Spektrum *Signless-Laplace* dan Spektrum *Detour* Graf Konjugasi dari Grup Dihedral

Abdussakir[1, a)] dan Rhoul Khasanah[1, b)]

[1]*Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang*

[a)]*email: sakir@mat.uin-malang.ac.id*
[b)]*email: rhoulkhasanah@gmail.com*

Abstrak

Misalkan G graf berhingga yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap. Matriks keterhubungan titik $A(G)$ dari graf G adalah matriks dengan entri $a_{ij} = 1$ jika v_i terhubung langsung dengan v_j dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya. Matriks derajat $D(G)$ dari graf G adalah matriks diagonal dengan entri d_{ii} merupakan derajat titik v_i di G. Matriks signless-Laplace dari graf G adalah $L^+(G) = D(G) + A(G)$. Matriks *detour* $DD(G)$ dari graf G adalah matriks dengan entri dd_{ij} merupakan panjang lintasan terpanjang dari v_i ke v_j. Spektrum dari suatu matriks merupakan matriks yang memuat nilai eigen pada baris pertama dan multiplisitas masing-masing nilai eigen pada baris kedua. Spektrum yang diperoleh dari matriks $L^+(G)$ disebut spektrum *signless-Laplace* sedangkan spektrum yang diperoleh dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum *detour.* Penelitian ini menyajikan rumus untuk menghitung spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil ($n \geq 5$) dan spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil ($n \geq 3$) dan n genap ($n \geq 6$).

Kata kunci: spektrum, graf konjugasi, matriks *signless-Laplace*, matriks *detour*, grup dihedral

Abstract

Let G be a finite graph without loops and multiple edges. The adjacency matrix $A(G)$ of graph G is a matrix where $a_{ij} = 1$ if v_i is adjacent with v_j and $a_{ij} = 0$ for the others. The degree matrix $D(G)$ of graph G is a diagonal matrix where d_{ii} is degree of v_i in G. The signless-Laplacian matrix of graph G is defined by $L^+(G) = D(G) + A(G)$. The detour matrix $DD(G)$ of graph G is a matrix where dd_{ij} is the length of longest path between v_i and v_j. The spectrum of matrix is a matrix that contains its eigenvalues in the first row and the algebraic multiplicity of each eigenvalue in the second row. The spectrum of matrix $L^+(G)$ is called signless-Laplacian spectrum of G and the spectrum of matrix $DD(G)$ is called detour spectrum of G. This study presents a formula for calculating the signless-Laplacian spectrum of conjugate graph of dihedral group D_{2n} for odd n ($n \geq 5$) and detour spectrum of conjugate graph of dihedral groups D_{2n} for odd n ($n \geq 3$) and even n ($n \geq 6$).

Keywords: spectrum, conjugate graph, signless-Laplacian matrix, detour matrix, dihedral group

Pendahuluan

Graf $G = (V, E)$ memuat himpunan berhingga V dan himpunan E. Himpunan V tidak boleh kosong dan anggotanya disebut titik dari G. Himpunan E boleh kosong dan anggotanya adalah pasangan tak berurutan dari unsur-unsur berbeda di V. Anggota himpunan E disebut sisi dari G. Kardinalitas V disebut order dari G sedangkan kardinalitas E disebut ukuran dari G [1]. Jika $e = (a, b) \in E$ maka titik a dan b disebut terhubung langsung [2]. Jika $a \in V$ maka banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan a disebut derajat dari a dan ditulis deg(a) [3].

Misalkan $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ adalah himpunan titik di graf G. Matriks keterhubungan $A(G)$ dari graf G adalah matriks berordo $p \times p$ dengan $a_{ij} = 1$ jika $(v_i, v_j) \in E$ dan $a_{ij} = 0$ untuk lainnya [2]. Matriks derajat $D(G)$ dari graf G adalah matriks diagonal berordo $p \times p$ dengan $d_{ii} = \deg(v_i)$. Matriks $L^{+}(G) = D(G) + A(G)$ disebut matriks *signless-Laplace* dari graf G [4].

Lintasan-v_1v_n pada graf G adalah barisan titik-titik berbeda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian hingga $(v_i, v_{i+1}) \in$ E, untuk i = 1, 2, .., n - 1. Graf G disebut graf terhubung jika untuk setiap dua titik berbeda u dan v di G selalu terdapat lintasan-uv di G [3]. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks detour $DD(G)$ dari G adalah matriks berordo $p \times p$ sedemikian hingga dd_{ij} adalah panjang lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G [5].

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda suatu matriks dari graf G dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas aljabar dari masing-masing λ_i. Matriks berordo $2 \times n$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G dan ditulis $Spec(G)$ [6]. Spektrum yang diperoleh dari matriks $L^{+}(G)$ disebut spektrum *signless Laplace* [7] dan dinotasikan dengan $\mathrm{spec}_{L+}(G)$ dan spektrum dari matriks $DD(G)$ disebut spektrum *detour* [5] dan dinotasikan dengan $\mathrm{spec}_{DD}(G)$.

Perkembangan terbaru dalam teori graf membahas graf yang diperoleh dari grup, misalnya graf konjugasi. Misalkan G grup tak komutatif. Unsur g dan h di G dikatakan saling konjugasi jika ada x di G sehingga $g = xhx^{-1}$. Graf konjugasi dari grup G adalah graf yang memuat semua anggota grup G sebagai titik dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika keduanya saling konjugasi [8]. Dengan kata lain, misalkan semua kelas konjugasi di G adalah $[e], [g_1], [g_2], \ldots, [g_n]$. Pada graf konjugasi dari grup G, unsur h akan terhubung langsung ke g_i jika $h \in [g_i]$ [9].

Beberapa penelitian mengenai spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* sudah dilakukan, misalnya [5,7,10-12]. Di lain pihak penelitian terkait graf konjugasi juga telah dilakukan, misalnya [8,9]. Meskipun demikian, belum ada yang mengkaji spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral. Oleh sebab itu, maka pada penelitian ini dikaji spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral.

Metode

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan. Penentuan rumus spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* dilakukan dengan mengkaji beberapa kasus pada grup dihedral. Langkah-langkah pencairan pola dilakukan dengan (1) menentukan klas konjugasi pada grup dihedral, (2) menggambar graf konjugasi, (3) menentukan matriks keterhubungan dan matriks derajat untuk memperoleh matriks *signless-Laplace* serta menentukan matriks *detour*, (4) menentukan polinomial karakteristik matriks *signless-Laplace* dan matriks *detour* serta menganalisis polanya, (5) menentukan spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour*, (6) menganalisis pola dari beberapa spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour*, dan (7) menyatakan pola yang diperoleh sebagai teorema dan dilengkapi dengan buktinya.

Hasil dan Diskusi

Berdasarkan pengamatan pada pola spektrum signless-Laplace graf konjugasi dari grup dihedral, maka diperoleh hasil sebagai berikut.

Teorema 1

Polinomial karakteristik matriks *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli ganjil n dan $n \geq 5$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - (n-2))^{n-1}(\lambda - (2n-2)).$$

Bukti

Diketahui grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Untuk n ganjil diperoleh kelas konjugasi $[1] = \{1\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, …, $\left[r^{\frac{n-1}{2}}\right] = \left\{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n-1}{2}+1}\right\}$, dan $[s] =$

$\{s, sr, sr^2, \dots sr^{n-1}\}$. Sesuai definisi graf konjugasi, maka unsur dalam satu kelas konjugasi akan saling terhubung langsung dan unsur dalam kelas konjugasi berbeda tidak akan saling terhubung langsung. Dengan demikian diperoleh matriks keterhubungan titik

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

dan matriks derajat

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Maka matriks *signless-Laplace* $L^+(\Gamma(D_{2n}))$ graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n ganjil adalah

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n-1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

KUBIK
Publikasi Ilmiah Matematika

Karena polinomial karakteristik dari $L^+(\Gamma(D_{2n}))$ tidak lain adalah $det(L^+(\Gamma(D_{2n}) - \lambda I))$ maka dengan mengeliminasi Gauss matriks $L^+(\Gamma(D_{2n}) - \lambda I)$ menjadi matriks segitiga atas akan diperoleh $det(L^+(\Gamma(D_{2n}) - \lambda I))$ sebagai perkalian semua entri pada diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Akhirnya diperoleh polinomial karakteristik dari $L^+(\Gamma(D_{2n}) - \lambda I)$ yaitu

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}\big(\lambda - (n-2)\big)^{n-1}\big(\lambda - (2n-2)\big). \ \blacklozenge$$

Teorema 2

Spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli ganjil n dan $n \geq 5$ adalah

$$Spec_{L^+}(\Gamma(D_{2n})) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 1, maka persamaan karakteristik matriks *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli ganjil n dan $n \geq 5$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda^{\frac{n+1}{2}}(\lambda-2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-2))^{n-1}(\lambda-(2n-2)) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu $\lambda_1 = 2n-2, \lambda_2 = n-2, \lambda_3 = 2,$ dan $\lambda_4 = 0$ dengan multiplisitas masing-masing adalah

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = n-1, m(\lambda_3) = \tfrac{n-1}{2}, \text{ dan } m(\lambda_4) = \tfrac{n+1}{2},$$

Sehingga diperoleh spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup D_{2n} untuk n ganjil dan $n \geq 5$, yaitu

$$Spec_{L^+}(D_{2n}) = \begin{bmatrix} 2n-2 & n-2 & 2 & 0 \\ 1 & n-1 & \frac{n-1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap belum dapat ditemukan polanya. Data yang ada menunjukkan bahwa ordo matriks spektrum *signless-Laplace*nya berubah-ubah.

Dari analisis pada beberapa matriks *detour* graf konjugasi dari grup dihedral diperolah hasil-hasil berikut.

Lemma 1

Panjang lintasan terpanjang antara dua titik pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli ganjil n dan n ≥ 3 dan $n \in N$ adalah

i. $n-1$ untuk titik sr^i dan sr^j, $i \neq j$ dan $1 \leq i, j < n$,

ii. 1 untuk titik r^i dan r^{n-i} $(1 \leq i < (n-1)/2)$,

iii. 0 untuk lainnya.

Bukti

Untuk n ganjil diperoleh kelas konjugasi dari grup dihedral adalah $[1] = \{1\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, …, $\left[r^{\frac{n-1}{2}}\right] = \left\{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n-1}{2}+1}\right\}$, dan $[s] = \{s, sr, sr^2, \dots sr^{n-1}\}$. Masing-masing kelas konjugasi tersebut akan membentuk graf komplit pada graf konjugasi. Selain itu, titik-titik dalam kelas konjugasi yang berbeda tidak terhubung langsung pada graf konjugasi. Akibatnya,

i. Panjang lintasan terpanjang dari sr^i ke sr^j dengan $i \neq j$ adalah $(n-1)$.

ii. Panjang lintasan terpanjang dari r^i ke r^{n-i} adalah 1.

iii. Untuk titik selain sr^i dan sr^j dengan $i \neq j$, serta r^i dan r^{n-i} tidak terhubung langsung, sehingga panjang lintasan terpanjangnya adalah 0. ♦

Berdasarkan Lemma 1, maka matriks *detour* $DD(\Gamma(D_{2n}))$ graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n ganjil sebagai berikut

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-2} \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & 0 & n-1 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

KUBIK Publikasi Ilmiah Matematika

Teorema 3

Polinomial karakteristik matriks *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli ganjil n dan $n \geq 3$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda + (n-1))^{n-1}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-1)^2)$$

Bukti

Menggunakan eleminasi Gauss pada matriks $DD(\Gamma(D_{2n}))$ - λI akan diperoleh matriks segitiga atas. Perkalian semua entri pada diagonal utama matriks segitigas atas tersebut adalah det($DD(\Gamma(D_{2n}))$ - λI). Karena polinomial karakteristik dari $DD(\Gamma(D_{2n}))$ tidak lain adalah det($DD(\Gamma(D_{2n}))$ - λI) maka diperoleh polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = (\lambda + (n-1))^{n-1}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-1)^2). \blacklozenge$$

Teorema 4

Spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli ganjil n dan $n \geq 3$ adalah

$$Spec_{DD}(\Gamma(D_{2n})) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \dfrac{n-1}{2} & 1 & \dfrac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan Teorema 3, maka persamaan karakteristik matriks *detour* $DD(\Gamma(D_{2n}))$ adalah

$$p(\lambda) = (\lambda + (n-1))^{n-1}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)(\lambda-1)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-(n-1)^2) = 0$$

Maka diperoleh nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = (n-1)^2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1, \text{ dan } \lambda_5 = -(n-1)$$

dan multiplisitas masing-masing nilai eigen yaitu

$$m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = \tfrac{n-1}{2}, m(\lambda_3) = 1, m(\lambda_4) = \tfrac{n-1}{2}, \text{ dan } m(\lambda_5) = n-1$$

Jadi

$$Spec_{DD}(\Gamma(D_{2n})) = \begin{bmatrix} (n-1)^2 & 1 & 0 & -1 & -(n-1) \\ 1 & \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} & n-1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Lemma 2

Panjang lintasan terpanjang antara dua titik pada graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $n > 5$ adalah

i. $\frac{n}{2} - 1$ untuk titik sr^i dan sr^j, $i \neq j$, i ganjil dengan j ganjil dan i genap dengan j genap,

ii. 1 untuk titik r^i dan r^{n-i},

iii. 0 untuk lainnya.

Bukti

Misalkan $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ adalah grup dihedral dengan n genap dan n > 5. Maka kelas konjugasi yang terbentuk adalah [1] = {1}, $[r^{n/2}] = \{r^{n/2}\}$, $[r] = \{r, r^{n-1}\}$, $[r^2] = \{r^2, r^{n-2}\}$, ..., $[r^{n/2-1}] = \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$, $[s] = \{s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$, dan $[sr] = \{sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$. Karena masing-masing kelas konjugasi akan membentuk graf komplit dan titik-titik dalam kelas konjugasi berbeda tidak saling terhubung langsung, maka diperoleh lintasan terpanjang antara

i. titik sr^i dan sr^j, $i \neq j$, i ganjil dengan j ganjil dan i genap dengan j genap, adalah $\frac{n}{2} - 1$.

ii. titik r^i dan r^{n-i} adalah 1.

iii. titik-titik lainnya adalah 0. ♦

Teorema 5

Polinomial karakteristik matriks *detour* graf konjugasi dari dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli genap n dan $n \geq 6$ adalah

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \left(\tfrac{n}{2} - 1\right)\right)^{n-2} (\lambda+1)^{\frac{n}{2}-1}(\lambda^2)(\lambda-1)^{\frac{n}{2}-1}\left(\lambda - \left(\tfrac{n}{2}-1\right)^2\right)^2.$$

Bukti

Berdasarkan Lemma 2, maka matriks *detour* $DD(\Gamma(D_{2n}))$ graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 6$ sebagai berikut.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{\frac{n}{2}-1} & r^{\frac{n}{2}} & r^{\frac{n}{2}+1} & \cdots & r^{n-2} & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-2} & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{\frac{n}{2}-1} \\ r^{\frac{n}{2}} \\ r^{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ r^{n-2} \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-} \\ sr^{n-} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{n}{2}-1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{2}-1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & 0 & \frac{n}{2}-1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Menggunakan eliminasi Gauss untuk menghitung det($DD(\Gamma(D_{2n}))$ - λI) akan diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)^{n-2} (\lambda + 1)^{\frac{n}{2}-1} (\lambda^2) (\lambda - 1)^{\frac{n}{2}-1} \left(\lambda - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right)^2 . \blacklozenge$$

Teorema 6

Spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk bilangan asli genap n dan $n \geq 6$ adalah

$$Spec_{DD(D_{2n})} = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2} - 1\right) \\ 2 & \frac{n}{2} - 1 & 2 & \frac{n}{2} - 1 & n - 2 \end{bmatrix}$$

Bukti

KUBIK Publikasi Ilmiah Matematika

Dari Teorema 5 diperoleh persamaan karakteristik matriks *detour* berikut

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)^{n-2} (\lambda + 1)^{\frac{n}{2}-1} (\lambda^2) (\lambda - 1)^{\frac{n}{2}-1} \left(\lambda - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right)^2 .$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1, \text{dan } \lambda_5 = -\left(\frac{n}{2} - 1\right)$$

dan multiplisitas masing-masing nilai eigen adalah

$$m(\lambda_1) = n - 2, m(\lambda_2) = \frac{n}{2} - 1, m(\lambda_3) = 2, m(\lambda_4) = \frac{n-1}{2}, \text{dan } m(\lambda_5) = 2$$

Maka spektrum *detour* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 6$ adalah

$$Spec_{DD}(\Gamma(D_{2n})) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 & 1 & 0 & -1 & -\left(\frac{n}{2} - 1\right) \\ 2 & \frac{n}{2} - 1 & 2 & \frac{n}{2} - 1 & n - 2 \end{bmatrix} . \blacklozenge$$

Kesimpulan

Hasil penelitian ini adalah rumus untuk menghitung spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* dari grup dihedral D_{2n}. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan untuk menentukan spektrum *signless-Laplace* graf konjugasi dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap atau menentukan spektrum *signless-Laplace* dan spektrum *detour* graf konjugasi dari grup yang lain.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang atas bantuan dana untuk penelitian ini.

Referensi

[1] Abdussakir, N. N. Azizah, and F. F. Nofandika, *Teori graf: Topik dasar untuk tugas akhir/skripsi*. Malang: UIN Malang Press, 2009.

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs and digraphs*, 6th ed. Florida: CRC Press, 2016.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, “Graph theory.” Springer, New York, 2008.

[4] A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Graph spectrum*. 2012.

[5] S. K. Ayyaswamy and S. Balachandran, “On detour spectra of some graphs,” *Int. J. Math. Comput. Phys. Electr. Comput. Eng.*, vol. 4, no. 7, pp. 1038–1040, 2010.

[6] N. Biggs, *Algebraic graph theory*, 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1993.

[7] Abdussakir, R. R. Elvierayani, and M. Nafisah, “On the spectra of commuting and non commuting graph on dihedral group,” *Cauchy-Jurnal Mat. Murni dan Apl.*, vol. 4, no. May, pp. 176–182, 2017.

[8] Abdussakir, “Spektrum graf konjugasi dan komplemen graf konjugasi dari grup dihedral,” *Pros. Semin. Nas. Teknol. Informasi, Komun. dan Ind. 9*, pp. 670–674, 2017.

[9] A. Erfanian and B. Tolue, “Conjugate graphs of finite groups,” *Discret. Math. Algorithms Appl.*, vol. 4, no. 2, pp. 1–8, 2012.

[10] S.-Y. Cui and G.-X. Tian, “The spectra and the signless Laplacian spectra of graphs with pockets,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 315, pp. 363–371, 2017.

[11] S. R. Jog and R. Kotambari, “On the adjacency, Laplacian, and signless Laplacian spectrum of coalescence of complete graphs,” *J. Math.*, vol. 2016, pp. 1–11, 2016.

[12] S. Y. Cui and G. X. Tian, “The spectrum and the signless Laplacian spectrum of coronae,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 437, no. 7, pp. 1692–1703, 2012.

KUBIK
Publikasi Ilmiah Matematika