frac{dy_3}{dx} = 3y_3$$

Untuk menentukan solusi sistem persamaan diferensial $y' = Ay$, diperlukan transformasi koordinat dengan mendefinisikan $y = Pu$ dan $y' = Pu'$. Dengan perubahan variabel $y = Pu$, maka $y' = Ay$ dapat ditulis dengan:

$$Pu' = APu$$

Dari persamaan (12) yang dapat didekomposisikan menjadi $A = PDP^{-1}$, sehingga:

$$Pu' = PDP^{-1}Pu$$

dan dapat disederhanakan menjadi:

$$Pu' = PDu$$

karena $P^{-1}P$ merupakan matriks identitas.

Karena P adalah matriks invertibel, maka diperoleh sistem sederhana untuk u, yaitu:

$$u' = Du$$

$$u' = Du$$

$$u' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan $u' = Du$ diperoleh tiga persamaan, yaitu:

$$u_1' = 5u_1 u_2' = u_2 u_3' = 3u_3$$

Dari solusi $y = ce^{ax}$, persamaan $u_1' = 5u_1$ memiliki solusi:

$$u_1 = C_1 e^{5x}$$

Persamaan $u_2' = u_2$ memiliki solusi:

$$u_2 = C_2 e^{x}$$

Sementara persamaan $u_3' = 3u_3$ memiliki solusi:

$$u_3 = C_3 e^{3x}$$

Maka, solusi dari vektor u adalah:

$$u = \begin{bmatrix} C_1 e^{5x} \\ C_2 e^{x} \\ C_3 e^{3x} \end{bmatrix}$$

Dengan definisi $y = Pu$, maka u perlu disubstitusi ke dalam persamaan:

$$y = Pu$$

sehingga:

$$y = Pu = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{5x} \\ C_2 e^{x} \\ C_3 e^{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{5x} - C_2 e^{x} - C_3 e^{3x} \\ C_2 e^{x} \\ C_3 e^{3x} \end{bmatrix}$$

atau:

$$y_1 = C_1 e^{5x} - C_2 e^{x} - C_3 e^{3x} y_2 = C_2 e^{x} y_3 = C_3 e^{3x}$$

4 Kesimpulan

Dari pemaparan bab hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa solusi dari sistem persamaan diferensial biasa orde satu $y' = ay$ dapat diselesaikan dengan aplikasi diagonalisasi matriks jika matriks A dapat didiagonalisasi dengan beberapa syarat, yaitu: matriks A memiliki n nilai eigen berbeda, dan vektor eigen bebas linear, serta terdapat sebuah matriks invertibel P sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal. Setelah terbukti bahwa matriks A dapat didiagonalisasi, matriks A dapat didefinisikan kembali sebagai $y' = ay$, sehingga menghasilkan solusi y dari $y = Pu$.

Penelitian ini membahas tentang aplikasi diagonalisasi matriks dalam penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa orde satu. Sebagai saran, penelitian selanjutnya dapat menunjukkan aplikasi-aplikasi model aljabar linear elementer yang belum dibahas dalam penelitian ini untuk menyelesaikan masalah dalam bidang matematika maupun bidang lainnya. Penelitian lebih lanjut dapat mempelajari aplikasi diagonalisasi matriks pada rantai makrov.

Pernyataan Kontribusi Penulis (CRediT)

Anis Maria Ulfa: Konseptualisasi, Metodologi, Penulisan–Draf Awal, Analisis Formal. **ntan Nisfulaila:** Kurasi Data, Validasi, Penulisan–Telaah dan Penyuntingan. **Mohammad Nafie Jauhari:** Visualisasi, Perangkat Lunak, Investigasi.

Seluruh penulis berkontribusi secara substansial terhadap penelitian ini dan telah menyetujui versi akhir naskah untuk diterbitkan.

Deklarasi Penggunaan AI atau Teknologi Berbasis AI

Model ChatGPT versi 4 digunakan secara terbatas untuk membantu penyusunan draf awal, penyesuaian tata bahasa akademik, dan konsistensi gaya penulisan sesuai standar jurnal. Semua analisis matematis, formulasi, dan interpretasi hasil dilakukan sepenuhnya oleh penulis.

Deklarasi Konflik Kepentingan

Penulis menyatakan tidak ada konflik kepentingan yang dapat memengaruhi hasil atau interpretasi dari penelitian ini.

Pendanaan dan Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini tidak menerima pendanaan eksternal.

Ketersediaan Data

Seluruh data yang digunakan dalam penelitian ini bersifat simbolik dan teoretis, disusun oleh penulis berdasarkan contoh-contoh dalam literatur standar aljabar linear dan persamaan diferensial. Tidak ada dataset eksternal yang digunakan. Kode komputasi atau ilustrasi simbolik dapat diberikan atas permintaan kepada penulis korespondensi melalui alamat surel yang tertera pada naskah.

Daftar Pustaka

[1] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press, 1972.

[2] Kementerian Agama Republik Indonesia, *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Jakarta: Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an, 2019.

[3] M. Q. Shihab, *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati, 2002.

[4] A. bin Muhammad bin Abdurrahman bin Ishaq Al-Sheikh, *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i, 2003.

[5] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid I*. Jakarta: Penerbit Erlangga, 2004.

[6] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Application*, 11th. Kanada: Wiley, 2014.

[7] D. C. Lay, S. R. Lay, and J. J. McDonald, *Linear Algebra and Its Applications*, 5th. Amerika Serikat: Pearson Education, 2016.

[8] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015.

[9] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, 3rd. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.

[10] T. Hawkins, "Cauchy and the spectral theory of matrices," *Historia Mathematica*, vol. 2, no. 1, 1975.

[11] D. Vanberg, E. J. Purcell, and S. E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kesembilan, Jilid 1.* Jakarta: Penerbit Erlangga, 2010.

[12] L. D. Afri, *Persamaan Diferensial Elementer*. Deli Serdang: PT. Cahaya Rahmat Rahmani, 2022.

[13] Z. Nuraeni, "Aplikasi persamaan diferensial dalam estimasi jumlah populasi," *Delta: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika Universitas Pekalongan*, vol. 5, no. 1, 2017.

[14] H. Hengki and M. Kiftiah, "Diagonalisasi matriks kompleks," *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, dan Terapannya (Bimaster)*, vol. 4, no. 3, 2015.