Jurnal Riset Mahasiswa Matematika
Volume 1(1) (2021), Pages 40-46
p-ISSN: 2808-1552; e-ISSN: 2808-4926

Model Matematika Kurva Kuartik Bezier Hasil Modifikasi Kubik Bezier

Juhari

[1] Dosen Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Email: juhari@uin-malang.ac.id

ABSTRAK

Industri kreatif menjadi perhatian pemerintah untuk berkontribusi dalam pertumbuhan ekonomi. Namun karena minimnya daya tarik dan kreativitas seni, maka perkembangan industri kreatif di bidang kerajinan tidak maksimal. Sehingga diperlukan variasi item relief untuk meningkatkan daya tarik. Pada umumnya desain objek industri masih terbatas pada objek geometri ruang atau kurva Bezier derajat dua. Oleh karena itu, kurva derajat Bezier dipilih dan dimodifikasi menjadi bentuk Bezier kuartik untuk kemudian diterapkan pada desain benda-benda industri (barang pecah belah). Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan formula quartic bezier dari modifikasi qubic bezier dan untuk menentukan bentuk permukaan putar dari quartic bezier dari modifikasi cubic bezier. Kemudian, dari beberapa bentuk permukaan putar dari Bezier kubik yang dimodifikasi, desain barang pecah belah dihasilkan. Hasil dari penelitian ini adalah, pertama, rumus kuartik Bezier hasil modifikasi kubik Bezier. Kedua, bentuk permukaan putar Bezier kubik termodifikasi yang dipengaruhi oleh lima titik kontrol $P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}, P_3$ dan pemilihan parameter $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$. Untuk Penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan modifikasi Bezier kubik menjadi Bezier derajat-n

Kata kunci: Bezier kubik; modifikasi; Bezier kuartik; pemodelan

ABSTRACT

The creative industries have become the government's attention for contributing to economic accretion. But due the lack of artistic creativity and appeal, the evolution of creative industries craft section is not optimal. So that it was needed a variations of relief items to increase the attractiveness. In general, industrial objects design are still limited to the space geometry objects or a Bezier curve of degree two. Therefore, Bezier curves of degree is selected and modified it into a quartic Bezier forms and then applied to the design of industrial objects (glassware). The purpose of this research is to determine the formula of quartic Bezier from of qubic Bezier modifications and to determine the rotary surface shape of quartic Bezier from cubic Bezier modifications. Then, from some form of revolving surface of modified cubic Bezier the glassware designs are generated. The results of this research are, first, the formula of quartic Bezier result of Bezier cubic modifications. Second, the form of revolving surface of modified cubic Bezier which is influenced by five control points $P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}, P_3$ and parameter selection $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$. For further Research it is expected to develop a modification of cubic Bezier into Bezier of degree-n

Keywords: cubic Bezier; modification; quartic Bezier; modeling

PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu ilmu matematika yang membahas tentang bentuk, ukuran, posisi suatu benda, baik benda ruang maupun bidang. Pada perkembangannya,

Submitted: 24 September 2021 Reviewed: 27 September 2021 Accepted: 20 Oktober 2021
DOI: https://doi.org/10.18860/jrmm.v1i1.13703

geometri terdiri dari geometri ruang dan geometri bidang. Penggabungan kedua geometri tersebut dapat dimanfaatkan dalam desain benda. Menurut [1], kurva Bezier merupakan kurva berbasis polinomial yang sering dimanfaatkan untuk merancang benda dan membentuk permukaan benda. Kurva Bezier adalah standar ideal untuk mewakili kurva polinomial yang lebih kompleks. Penelitian sebelumnya telah dibahas kurva kuadratik Bezier yang dimanfaatkan untuk mendesain benda [2]. Namun terdapat masalah yaitu kurangnya variasi kelengkungan kurva dan desain benda terbatas pada benda geometri ruang tertentu. Penerapan kurva Bezier karakter simetrik dan putar pada model kap lampu duduk dengan menggunakan Maple 13 yang dilakukan oleh Juhari [3]. Pada penelitian tersebut dibahas kurva kuadratik Bezier yang diaplikasikan ke dalam komponen-komponen desain kap lampu duduk. Dihasilkan bentuk kap lampu yang utuh dan tergabung secara kontinyu. Namun tidak ada modifikasi kurva ke dalam bentuk kurva berderajat yang lebih tinggi. Sehingga kurangnya variasi kelengkungan kurva dan desain hanya terbatas pada benda-benda geometri ruang tertentu. Wahyudi [4] telah melakukan penelitian tentang perancangan objek-objek industri dengan benda putar yang diimplementasikan untuk desain vas bunga, gelas, kendi, ataupun knop. Kekurangannya adalah permukaan putar yang diperoleh pada penelitian tersebut umumnya mempunyai permukaan lengkung tunggal dan datar sehingga variasi bentuk yang diperoleh kurang beragam. Selain itu, Roifah [5] telah melakukan penelitian tentang modelisasi knop atau *handle* dengan menggunakan penggabungan benda tabung, prisma segienam beraturan, dan permukaan putar. Kelebihannya adalah adanya modifikasi kurva selimut tabung menggunakan bentuk kurva kuadratik Hermit dan Bezier sehingga menghasilkan kreasi model knop yang lebih mudah dan variatif. Kekurangannya adalah fabrikasi knop hanya dilakukan pada benda geometri ruang berupa tabung dan prisma segienam. Selain itu, relief knop yang ditawarkan harus dimodifikasi kembali pada permukaan putar kurvanya. Arinda [6] telah melakukan penelitian tentang konstruksi vas bunga melalui penggabungan beberapa benda geometri ruang. Kelebihannya adalah mendapatkan bentuk vas bunga yang bervariatif melalui konstruksi bangun-bangun ruang seperti prisma, limas, atau keratan tabung. Kelemahannya adalah pembuatan vas bunga hanya dengan mengkonstruksi bangun ruang prisma, limas, atau keratan tabung.

Sehubungan dengan persoalan tersebut, diperlukan pengembangan kurva kuadratik Bezier kedalam derajat lebih tinggi dengan penambahan modifikasi kurva untuk memberikan variasi kelengkungan kurva yang dapat dimanfaatkan untuk modelisasi benda industri (pecah belah). Dalam penelitian ini, lebih lanjut dibahas persamaan dan permukaan putar kuartik Bezier dari hasil modifikasi kurva kubik Bezier pada desain benda pecah belah.

METODE

Langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan formula kurva kuartik Bezier adalah, pertama membuat matriks kuartik Hermit, kedua menetukan titik kontrol poligon baru $\Omega = [P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}, P_3]$, ketiga membuat persamaan kuartik Bezier dari hasil modifikasi kurva kubik Bezier, terakhir membuat bentuk-bentuk permukaan putar kuartik Bezier dari hasil modifikasi kubik Bezier.

Pada pembuatan bentuk-bentuk permukaan tersebut diperlukan beberapa tahapan sebagai berikut:

a. Menentukan data titik.
b. Membangun kurva kuartik Bezier hasil modifikasi kubik dengan menggunakan data titik untuk memberikan kelengkungan.

c. Merotasi atau menginterpolasi kurva Bezier.
d. Simulasi kurva kuartik Bezier dengan data titik yang ditentukan menggunakan Maple 13.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyajian Kurva Kubik Hermit

Menurut [7], kurva Hermit ditemukan oleh matematikawan Prancis yang bernama Charles Hermit pada tahun 1822-1901. Segmen kurva kubik Hermit adalah kurva interpolasi dari dua buah titik kontrol P_0 dan P_1 di mana kurva ini mensyaratkan juga diketahuinya vektor-vektor *tangent* terhadap variabel parameter u dari titik-titik kontrol tersebut yaitu P_0^u dan P_1^u. Bentuk aljabar dari kurva kubik parametrik $P(u)$ dimisalkan dengan mengikuti tiga polinomial:

$$\begin{aligned} x(u) &= a_x + b_x u + c_x u^2 + d_x u^3 \\ y(u) &= a_y + b_y u + c_x u^2 + d_x u^3 \\ z(u) &= a_Z + b_z u + c_Z u^2 + d_x u^3 \end{aligned} \tag{1}$$

di mana $a, b, c,$ dan d adalah koefisien yang mengikuti persamaan x, y dan z dengan parameter u yang dibatasi dalam interval $0 \leq u \leq 1$ atau $u \in [0,1]$. Selanjutnya dari kurva bentuk (1), ditulis dalam bentuk parametrik

$$P(u) = a + bu + cu^2 + du^3 \tag{2}$$

kemudian berdasarkan persamaan (2) ditetapkan kondisi berikut:

$$\begin{aligned} P(0) &= a \\ P(1) &= a + b + c + d \\ P^u(0) &= b \\ P^u(1) &= b + 2c + 3d \end{aligned} \tag{3}$$

Jika sistem persamaan (2.8) diselesaikan, maka diperoleh matriks Hermit dan diperoleh vektor-vektor a , b, c, dan d sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a &= P_0 \\ b &= P_0^u \\ c &= -3P_0 + 3P_1 - 2P_0^u - P_1^u \\ d &= 2P_0 - 2P_1 + P_0^u + P_1^u \end{aligned} \tag{4}$$

Persamaan (4) disubstitusikan ke persamaan (2) maka diperoleh persamaan kurva kubik Hermit

$$P(u) = H_1(u)P_0 + H_2(u)P_1 + H_3(u)P_0' + H_4(u)P_1' \tag{5}$$

dengan

$$\begin{aligned} H_1(u) &= (1 - 3u^2 + 2u^3) \\ H_2(u) &= (3u^2 - 2u^3) \\ H_3(u) &= (u - 2u^2 + u^3) \\ H_4(u) &= (-2u^2 + u^3) \end{aligned} \tag{6}$$

Bentuk persamaan (5) disebut sebagai penyajian kurva dalam bentuk geometrik dan P_0, P_1, P_0^u dan P_1^u disebut koefisen geometrik. Sedangkan fungsi-fungsi $H_1(u)$, $H_2(u), H_3(u)$ dan $H_4(u)$ dalam persamaan (6) disebut basis Hermit dan kurvanya dinamakan kurva Hermit [8].

Penyajian Kurva Kubik Bezier

Kurva Bezier adalah kurva polinomial yang terdiri dari beberapa himpunan titik kontrol. Titik interpolasi kurva adalah titik pertama dan terakhir, sementara titik kedua sampai titik P_{n-1} merupakan aproksimasi *tangent* dan *magnitude* yang digunakan untuk mengontrol kelengkungan kurva. Kurva Bezier polinomial n dinyatakan dalam bentuk parametrik yaitu

$$C(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(u), u \in [0,1] \tag{7}$$

di mana basis fungsinya adalah

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-1}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Pada persamaan tersebut, titik-titik P_i disebut koefisien geometrik atau titik kontrol kurva $C(u)$. Titik-titik tersebut berharga riil. Untuk 4 titik dan $n = 3$:

$$B_{0,3} = (1-u)^3$$
$$B_{1,3} = 3u(1-u)^2$$
$$B_{2,3} = 3u^2(1-u)$$
$$B_{3,3} = u^3$$

Sehingga diperoleh kurva kubik Bezier dengan parameter u sebagai berikut:

$$C_3(u) = (1-u)^3 P_0 + 3(1-u)^2 u P_1 + 3(1-u)u^2 P_2 + u^3 P_3 \tag{8}$$

Matriks Kuartik Hermit

Misalkan diambil kurva kuartik parametrik dengan $P(u)$ dinyatakan dalam bentuk aljabar:

$$x(u) = a_x + b_x u + c_x u^2 + d_x u^3 + e_x u^4 \tag{9}$$
$$y(u) = a_y + b_y u + c_x u^2 + d_x u^3 + e_y u^4$$
$$z(u) = a_Z + b_z u + c_Z u^2 + d_z u^3 + e_z u^4$$

di mana a, b, c, d dan e adalah koefisien yang mengikuti persamaan x, y, dan z dengan parameter u yang dibatasi dalam interval $0 \le u \le 1$ atau $u \in [0,1]$. Pembatasan nilai u dimaksudkan agar segmen kurva yang terbangun terbatas dan mudah dikontrol.

Berdasarkan persamaan (1) dapat ditulis ke dalam bentuk parametrik sehingga menjadi

$$P(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 \tag{10}$$

di mana koefisien a, b, c, d dan e pada persamaan $P(u)$ adalah vektor yang memiliki tiga komponen, seperti $a = [a_x, a_y, a_z]$. Kemudian di dapatkan turunan pertama dari $P(u)$ adalah

$$P^u(u) = b + 2cu + 3du^2 + 4eu^3$$

Turunan kedua dari $P(u)$ adalah

$$P^{uu}(u) = 2c + 6du + 12eu^2$$

Kemudian ditetapkan beberapa kondisi berikut:

$$\begin{aligned}
P(u=0) &= P_0 = a \\
P(u=1) &= P_1 = a + b + c + d + e \\
P^u(u=0) &= P_0^u = b \\
P^u(u=1) &= P_1^u = b + 2c + 3d + 4e \\
P^{uu}(=0) &= P_0^{uu} = 2c
\end{aligned}$$

Maka diperoleh matrik modifikasi Hermit yaitu

$$M_{MH} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & 4 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Persamaan Kurva Kuartik Bezier dari Hasil Modifikasi Kubik Bezier

Misalkan diberikan titik-titik kontrol poligon Bezier baru $\Omega = [P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}, P_3]$, kemudian titik kontrol antara $NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$NP_{31} = \lambda_{31}P_1 + (1-\lambda_{31})P_0$$
$$NP_{32} = \lambda_{32}P_2 + (1-\lambda_{32})P_1$$
$$NP_{33} = \lambda_{33}P_3 + (1-\lambda_{33})P_2$$

dengan $0 \leq \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33} \leq 1$.

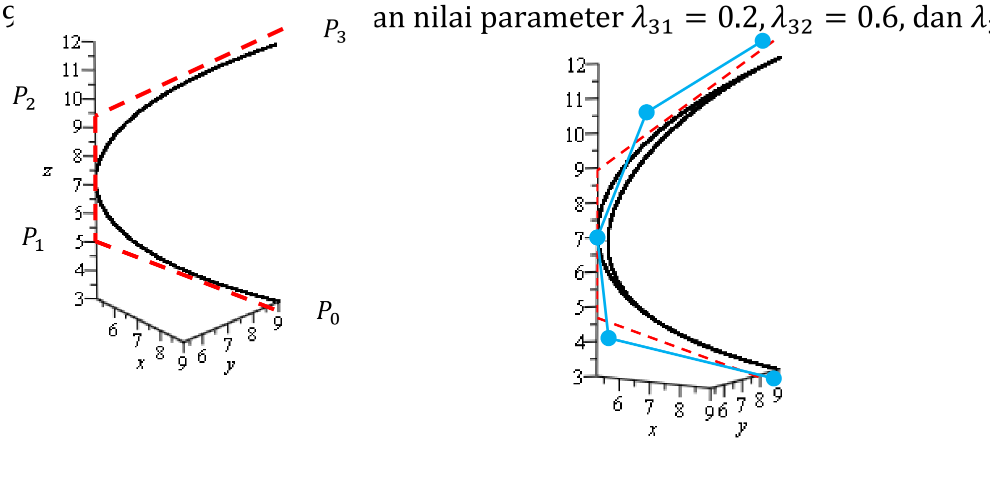
Selanjutnya didefinisikan titik-titik kontrol baru $P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}$ dan P_3 untuk membuat persamaan kuartik Bezier dari hasil modifikasi kubik Bezier sebagai berikut,

$B(0) = P_0$
$B(1) = P_3$
$B'(0) = 4(NP_{31} - P_0)$
$B'(1) = 4(P_3 - NP_{33})$
$B"(0) = 12(P_0 - 2NP_{31} + NP_{32})$

Maka modifikasi kurva kubik Bezier kedalam bentuk kuartik Bezier yaitu,

$$\begin{aligned} B_4(u) \; &= [(1-4u+6u^2-4u^3+u^4)P_0 + (4u+12u^2+12u^3 \\ &\quad -4u^4)NP_{31} \\ &\quad +(6u^2-12u^3+6u^4)NP_{32} + (4u^3-4u^4)NP_{33} + u^4P_3] \end{aligned} \qquad (12)$$

dengan $0 \leq u \leq 1$. Pada Gambar 3.1 ditunjukkan perbedaan kurva kubik Bezier menggunakan persamaan (2.13) dan kurva kuartik Bezier dari hasil modifikasi kubik Bezier menggunakan persamaan (3.4) dengan titik $P_0 = (9,0,3), P_1 = (4,0,5)$, $P_2 =$ $(4,0,9$ an nilai parameter $\lambda_{31} = 0.2, \lambda_{32} = 0.6$, dan $\lambda_{33} = 0.9$.



Kurva Kubik Bezier

Kurva Kuartik Bezier hasil modifikasi kubik Bezier

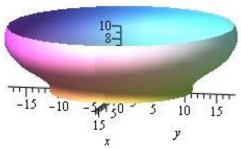
Gambar 1. Contoh Kurva Kubik Bezier dan Kuartik dari Hasil Modifikasi Kubik Bezier

Bentuk Permukaan Putar Kuartik Bezier dari Hasil Modifikasi Kurva Kubik Bezier

Bentuk-bentuk kuartik Bezier hasil modifikasi kurva kubik Bezier bergantung pada penentuan data titik kontrol P_0, P_1, P_2 dan P_3. Karena adanya kasus modifikasi titik, maka diperlukan titik kontrol baru atau titik modifikasi yaitu NP_{31}, NP_{32} dan NP_{33} pada persamaan (3.4). Penentuan titik tersebut digunakan untuk menghasilkan kurva yang lebih mulus. Gambar 1 merupakan contoh permukaan putar kuartik Bezier dari hasil modifikasi kubik Bezier dengan beberapa pemilihan titik kontrol P_0, P_1, P_2 dan P_3 dan parameter $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ pada titiik modifikasi NP_{31}, NP_{32} dan NP_{33} yang berbeda-beda.

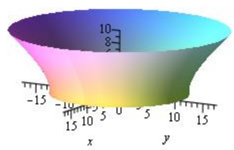
Permukaan putar kubik Bezier

$P_0 = (11{,}0{,}0), P_1 = (10{,}0{,}3)$
$P_2 = (20, 0{,}4)$, dan $P_3 = (17.5{,}0{,}10)$

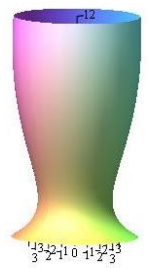


Permukaan putar kuartik Bezier hasil modifikasi kurva kubik Bezier

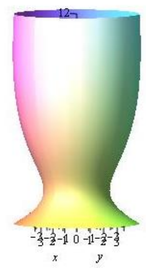
$P_0 = (11{,}0{,}0), P_1 = (10{,}0{,}3)$
$P_2 = (20, 0{,}4)$, dan $P_3 = (17.5{,}0{,}10)$
$\lambda_{31} = 0.75,\ \lambda_{32} = 1, \lambda_{33} = 0$



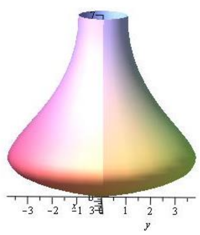
$P_0 = (3.5{,}0{,}0), P_1 = (0{,}0{,}2)$
$P_2 = (4, 0{,}4)$, dan $P_3 = (3.5{,}0{,}12)$



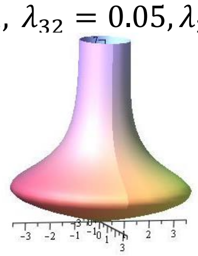
$P_0 = (3.5{,}0{,}0), P_1 = (0{,}0{,}2)$
$P_2 = (4, 0{,}4)$, dan $P_3 = (3.5{,}0{,}12)$
$\lambda_{31} = 0.1,\ \lambda_{32} = 0.5, \lambda_{33} = 1$



$P_0 = (0{,}0{,}0), P_1 = (8{,}0{,}1.5)$
$P_2 = (1, 0{,}2)$, dan $P_3 = (1{,}0{,}7)$

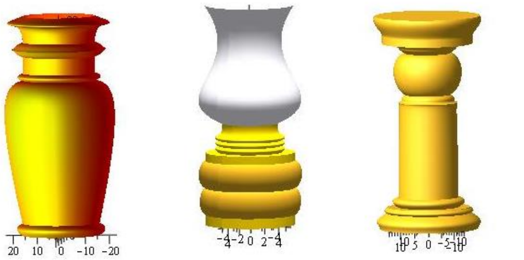


$P_0 = (0{,}0{,}0), P_1 = (8{,}0{,}1.5)$
$P_2 = (1, 0{,}2)$, dan $P_3 = (1{,}0{,}7)$
$\lambda_{31} = 0.1,\ \lambda_{32} = 0.05, \lambda_{33} = 1$



Gambar 2. Permukaan Kubik Bezier dan Modifikasinya

Selanjutnya beberapa permukaan putar kuartik Bezier dari hasil modifikasi kubik Bezier dapat dimafaatkan untuk memodelkan benda industri (pecah belah) seperti vas bunga, lampu teplik, kursi marmer, dan benda pecah belah lainnya. Gambar 2 menggambarkan contoh desain benda pecah belah menggunakan beberapa bentuk kuartik Bezier dari hasil modifikasi kurva kubik Bezier.



Guci Lampu Teplik Kursi Marmer

Gambar 3. Contoh Desain Benda Pecah Belah Menggunakan Kuartik Bezier dari Hasil Modifikasi Kubik Bezier

KESIMPULAN

Persamaan kuartik Bezier hasil dari modifikasi kubik Bezier diperoleh dari matrik modifikasi Hermit dan penetapan titik kontrol poligon baru. Pada bentuk kuartik Bezier hasil modifikasi kubik Bezier memiliki 5 titik kontrol yaitu $P_0, NP_{31}, NP_{32}, NP_{33}, P_3$. Bentuk-bentuk permukaan putar kuartik Bezier hasil modifikasi kubik Bezier dipengaruhi oleh nilai titik kontrol P_0, P_1, P_2, P_3 dan pemilihan nilai parameter $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ pada data titik kontrol baru NP_{31}, NP_{32} dan NP_{33}.

REFERENSI

[1] E. Mortenson, Mathematics for Computer Grapichs Applications, New York: Industrial Press, Inc, 1999.

[2] A. C. P. M. D. Kusno, "Modelisasi Benda Onyx dan Marmer Melalui Penggabungan dan Pemilihan Parameter Pengubah Bentuk Permukaan Putar Bezier," *Jurnal Ilmu Dasar,* vol. 8, no. 2, pp. 175-185, 2007.

[3] E. O. Juhari, "Penerapan Kurva Bezier Karakter Simetrik dan Putar pada Model Kap Lampu Duduk Menggunakan MAPLE," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi,* vol. 4, no. 1, pp. 28-34, 2015.

[4] Wahyudi, "Perancangan Objek-Objek Industri dengan Benda Permukaan Putar," Universitas Jember, Jember, 2001.

[5] Roifah, "Modelisasi Knop Melalui Penggabungan Benda Dasar Hasil Deformasi Tabung, Prisma Segienam Beraturan, dan Permukaan Putar," Universitas Jember, Jember, 2013.

[6] Arinda, "Konstruksi Vas Bunga Melalui Penggabungan Beberapa Benda Geometri Ruang," Universitas Jember, Jember, 2007.

[7] E. Mortenson, Geometric Modelling, New York: Willey Komputer Publishing, 1996.

[8] Kusno, Geometri Rancang Bangun Studi Surfas Putar Transformasi Titik Dan Proyeksi, Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember, 2003.